全国高等教育自学考试

高等数学(工专)自学辅导

周华 编著

全国高等教育自学考试指定教材辅导书

华中科技

全国高等教育自学考试指定教材辅导书

高等数学（工专）自学辅导

限 表

周 华 编著

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(工专)自学辅导/周华　编著
武汉:华中科技大学出版社，　2002 年 11 月
ISBN 7-5609-2711-4

Ⅰ. 高…
Ⅱ. 周…
Ⅲ. 高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料
Ⅳ. O172

高等数学(工专)自学辅导　　周　华　编著

责任编辑:胡　艳　　封面设计:潘　群
责任校对:蔡晓瑚　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　　排:华中科技大学出版社照排室
印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:11　　字数:263 000
版次:2002 年 11 月第 1 版　　印次:2002 年 11 月第 1 次印刷　　印数:1—4 000
ISBN 7-5609-2711-4/O・259　　定价:15.80 元

内容简介

本书紧扣全国高等教育自学考试大纲编写，是与指定教材《高等数学（工专）》，陆庆乐，马知恩主编，高等教育出版社出版）相配套的学习指导书.

全书共分十一章，包括一元微积分，多元微积分，空间解析几何，无穷级数和常微分方程等内容. 每章前几节的内容将自学考试大纲和教材中涉及到的基本内容、基本方法通过一个个类型题的形式归纳了出来，并附有练习题，另外，还专门有一节讲解典型题，对一些有代表性的常见常考的试题进行了详细解析. 这样的体系结构使本书与同类书相比具有显著的特色，有利于考生比较好地掌握有关内容. 书后附有各章节练习题的参考答案以及两套模拟试题.

本书虽然是为自学考试专科有关专业的学生编写的辅导用书，但除了傅里叶级数、矢量、曲线积分和曲面积分以外，基本上包括了自学考试专升本的考试内容；同时，由于本书具有概括精练、论述精辟、通俗易懂的特点，所以，对于自学考试本科专业的学生以及其他类型的大学生，本书也不失为一本很有帮助的学习参考书.

前　言

对高等院校的很多学生来说，高等数学是比较难学的一门课程；对大多数自学考试的考生来说，高等数学更是一门考试较难通过的课程.的确，要想完整地掌握高等数学的理论、解题方法和技巧，以及如何利用高等数学解决实际问题并非易事.但是，要想掌握高等数学的基本内容和基本方法并顺利通过考试却不是做不到的，关键在于如何学习高等数学，如何对待考试.有的考生想找一条捷径，猜题，压题，而不重视基本内容和基本方法的掌握，这样做通常是会失败的.翻开高等数学(专科或本科)的任何一份试题都会发现，考察基本内容和基本方法的题大约占 80%～90%，也就是说，考试的目的主要是为了考察考生是否掌握了高等数学的基本内容和基本方法.因此，只要认真掌握高等数学的基本内容和基本方法，那么通过高等数学的考试就会变得容易了.

学习高等数学可分为三步：第一，高等数学的每一部分内容都有新的概念以及与这些概念有关的结论(性质和定理)，这些都是基本内容，考生要理解和掌握这些概念，熟记这些结论；第二，对于这些概念和结论，通常都会有例题出现，这些例题说明了如何利用这些概念和结论解决问题，也就是给出了一些基本方法，考生要掌握这些方法；第三，要做一定量的习题，通过做题，能够更好地掌握这些基本内容和基本方法.

本书紧扣全国高等教育自学考试大纲和指定教材(《高等数学(工专)》，陆庆乐，马知恩主编，高等教育出版社出版)，围绕着这三个学习步骤编写，每章第一部分是将考试大纲中涉及到的重点内容归纳为类型题，每一节为一个类型，同时配有一定量的与类型题类似的习题供考生练习；第二部分对一些有代表性的常见常考的

习题(即典型例题)进行了详细解析.书后给出了所有章节练习题的参考答案.

在本书编写过程中,得到了我的导师,北京航空航天大学教授、博士生导师韩立岩博士的支持与鼓励.在本书的策划和出版过程中得到了我的同事彭澎副教授的大力帮助.在此谨向他们表示真诚的谢意.

作者从事高等数学教学工作多年,积累了一些教学经验,此书也是这些经验的一个总结.但限于编者的经验与水平,不妥之处在所难免,欢迎读者批评指正.

编　者

2002.2.20

目　录

第6章　定积分

第7章　空间解析几何

第8章　多元函数微分学

第9章　多元函数积分学

第10章　常微分方程

第11章　无穷级数

第1章　函　　数

本章主要讨论如下几个问题：如何判断两个函数是否相等；如何求初等函数的定义域；如何判断函数的奇偶性；如何求一个函数的反函数；如何判断两个函数是否能构成复合函数. 此外，还列举了一些典型例题.

