配北师大版
普通高中课程标准实验教科书

Jiaoxue Yu Ceshi

高中教学与测试

数学

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

- 新课标
- 理科总复习
- 教师用书

苏州大学出版社

配北师大版

普通高中课程标准实验教科书

高中数学

教学与测试

理科总复习

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 编

·教师用书·

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学教学与测试. 理科总复习/苏州大学《中学数学月刊》编辑部编. —苏州：苏州大学出版社，2009.7
教师用书. 配北师大版普通高中课程标准实验教科书
ISBN 978-7-81137-288-5

Ⅰ.高… Ⅱ.苏… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 117608 号

高中数学教学与测试

理科总复习

(教师用书)

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 编

责任编辑 管兆宁

苏州大学出版社出版发行

(地址：苏州市干将东路 200 号 邮编：215021)

江 苏 省 新 华 书 店 经 销

丹 阳 市 兴 华 印 刷 厂 印 装

(地址：丹阳市胡桥镇 邮编：212313)

开本 787×1092 1/16 印张 34.5 字数 1100 千

2009 年 7 月第 1 版 2009 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81137-288-5 定价：49.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换

苏州大学出版社营销部 电话：0512－67258835

苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

《高中数学教学与测试》编委会

（理科总复习）

前 言

PREFACE

为了给使用《普通高中课程标准实验教科书(数学)》的广大高中学生和数学教师进行高考复习及高三数学教学提供更好的指导和帮助，我们聘请了在教学第一线工作、具有丰富高考复习经验的优秀专家、特级教师和高级教师组成强有力的编写小组，通过广泛听取意见，认真分析普通高中数学课程标准的新特点和数学高考命题的新动向，在精心研讨的基础上编写了《高中数学教学与测试》(理科总复习)，供 2010 年参加高考的理科学生和高三数学教师使用.

本书可作为第一轮高三数学复习用书，分为学生用书和教师用书.

学生用书共分 13 章 85 节. 每节由 5 个部分组成：**基础训练**——选择、填空型基础题，相关考点的基本知识、技能的训练与准备；**例题精讲**——精选代表性、典型性和启发性的例题，体现新高考重点的考查内容以及能力考查的趋势，注重通性、通法的具体运用，揭示解题方法及解题规律；**巩固练习**——有针对性地对本节涉及的基本知识、方法和技巧进行检测巩固；**要点回顾**——梳理本节的知识要点，本节所体现的主要数学思想方法、能力考核要点等；**自我测试**——强化双基，进一步领会解题思路和方法. 为方便使用，学生用书的“自我测试”按奇数、偶数节内容分别装订成“A 册”和“B 册”，书末附有自我测试简明答案.

教师用书的单元、小节的数目及其排列顺序与学生用书完全相同，内容包括“基础训练”、“例题精讲”、“巩固练习”、“要点回顾”和“自我测试”中所有习题及详细解答，并给出典型问题的出处、选题目的、变题引申、教学点拨或学习指导. 另外，在每节“要点回顾”后设置了**参考例题**，提供 3 个备选例题，以便教师酌情选用.

本书由全体编委会成员集体讨论确定编写细则，最后由 4 位特级(高级)教师执笔编写：刘健(高级教师)——第一、二、三、四章；吴锷(特级教师)——第五、六、七、八、九章；石志群(教授级高级教师)——第十、十一、十二章；蔡玉书(高级教师)——第十三章.

苏州大学数学科学学院 5 位教师负责审校：潘洪亮——第一、二、五、六、七章；陆芳言——第三、四章；丰世富——第八、九章；徐稼红——第十、十一、十二、十三章.

多年来，全国各地的中学数学教师、学生和社会各界人士对我们编写的中学数学方面的书籍给予了热情的关怀和支持，对于本次编写的《高中数学教学与测试》(理科总复习)，许多专家和读者提出了很多宝贵的意见和建议. 在此，我们一并表示衷心的感谢.

我们真诚地希望使用本书的老师、学生和家长将使用的情况和意见反馈给我们，以便我们今后进一步修改完善，把这套精品图书编得更好.

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

目　录

CONTENTS

一、集合、常用逻辑用语

1. 集合的概念、集合间的基本关系

基础训练

1. 下列关系中表述正确的是 (C)

A. $0\in\varnothing$ B. $0\notin\{x|x^2-x=0\}$ C. $0\in\mathbf{N}$ D. $0\notin\{y|y=|x|,x\in\mathbf{R}\}$

提示 0是自然数.

2. 若集合 $P=\{0,1,2\}$，$Q=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x-2y\leqslant1,x\in P,y\in P\}$，则 Q 中元素的个数为 (C)

A. 9 B. 6 C. 3 D. 1

提示 $(0,0),(1,0),(2,1)\in Q$.

3. (2008·江西卷)定义集合的运算：$A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$. 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{0,2\}$，则集合 $A*B$ 的所有元素之和为 (D)

A. 0 B. 2 C. 3 D. 6

提示 $\because A*B=\{0,2,4\}$，故选 D.

4. 已知集合 $A=\{1,\sin\theta\}$，$B=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$，若 $A\subseteq B$，且 θ 为三角形的内角，则 $\theta=$ ___30°或150°___.

提示 由 $A\subseteq B$ 得 $\sin\theta\in B$，再考虑到 θ 为三角形的内角，所以有 $\sin\theta=\frac{1}{2}$.

5. 已知集合 $P=\{x|x^2-x-n(n+1)\leqslant0\}$，$n\in\mathbf{N}$，若 $-4\in P$ 且 $6\notin P$，则 $n=$ ___4___.

提示 $P=[-n,n+1]\,(n\in\mathbf{N})$，于是有 $-n\leqslant-4$，$n+1<6$，得 $4\leqslant n<5$，即 $n=4$.

6. 已知集合 $M=\{a-3,2a-1,a^2-4\}$，且 $-3\in M$，则实数 a 的取值所组成的集合是 ___$\{0,1\}$___.

提示 若 $a-3=-3$，则 $a=0$ 符合题意；若 $2a-1=-3$，则 $a=-1$，此时 $2a-1=a^2-4=-3$，M 不是三元集，舍去；若 $a^2-4=-3$，则 $a=\pm1$，舍去 $a=-1$.

例题精讲

例1 判断下列各题中集合 A 与 B 是否具有相等或真包含关系.

(1) $A=\{x|x=3k\pi+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=6k\pi+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$；

(2) $A=\left\{y\,\middle|\,y=\frac{1}{x},x\neq0\right\}$，$B=\left\{y\,\middle|\,y=\frac{2}{x},x\neq0\right\}$；

(3) $A=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$.

解 (1) 若 $x=6k\pi+\alpha$，则 $x=3(2k)\pi+\alpha=3k'\pi+\alpha$，即 $B\subseteq A$. 但 $3\pi+\alpha\in A$，$3\pi+\alpha\notin B$，故 $B\subsetneqq A$.

(2) $A=\left\{y\,\middle|\,y=\frac{1}{x},x\neq0\right\}=\{y|y\neq0\}$，$B=\left\{y\,\middle|\,y=\frac{2}{x},x\neq0\right\}=\{y|y\neq0\}$，故 $A=B$.

(3) $A=B=\{$奇数$\}$.

说明 注意对集合元素的表示形式进行变形；当 $B\subseteq A$ 时，只需找到一个 $x_0\in A$ 且 $x_0\notin B$，即可证 $B\subsetneqq A$；理解集合的本质，函数不同，值域可以相同；同一集合可以有不同的表示形式.

例 2 已知集合 $P=\{x\mid x^2+x-6=0,x\in\mathbf{R}\}$，$S=\{x\mid ax+1=0,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $S\subseteq P$，求实数 a 的取值组成的集合 A.

解 $P=\{-3,2\}$. 当 $a=0$ 时，$S=\varnothing$，满足 $S\subseteq P$；当 $a\neq 0$ 时，$S=\left\{-\dfrac{1}{a}\right\}$，要满足 $S\subseteq P$，应有 $-\dfrac{1}{a}=-3$ 或 $-\dfrac{1}{a}=2$，则 $a=\dfrac{1}{3}$ 或 $a=-\dfrac{1}{2}$. 因此所求集合 $A=\left\{-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{3}\right\}$.

说明 当讨论 $S\subseteq P$ 关系时，注意是否有 $S=\varnothing$ 的情形.

例 3 设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$，$S_1,S_2,\cdots,S_k$ 都是 M 的含两个元素的子集，且满足：对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$，$S_j=\{a_j,b_j\}$ $(i\neq j$，且 $i,j\in\{1,2,3,\cdots,k\})$，都有 $\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i},\dfrac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\dfrac{a_j}{b_j},\dfrac{b_j}{a_j}\right\}$（$\min\{x,y\}$ 表示两个数 x,y 中的较小者），试求 k 的最大值.

解 首先集合 M 的二元子集有 $\{1,2\},\{1,3\},\cdots,\{5,6\}$，共十五个.

其次考虑满足条件：$\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i},\dfrac{b_i}{a_i}\right\}=\min\left\{\dfrac{a_j}{b_j},\dfrac{b_j}{a_j}\right\}$ 的集合 S_i 与 S_j $(i\neq j)$ 共有几对.

对于 $S_i(i=1,2,3,\cdots,15)$，由于 $a_i\neq b_i$，故不妨设 $a_i<b_i$，这样 $\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i},\dfrac{b_i}{a_i}\right\}=\dfrac{a_i}{b_i}$，于是满足 $\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i},\dfrac{b_i}{a_i}\right\}=\min\left\{\dfrac{a_j}{b_j},\dfrac{b_j}{a_j}\right\}$ 的二元子集对有：$\{1,2\}$ 与 $\{2,4\}$，$\{1,2\}$ 与 $\{3,6\}$，$\{2,4\}$ 与 $\{3,6\}$，$\{1,3\}$ 与 $\{2,6\}$，$\{2,3\}$ 与 $\{4,6\}$，共 5 对.

若要满足题设条件，在这 5 对二元子集中，每一对的二个子集中至多只能选出一个. 这样所求的 k 的最大值即为 $15-5=10$.

说明 由于条件“$\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i},\dfrac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\dfrac{a_j}{b_j},\dfrac{b_j}{a_j}\right\}$”涉及到的情况十分复杂，所以我们采用了“正难则反”的解题策略.