1.1　如何判断两个函数是否相等

确定一个函数的两个要素是定义域和对应关系. 于是，只要两个函数的定义域和对应关系都相同，那么它们就是同一个函数，这与它们的自变量和因变量用什么符号表示无关.

例1　下列各对函数中，哪些是同一函数？哪些不是？

(1) $y=x-1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$；　(2) $y=|x|$ 与 $s=\sqrt{t^2}$；

(3) $v=\sqrt{u}$ 与 $y=2^{\frac{1}{2}\log_2 x}$.

解　(1) $y=x-1$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. 由于定义域不同，所以它们不是同一函数.

(2) $y=|x|$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$s=\sqrt{t^2}$ 的定义域也是 $(-\infty,+\infty)$. 又因 $s=\sqrt{t^2}=|t|$，即当这两个函数的自变量取值相同时，它们对应的函数值也相同. 所以它们是同一函数.

(3) $v=\sqrt{u}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，$y=2^{\frac{1}{2}\log_2 x}$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. 由于定义域不同，所以它们不是同一函数.

练　习　1.1

下列各对函数是否为同一函数？为什么？

（1）$y=x$ 与 $v=\sin(\arcsin u)$；　　（2）$y=\sqrt{4^x}$ 与 $y=2^x$；

（3）$y=2\ln x$ 与 $s=\ln t^2$；　（4）$y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$；

（5）$y=x^{\frac{1}{3}}$ 与 $y=\sqrt[6]{x^2}$；　（6）$y=x$ 与 $v=\lg 10^u$.

1.2　如何求初等函数的定义域

高等数学的主要研究对象是初等函数. 在没有特别注明的情况下，初等函数 $y=f(x)$ 的定义域通常是指使表达式 $f(x)$ 有意义的 x 构成的集合. 对于一个初等函数 $y=f(x)$，确定 x 取哪些值使 $f(x)$ 有意义，取哪些值使 $f(x)$ 无意义，即确定 $y=f(x)$ 的定义域是一个非常重要的问题.

初等函数是由基本初等函数和常数经有限次四则运算及有限次复合运算构成的. 要确定初等函数的定义域，首先应熟悉基本初等函数及其定义域. 下面列出几个基本初等函数的定义域：

（1）幂函数　$y=x^\alpha$（α 是常数）的定义域要看 α 的取值而定. 例如，当 α 小于零时，x 不能为零；当 x 为负数时，不能开偶次方；当 α 为无理数时，x 不能小于零.

（2）指数函数　$y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

（3）对数函数　$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，即零和负数没有对数.

（4）三角函数　$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$；$y=\tan x$ 要求 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$；$y=\cot x$ 要求 $x\neq k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

（5）反三角函数　$y=\arcsin x$ 与 $y=\arccos x$ 的定义域都是

$[-1,1]$；$y=\arctan x$ 与 $y=\text{arccot}\,x$ 的定义域都是$(-\infty,+\infty)$.

例 2 求 $y=\log_2(12-x-x^2)$的定义域.

解 由对数函数的定义域知，x 应满足条件

$$12-x-x^2>0\Rightarrow x^2+x-12<0.$$

解方程 $x^2+x-12=0$，得 $x_1=-4,x_2=3$. 于是二次不等式 $x^2+x-12<0$ 的解为$(-4,3)$. 所以，所求定义域为$(-4,3)$.

例 3 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{(\sin x-\cos x)e^x}{\arcsin x}+\dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{x+5}}$；

(2) $y=\sqrt{\arcsin\ln(x+2)}$.

解 (1) 此函数主要是由基本初等函数经四则运算构成的. 自变量应使其中的每一项都有意义，因此 x 应满足条件

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ 2-x>0\Rightarrow -5<x<2,\text{且 } x\neq 0,\\ x+5>0,\end{cases}$$

所以，所求的定义域为$(-5,0)\cup(0,2)$.

(2) 此函数是一个复合函数，求其定义域时，应从外函数的定义域入手. 显然 x 应满足条件

$$\arcsin\ln(x+2)\geqslant 0,$$

即 $0\leqslant\ln(x+2)\leqslant 1\Rightarrow 1\leqslant x+2\leqslant e\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant e-2$.

所以，所求定义域为$[-1,e-2]$.

例 4 (1) 设 $f(x)$的定义域为$[-4,+\infty)$，求 $f(x^2-5x)$的定义域；

(2) 设 $f(x)$的定义域为$[-1,1]$，求 $f(\lg x)$的定义域.

解 (1) 因为外函数 $f(u)$的定义域为$[-4,+\infty)$，所以 x 应满足条件

$$x^2-5x\geqslant -4\Rightarrow x^2-5x+4\geqslant 0.$$

解方程 $x^2-5x+4=0$ 得 $x_1=1,x_2=4$. 所以不等式 $x^2-5x+4\geqslant 0$ 的解为$(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$. 故所求定义域为$(-\infty,1]\cup$

$[4,+\infty)$.