例 4 已知集合 $P=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$，$S=\{x\mid x^2-2ax+a\leqslant 0\}$. 若 $S\subseteq P$，求实数 a 的取值组成的集合 A.

解 $P=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，设 $f(x)=x^2-2ax+a$.

① 当 $\Delta=(-2a)^2-4a<0$，即 $0<a<1$ 时，$S=\varnothing$，满足 $S\subseteq P$；

② 当 $\Delta=0$，即 $a=0$ 或 $a=1$ 时，

若 $a=0$，则 $S=\{0\}$，不满足 $S\subseteq P$，故舍去 $a=0$；若 $a=1$，则 $S=\{1\}$，满足 $S\subseteq P$.

③ 当 $\Delta>0$ 时，要满足 $S\subseteq P$，即等价于方程 $x^2-2ax+a=0$ 的两根位于 1 和 2 之间，

$$\text{即}\begin{cases}\Delta>0,\\ 1<-\dfrac{(-2a)}{2}<2,\\ f(1)\geqslant 0,\\ f(2)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\text{ 或 }a>1,\\ 1<a<2,\\ 1-a\geqslant 0,\\ 4-3a\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow a\in\varnothing.$$

综合①，②，③得 $0<a\leqslant 1$，即所求集合 $A=\{a\mid 0<a\leqslant 1\}$.

说明 先讨论特殊情形（$S=\varnothing$），再讨论一般情形. 关键是对 Δ 分类讨论，确定 a 的取值范围. 可用数形结合的方法讨论 $\Delta>0$.

巩固练习

1. 已知集合 $P=\{x|0<x<2\}$, $Q=\{x|x<a\}$. 若 $P\subsetneqq Q$, 则 (B)

A. $a\in(2,+\infty)$　　B. $a\in[2,+\infty)$　　C. $a\in(-\infty,2)$　　D. $a\in(-\infty,2]$

提示　注意 $a=2$ 时, 也满足条件.

2. 下列表示同一个集合(即 $M=N$)的是 (D)

A. $M=\{(1,0)\}$, $N=\{(0,1)\}$　　B. $M=\{y|y=x+1\}$, $N=\{(x,y)|y=x+1\}$

C. $M=\{(x,y)|y=x\}$, $N=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{y}{x}=1\right\}$　　D. $M=\{x|x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$, $N=\{x|x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$

提示　$3k-1=3(k-1)+2=3k'+2$.

3. 用列举法写出集合 $A=\{y|y=x^2-2,x\in\mathbf{Z},|x|\leqslant 3\}=$ $\underline{\{-2,-1,2,7\}}$.

提示　只要求出 $x=0,1,2,3$ 的函数值即可.

4. 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 1\}$, $B=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, 则 A 与 B 的关系为 $\underline{A\subsetneqq B}$.

提示　分别作出 A,B 所表示的平面图形, 即可判断.

要点回顾

1. 理解集合的概念, 掌握集合的表示方法(列举法与描述法), 体会元素的确定性、互异性和无序性, 以及元素与集合的"属于"关系.

2. 能对集合不同表示方法作转换, 应明确元素的形式. 理解集合之间的"包含"与"相等"的关系. 应注意空集在解题中的运用.

3. 注意集合语言与方程、不等式、函数等知识的综合.

参考例题

1. 集合 $P=\{x|x^2-25<0\}$, $Q=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$, 若 $S\subseteq P$ 且 $S\subseteq Q$, 则 S 的子集个数最多为多少?

解　$\because$ $P=(-5,5)$, $Q=\{$奇数$\}$, $\therefore$ $P\cap Q$ 是由 P 中的奇数组成的, 即 $P\cap Q=\{-3,-1,1,3\}$.
由 $S\subseteq P$ 且 $S\subseteq Q$ 知 $S\subseteq P\cap Q$, $\therefore$ 集合 S 的元素个数最多为 4, S 的子集最多为 $2^4=16$ 个.

2. $M=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{N},\dfrac{6}{1+x}\in\mathbf{N}\right\}$, $Q=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{6}{1+t},t\in\mathbf{N},x\in\mathbf{N}\right\}$, 求 $M\cap Q$.

解　$M=\{0,1,2,5\}$, $Q=\{1,2,3,6\}$, 故 $M\cap Q=\{1,2\}$.

说明　要注意集合 Q 的元素是由 $\dfrac{6}{1+t}$ 的取值组成的.

3. 含有三个元素的集合可表示为 $\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}$ 也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$, 求 a,b.

解　由 $\dfrac{b}{a}$ 可得 $a\neq 0$, 又 $a\neq 1$, 故 $a\neq a^2$, 从而 $a=a+b$, 于是有 $b=0$, $\{a,0,1\}=\{a^2,a,0\}$,
从而由 $a^2=1$ 且 $a\neq 1$ 得 $a=-1$.

自我测试

1. 给出下列四个关系：① $3\sqrt{2}\in\{x|x\leqslant\sqrt{17}\}$；② $0\notin\varnothing$；③ $0\in\mathbf{N}$；④ $0\notin\{y|y=x^2-x+1\}$. 其中正确的个数是 (C)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

提示　②,③,④均正确.

2. 已知集合 $P=\{x|x>1\}$，$Q=\{x|x^2>1\}$，则 (B)

A. $P=Q$　　B. $P\subsetneqq Q$　　C. $Q\subsetneqq P$　　D. 以上都不对

提示　$Q=\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$.

3. 设 P 和 Q 是两个集合，定义集合 $P-Q=\{x|x\in P$，且 $x\notin Q\}$. 如果 $P=\{x|\log_2 x<1\}$，$Q=\{x|-1<x-2<1\}$，那么 $P-Q$ 等于 (B)

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant1\}$　　C. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|2\leqslant x<3\}$

提示　$P=(0,2)$，$Q=(1,3)$，故 $P-Q=(0,1]$.

4. 满足 $\{a_1,a_2,a_3\}\subseteq A\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ 的集合 A 的个数为 __8__.

提示　A 为三元集时，有 1 个；A 为四元素集时，有 3 个；A 为五元素集时，有 3 个；A 为六元素集时，有 1 个. 故共有 8 个.

5. 用列举法表示集合 $A=\left\{y\,\middle|\,y=\frac{|\sin x|}{\sin x}+\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{\tan x}{|\tan x|},x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}=$ __$\{-1,3\}$__.

提示　考虑 x 分别为四个象限中的角时，y 的值.

6. 已知非空集合 M 满足：①$M\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$；②若 $a\in M$，则 $6-a\in M$. 那么 $M=$ __$\{3\}$或$\{1,5\}$或$\{2,4\}$或$\{1,3,5\}$或$\{2,3,4\}$或$\{1,2,4,5\}$__.

提示　1 与 5，2 与 4 或者同时在 M 中出现，或者均不在 M 中出现.

说明　本题条件②决定了在 M 中，只有元素 3 可以单独属于 M，其余的元素：1 与 5，2 与 4(即和为 6 的两个元素)必须在 M 中均不出现或成对出现. 又由于条件①的限制，决定了 $M\neq\{1,2,3,4,5\}$. 其实，本题还能推广到一般情况："已知非空集合 M 满足：①$M\subsetneqq\{1,2,3,\cdots,2n-1\}$ $(n\in\mathbf{N}_+,n\geqslant2)$；②若 $a\in M$，则 $2n-a\in M$. 求 M."

这个问题求解的关键仍然是：和为 $2n$ 的两个元素，它们在 M 中或者同时出现，或者均不出现.

7. 已知 $1\in\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，求实数 a 的值.

解　当 $a+2=1$ 时，$a=-1$，而此时有 $a^2+3a+3=1$，不符合元素互异性，故 $a=-1$ 舍去.

当 $(a+1)^2=1$ 时，$a=0$ 或 $a=-2$，而当 $a=-2$ 时，$(a+1)^2=a^2+3a+3$，不符合元素互异性，故此时，$a=0$.

当 $a^2+3a+3=1$ 时，$a=-1$ 或 $a=-2$，均应舍去.

综上所述，$a=0$.

说明　在求解与本题类似的问题时，应该在求出 a,b 的值之后，再将它们代入相关集合考察元素是否具有互异性. 以下第 8、第 9 两题也涉及这个问题.

8. 已知 $\{2,a,b\}=\{2a,2,b^2\}$，求实数 a,b 的值.

解　由题意得 $\begin{cases}a=2a,\\b=b^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b^2,\\b=2a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

经检验,当$\begin{cases}a=0,\\b=0\end{cases}$时与集合元素的互异性不符,应舍去.所求 a,b 的值是$\begin{cases}a=0,\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

9. 已知$\{1,a^2-a\}\subseteq\{1,2,a\}$,求实数 a 的值.

解 若 $a^2-a=2$,则 $a=-1$ 或 $a=2$,而当 $a=2$ 时不符合元素的互异性.

若 $a^2-a=a$,则 $a=0$ 或 $a=2$,舍去 $a=2$.

综上所述,$a=-1$ 或 $a=0$.

10. 已知$\{x|x^2-mx+2=0\}\subseteq\{x|x^2-3x+2=0\}$,且$\{x|x^2-mx+2=0\}\neq\varnothing$,求实数 m 的取值组成的集合 M.

解 易得$\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$.对于 $x^2-mx+2=0$,当 $\Delta=m^2-8=0$ 时,$x_1=x_2=\frac{m}{2}\neq1$ 或 2.

故$\{x|x^2-mx+2=0\}=\{1,2\}$,此时 $m=3$,得 $M=\{3\}$.

说明 由于$\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$,$\{x|x^2-mx+2=0\}\neq\varnothing$.故由题设知:只要考虑$\{x|x^2-mx+2=0\}=\{1\}$,$\{x|x^2-mx+2=0\}=\{2\}$,与$\{x|x^2-mx+2=0\}=\{1,2\}$三种情况.因此,本题也可以利用:$x^2-mx+2=(x-1)^2$,$x^2-mx+2=(x-2)^2$,与 $x^2-mx+2=(x-1)(x-2)$来求 m 的值.

2. 集合的基本运算

基础训练

2. (2008·北京卷)若集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant3\}$,$B=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$,则集合 $A\cap B$ 等于 (D)

A. $\{x|x\leqslant3$ 或 $x>4\}$　B. $\{x|-1<x\leqslant3\}$　C. $\{x|3\leqslant x<4\}$　D. $\{x|-2\leqslant x<-1\}$

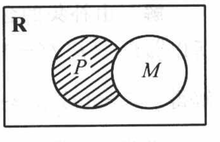
提示 在数轴上分别把集合 A,B 表示出来,易得 $A\cap B=\{x|-2\leqslant x<-1\}$.

2. 已知集合 $A=\{x|a-3<x<a+3\}$,$B=\{x|x<-1$ 或 $x>2\}$,若 $A\cup B=\mathbf{R}$,则 (B)

A. $a\in[-1,2]$　B. $a\in(-1,2)$　C. $a\in[-2,1]$　D. $a\in(-2,1)$

提示 由 $a-3<-1$ 且 $a+3>2$,解得 $-1<a<2$.也可借助数轴来解.

3. 设全集为 $\mathbf{R}$,$M=\{x|x^2>4\}$,$P=\left\{x\left|\frac{2}{x-1}\geqslant0\right.\right\}$,则图中阴影部分表示的集合是 (C)



A. $\{x|-2\leqslant x<1\}$　B. $\{x|-2\leqslant x\leqslant2\}$

C. $\{x|1<x\leqslant2\}$　D. $\{x|x<1\}$

提示 $M=\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$,$P=\{x|x>1\}$.

4. 设全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$,$A=\{x|1\leqslant x\leqslant6,x\in\mathbf{N}_+\}$,则$\complement_UA=$ $\underline{\{0,7\}}$.

提示 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$,$\complement_UA=\{0,7\}$.

5. 若集合 $A=\{1,\sin\theta\}$,$B=\left\{\frac{1}{2},2\right\}$,若 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$,则 $\cos\theta=$ $\underline{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

提示 $\sin\theta=\frac{1}{2}$.

6. (2008·上海卷)若集合 $A=\{x|x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，满足 $A\cap B=\{2\}$，则实数 $a=$ <u>2</u>.

提示 借助于数轴，利用数形结合易得.

例题精讲

例 1 已知集合 $A=\{x|x\leqslant a\}$，$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$，且 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

解 $A=(-\infty,a]$，$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$，$\therefore$ $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}\Leftrightarrow[1,2]\subseteq(-\infty,a]$，$\therefore$ $a\geqslant 2$，即所求的实数 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

说明 这里要注意不能遗漏 $a=2$ 的情形.

例 2 已知集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,a-2,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 $A\cup B$.

解 由 $A\cap B=\{-3\}$ 知，$-3\in B$. 又 $a^2+1\geqslant 1$，故 B 中只有 $a-3$ 或 $a-2$ 等于 -3.

① 当 $a-3=-3$ 时，$a=0$，此时 $A=\{0,1,-3\}$，$B=\{-3,-2,1\}$，$A\cap B\neq\{-3\}$，故 $a=0$ 舍去.

② 当 $a-2=-3$ 时，$a=-1$，此时 $A=\{1,0,-3\}$，$B=\{-4,-3,2\}$，满足 $A\cap B=\{-3\}$，从而 $A\cup B=\{-4,-3,0,1,2\}$.

说明 由 $-3\in B$ 对 B 的元素进行讨论，注意对 a 的值进行验证，避免增解.

例 3 已知集合 $A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\right.\right\}$，$B=\{(x,y)|y=ax+2,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的值.

解 由方程组 $\begin{cases}\dfrac{y-3}{x-2}=1,\\ y=ax+2,\end{cases}$ 得 $(1-a)x=1$. 当 $a=1$ 时，方程组无解；

当 $a\neq 1$ 时，$x=\dfrac{1}{1-a}$. 若 $\dfrac{1}{1-a}=2$，即 $a=\dfrac{1}{2}$，此时 $x=2$ 为增根，所以方程组也无解.

从而 $a=1$ 或 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

说明 本题可用几何的方法来解. $l_1:y-3=x-2$，$l_2:y=ax+2$，当 $l_1/\!/l_2$ 或 l_1 与 l_2 相交于 $(2,3)$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

例 4 已知函数 $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$ 在区间 $[-1,1]$ 上至少存在一个实数 c，使 $f(c)>0$，求 p 的取值组成的集合 P.

解 由补集的含义知 $\complement_{\mathbf{R}}P=\{p|$当 $x\in[-1,1]$ 时 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立$\}$. 因为二次函数 $f(x)$ 的图像开口向上，所以 $\complement_{\mathbf{R}}P=\{p|f(-1)\leqslant 0$ 且 $f(1)\leqslant 0\}$. 于是由 $4+2(p-2)-2p^2-p+1\leqslant 0$ 且 $4-2(p-2)-2p^2-p+1\leqslant 0$ 解得 $p\leqslant -3$ 或 $p\geqslant\dfrac{3}{2}$，即 $\complement_U P=\left\{p\left|p\leqslant -3\text{ 或 }p\geqslant\dfrac{3}{2}\right.\right\}$，从而 $P=\left\{p\left|-3<x<\dfrac{3}{2}\right.\right\}$.

说明 本题看似与集合无关，但运用补集的方法使问题解法简单明了. 如果直接分类讨论比较复杂.

巩固练习

1. (2008·山东卷)满足 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$ 的集合 M 的个数是 (B)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 6

提示 由题意知 $M=\{a_1,a_2\}$ 或 $M\{a_1,a_2,a_4\}$，故选 B.

2. 已知集合 $P=\{y|y=x^2+2x-1,x\in\mathbf{N}\}$，$Q=\{y|y=-x^2+2x-1,x\in\mathbf{N}\}$，则 (B)

A. $P\cap Q=\varnothing$　　B. $P\cap Q=\{-1\}$　　C. $P\cap Q=\{0\}$　　D. $P\cap Q=\mathbf{N}$

提示　注意条件 $x\in\mathbf{N}$ 是关键.

3. (2008·江苏卷)$A=\{x|(x-1)^2<3x+7\}$,则 $A\cap\mathbf{Z}$ 的元素的个数为__6__.

提示　可求出 $A=\{x|-1<x<6\}$,故 $A\cap\mathbf{Z}=\{0,1,2,3,4,5\}$,∴ 元素的个数为 6.

4. 已知集合 $P=\{y|y=x^2+2x-1,x\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{y|y=-x^2+2x-1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $P\cap Q=$__$\{y|-2\leqslant y\leqslant 0\}$__.

提示　集合 P,Q 均为相关函数的值域. $P=\{y\,|\,y=(x+1)^2-2,x\in\mathbf{R}\}=\{y\,|\,y\geqslant -2\}$,$Q=\{y\,|\,y=-(x-1)^2,x\in\mathbf{R}\}=\{y\,|\,y\leqslant 0\}$.

说明　易错误地将 $P\cap Q$ 理解为两个函数图像的交点组成的集合.

要点回顾

1. 理解集合运算的含义,会求补集、交集与并集,体会它们都是由给定的两个集合经运算得到的集合,会用文氏图表示集合运算.

2. 注意集合的包含关系与集合的运算的联系,如 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$ 等.

3. 注意集合与方程、不等式、函数、平面解析几何等知识的联系,在各类集合的运用中提高能力,如例 4 中巧妙运用补集的思想方法.

参考例题

1. 设 $P=\{x|x^2-x<0\}$,$Q=\{x\,|\,|x|<2\}$,则　(B)

A. $P\cap Q=\varnothing$　　B. $P\cap Q=P$　　C. $P\cup Q=P$　　D. $P\cup Q=\mathbf{R}$

解　$P=\{x|0<x<1\}$,$Q=\{x|-2<x<2\}$,利用数轴.

2. 集合 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$,A 是 S 的一个子集. 当 $x\in A$ 时,若 $x-1\notin A$,且 $x+1\notin A$,则称 x 为 A 的一个"孤立元素",那么 S 中无"孤立元素"的 4 元子集的个数是　(C)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

解　从 S 中从小到大依次取出 4 个元素组成集合 A,要求 A 中无孤立元素,则选取时,必须是选紧接前一次所选的数,或者是连在一起的 2 个数,按此选法找到无孤立元素的四元集 A 共 6 个:$\{0,1,2,3\}$,$\{0,1,3,4\}$,$\{0,1,4,5\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{2,3,4,5\}$.

说明　$x\in S$ 时,令 $B=\{x-1,x+1\}$,取 $A=\complement_S B$,满足 $x\in A$,且 $x-1\notin A$,$x+1\notin A$,即 A 含孤立元素 x,这样的 A 有:$\{0,2,3,4,5\}$,$\{1,3,4,5\}$,$\{0,2,4,5\}$,$\{0,1,3,5\}$,$\{0,1,2,4\}$,$\{0,1,2,3,5\}$. 进一步,从$\{0,2,3,4,5\}$中找到含孤立元素的四元集:$\{0,2,3,4\}$,$\{0,2,3,5\}$,$\{0,2,4,5\}$,$\{0,3,4,5\}$;从$\{0,1,2,3,5\}$中找到含孤立元素的四元集:$\{0,1,2,5\}$,$\{0,1,3,5\}$,$\{0,2,3,5\}$,$\{1,2,3,5\}$. 故除去重复集合,含孤立元素的四元子集共有 9 个.

3. (2007·江苏卷)已知全集 $U=\mathbf{Z}$,$A=\{-1,0,1,2\}$,$B=\{x\,|\,x^2=x\}$,则 $A\cap(\complement_U B)$ 为__$\{-1,2\}$__.

提示　$B=\{0,1\}$,在 A 中且不在 B 中的元素组成了集合 $A\cap(\complement_U B)$.

自我测试

1. 满足$\{1,3\}\cup A=\{1,3,4,5\}$的集合 A 的个数是　(D)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

提示　$\{4,5\}\subseteq A\subseteq\{1,3,4,5\}$. 若 A 为二元集,有 1 个;若 A 为三元集,有 2 个;若 A 为四元集,有 1 个. 共 4 个.

2. (2008·陕西卷)已知 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x=2a,a\in A\}$，则集合 $\complement_U(A\cup B)$ 中元素的个数为 (B)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

提示　$A=\{1,2\}$，$B=\{2,4\}$，$A\cup B=\{1,2,4\}$，$\complement_U(A\cup B)=\{3,5\}$，故选 B.

3. 设 P,Q 为两个非空数集，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$，若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是 (B)

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

提示　因 $0+6=5+1$，故所求元素的个数为 $9-1=8$.

4. 集合 $M=\{x|x^2-4x+3\leqslant 0\}$，$N=\{x||x|<3\}$，则 $M\cup N=$ ___$(-3,3]$___.

提示　$M=[1,3]$，$N=(-3,3)$，故 $M\cup N=(-3,3]$.

5. 设集合 $A=\{x|0<x\leqslant 4\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$，全集 $U=\mathbf{R}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$ ___$\{0\}\cup(4,5]$___.

提示　$\complement_U A=(-\infty,0]\cup(4,+\infty)$.

6. 已知 $A=\{x|(2x-1)^2\leqslant 9,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|ax=1\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 a 的取值集合为 ___$\left\{-1,0,\frac{1}{2},1\right\}$___.

提示　又∵ $A=\{x|-3\leqslant 2x-1\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}=\{-1,0,1,2\}$，而 B 至多为单元集，∴ 集合 B 可能的情况有以下 5 种：$B=\varnothing$，$B=\{-1\}$，$B=\{0\}$，$B=\{1\}$，$B=\{2\}$. 除由 $B=\{0\}$ 得无解之外，其它的四种情况可以分别求出 $a=0$，$a=-1$，$a=1$，$a=\frac{1}{2}$. 故所求集合为 $\left\{-1,0,\frac{1}{2},1\right\}$.

说明　集合运算的性质：$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，能够帮助我们求解相关的问题.

7. 已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|x\geqslant m+1$，且 $x\leqslant 2m-1\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围.

解　$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

① 若 $B=\varnothing$，则 $m+1>2m-1$，即 $m<2$，此时总有 $B\subseteq A$.

② 若 $B\neq\varnothing$，则 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\-2\leqslant m+1,\\2m-1\leqslant 5,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m\geqslant 2,\\m\geqslant -3,\\m\leqslant 3,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant 3$.

综合①，②知，m 的取值范围是 $(-\infty,3]$.

说明　在这里，集合 B 有两种情形：①当 $m<2$ 时，$B=\varnothing$；②当 $m\geqslant 2$ 时，$B\neq\varnothing$（并且当 $m=2$ 时，$B=\{3\}$；当 $m>2$ 时，$B=[m+1,2m-1]$）. 如果忽视 $B=\varnothing$ 的情形，仅考虑 $[m+1,2m-1]\subseteq[-2,5]$，那么求出的 m 的取值范围就不完整.

8. 某班期中考试，数学优秀率为 70%，语文优秀率为 75%，试确定两门学科都优秀的百分率至少为多少？

解　设班级人数为 100，则数学优秀的有 70 人，语文优秀的有 75 人，且两门学科中至少有一门优秀的总人数不大于 100. 设 $A=\{$班期中考试中数学优秀的学生$\}$，$B=\{$班期中考试中语文优秀的学生$\}$.

记 $\mathrm{Card}(A)$ 为有限集 A 的元素个数，由 $\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)$，可得 $70+75-\mathrm{Card}(A\cap B)\leqslant 100$，即 $\mathrm{Card}(A\cap B)\geqslant 45$.

故两门学科都优秀的百分率至少为 45%.

说明　集合 $A\cup B$ 可以划分成互不相交的三部分：$A\cap(\complement_U B)$，$A\cap B$，$(\complement_U A)\cap B$.

又因为 $\mathrm{Card}(A\cap(\complement_U B))=\mathrm{Card}A-\mathrm{Card}(A\cap B)$，$\mathrm{Card}((\complement_U A)\cap B)=\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)$，

所以 $\text{Card}(A\cup B)=\text{Card}(A\cap(\complement_U B))+\text{Card}(A\cap B)+\text{Card}((\complement_U A)\cap B)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)$.

这样就证明了本题求解过程中应用的关于集合元素个数的公式.

9. 设函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x-1}$,集合 $A=\{x\mid f(x)<0\}$,$B=\{x\mid f'(x)>0\}$,若 $A\subsetneqq B$,求实数 a 的取值范围.

解 若 $a>1$,则 $A=\{x\mid 1<x<a\}$;若 $a<1$,则 $A=\{x\mid a<x<1\}$;若 $a=1$,则 $A=\varnothing$.

$\because$ $B=\{x\mid f'(x)>0\}$,$f'(x)=\dfrac{a-1}{(x-1)^2}$,$\therefore$ 当 $a>1$ 时,$B=\{x\mid x\neq1\}$;$a\leqslant1$ 时,$B=\varnothing$.

又 $\because$ $A\subsetneqq B$,即 $B\neq\varnothing$,$\therefore$ a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

说明 本题不仅考查了子集的概念,还要能求解相关的不等式与导数,因此是一道小综合题.

10. 设 $f(x)=x^2+px+q$,集合 $A=\{x\mid f(x)=x\}$,$B=\{x\mid f(f(x))=x\}$.

(1) 求证:$A\subseteq B$; (2) 如果 $A=\{-1,3\}$,求 B.

解 (1) 若 $A=\varnothing$,则 $A\subseteq B$ 成立;若 $A\neq\varnothing$,可设 $x_0\in A$,则 $x_0=f(x_0)$,从而 $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$,即 $x_0\in B$,故 $A\subseteq B$.

(2) $A=\{-1,3\}$,即方程 $x^2+px+q=x$ 的两根分别为 -1 和 3,则 $p=-1$,$q=-3$,

所以 $f(x)=x^2-x-3$.解方程 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$,即 $(x^2-x-3)^2-x^2=0$.

得 $x=\pm\sqrt{3}$,或 3,或 -1,即 $B=\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$.

3. 简单的逻辑联结词

基础训练

1. 在命题"函数 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 的定义域为 $x\neq\pm1$"中,逻辑联结词的使用情况是 (B)

A. 使用了逻辑联结词"或" B. 使用了逻辑联结词"且"

C. 使用了逻辑联结词"非" D. 没有使用逻辑联结词"或、且、非"

提示 "$x\neq\pm1$"即为"$x\neq-1$ 且 $x\neq1$".

2. 命题"若 $a>b$,则 $2a>2b$"的否命题是 (C)

A. 若 $a<b$,则 $2a<2b$ B. 若 $2a>2b$,则 $a>b$

C. 若 $a\leqslant b$,则 $2a\leqslant 2b$ D. 若 $2a\geqslant 2b$,则 $a\geqslant b$

提示 $a>b$ 的否定是 $a\leqslant b$.

3. (2008·广东卷)已知命题 p:所有有理数都是实数;命题 q:正数的对数都是负数.则下列命题为真命题的是 (D)

A. $(\neg p)\vee q$ B. $p\wedge q$ C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$ D. $(\neg p)\vee(\neg q)$

提示 $\because$ p 是真命题,$\therefore$ $\neg p$ 为假命题,而 q 是假命题,故 $\neg q$ 为真命题,故选 D.

4. 命题"$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1>1$"的否定是 $\underline{\exists x\in\mathbf{R},x^2+1\leqslant1}$.

5. 一个原命题的逆否命题是"若 $x=1$,则 $x^2-2x<0$",那么该原命题是 $\underline{\text{若 } x^2-2x\geqslant0\text{,则 } x\neq1}$.

6. 设 a,b 为实数,则使 $ab(a-b)<0$ 成立的一个充要条件是 $\underline{\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}}$.

提示 本题答案不惟一，可写出与$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$等价的任一条件.

例题精讲

例 1 已知函数 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数，$a,b\in\mathbf{R}$，命题"若 $a+b\geqslant 0$，则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$"，写出逆命题，判断其真假，并证明你的结论.

解 逆命题为"若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，则 $a+b\geqslant 0$"，是真命题.

反证 假设 $a+b<0$，则 $a<-b$，从而 $f(a)<f(-b)$，同理由 $b<-a$ 得 $f(b)<f(-a)$，从而有 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，与已知矛盾. 假设不成立. 从而 $a+b\geqslant 0$.

说明 上述证明过程，证明了"若 $a+b<0$，则 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$"，它是待证命题的逆否命题.

例 2 求关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实根的充要条件.

解 当 $a=0$ 时，$x=-\frac{1}{2}$符合题意.

当 $a\neq 0$ 时，若方程两根一正一负（没有零根），则$\begin{cases}\Delta=4-4a>0,\\ \frac{1}{a}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<1,\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow a<0$；

若方程两根均负，则$\begin{cases}\Delta=4-4a\geqslant 0,\\ -\frac{2}{a}<0,\\ \frac{1}{a}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\leqslant 1,\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<a\leqslant 1$. 综上所述，所求充要条件是 $a\leqslant 1$.

说明 对"至少有一个负根"进行分类讨论. 由于方程没有零根，故只有两类. 方程两根一正一负$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0,\\ \frac{1}{a}<0.\end{cases}$符号"$\Leftrightarrow$"有时写成"即"，如果写成"则"，应注意反过来验证.

例 3 分别写出由下列命题 p 和 q 构成的命题："p 或 q"，"p 且 q"及"非 p"，并判断其真假.
p：矩形的对角线互相垂直；q：函数 $y=\cos x$ 的图像是中心对称图形.

解 "p 或 q"："矩形的对角线互相垂直或函数 $y=\cos x$ 的图像是中心对称图形"，此为真命题，因为 q 为真.

"p 且 q"：（略）. 此为假命题，因为 p 为假.

"非 p"："存在一个矩形，它的对角线不相互垂直"，此为真命题.

说明 先确定 p 及 q 的真假，再确定"p 或 q"，"p 且 q"，"非 p"的真假. "非 p"与"p 的否命题"两者不同.

例 4 已知命题 p：存在一个实数 x，使 $ax^2+2x+1<0$. 当 $a\in A$ 时，非 p 为真命题，求集合 A.

解 非 p 为真，故"$\forall x\in\mathbf{R},ax^2+2x+1\geqslant 0$"为真$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4-4a\leqslant 0,\end{cases}$即 $a\geqslant 1$.

从而，所求的集合 $A=\{a|a\geqslant 1\}$.

说明 先写出命题 p 的否定"非 p"，再求出 a 的范围.