(2) 因为外函数 $f(u)$ 的定义域为 $[-1,1]$，所以复合函数 $f(\lg x)$ 的自变量 x 应满足条件

$$-1\leqslant \lg x\leqslant 1\Rightarrow \frac{1}{10}\leqslant x\leqslant 10.$$

故所求定义域为 $[\frac{1}{10},10]$.

练 习 1.2

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\ln\ln x$； (2) $y=\arcsin\lg x$；

(3) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$； (4) $y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$；

(5) $y=\sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

2. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,3a]$ $(a>0)$. 求函数 $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.

1.3 如何判断函数的奇偶性

函数奇偶性的判断通常有两种方法，即用性质判断和用定义判断.

1. 用奇偶函数的性质判断函数的奇偶性

用这种方法判断函数的奇偶性时，首先要熟悉基本初等函数的奇偶性，其次应记住如下的结论：

(1) 偶函数之和(差)仍为偶函数；奇函数之和(差)仍为奇函数；偶函数与奇函数之和(差)为非奇非偶函数.

(2) 偶函数的积(商)为偶函数;两个奇函数的积(商)为偶函数;偶函数与奇函数的积(商)为奇函数.

(3) 内函数为偶函数的复合函数为偶函数;内函数为奇函数时,如果外函数为偶函数,则复合函数为偶函数;如果外函数为奇函数,则复合函数为奇函数.

例 5 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\dfrac{(x+\sin x)\arctan x}{(1+x^4)(\sqrt[3]{x}-\sin x)}$; (2) $y=f\left(\dfrac{\sin x\cos^2 x}{x}\right)$;

(3) $y=\sin(x\cos x)$; (4) $y=\cos(\sin^3 x)$.

解 (1) 因为 $x+\sin x$、$\arctan x$ 和 $\sqrt[3]{x}-\sin x$ 都是奇函数,$1+x^4$为偶函数,所以该函数为奇函数.

(2) 因为 x 与 $\sin x$ 为奇函数,$\cos^2 x$ 为偶函数,所以内函数 $\dfrac{\sin x\cos^2 x}{x}$为偶函数,从而该复合函数为偶函数.

(3) 因为内函数 $u=x\cos x$ 与外函数 $y=\sin u$ 都是奇函数,所以复合函数 $y=\sin(x\cos x)$为奇函数.

(4) 因为内函数 $u=\sin^3 x$ 是奇函数,外函数 $y=\cos u$ 是偶函数,所以复合函数 $y=\cos(\sin^3 x)$是偶函数.

2. 用奇偶函数的定义判断函数的奇偶性

用奇偶函数的定义判断函数的奇偶性的方法为:首先,考察 $y=f(x)$的定义域 $D(f)$是否关于原点对称,然后计算 $f(-x)$,并与 $f(x)$比较,对任意 $x\in D(f)$,若 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$是偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$是奇函数.

例 6 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$; (2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) 因为 $f(x)$的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$关于原点对称,且对于任意 $x\in D(f)$,有

$$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^{x}}{1+2^{x}}=-\frac{2^{x}-1}{2^{x}+1}=-f(x).$$

所以，$f(x)$是奇函数.

(2) 因为$f(x)$的定义域$D(f)=(-\infty,+\infty)$关于原点对称，且对于任意$x\in D(f)$，有

$$f(-x)=\ln[(-x)+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$$
$$=\ln\frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).$$

所以，$f(x)$为奇函数.

注 在判断$f(x)$是否为奇函数时，还可以先计算$f(-x)+f(x)$，若$f(-x)+f(x)=0$，则有$f(-x)=-f(x)$. 比如在上例中，由于对于任意$x\in D(f)$，有

$$f(x)+f(-x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$$
$$=\ln[(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)]$$
$$=\ln[(1+x)^2-x^2]=\ln 1=0.$$

于是$f(-x)=-f(x)$，从而$f(x)$为奇函数.

练　习　1.3

1. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\frac{\sin x^3}{x^2\cos x}$；　(2) $y=\tan x+x\cos x-\frac{x^2}{\arcsin x}$；

(3) $y=\sin(x^2+\cos x)$；　(4) $y=\tan(\arcsin\sqrt[3]{x})$；

(5) $y=f(x\arctan x)$；　(6) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$；

(7) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}(a>0,a\neq 1)$；

(8) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}(a>0,a\neq 1)$；　(9) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

2. 设 $f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数. 试判定下列函数的奇偶性.

(1) $f[g(x)]$；　　(2) $f[f(x)]$；　　(3) $g[f(x)]$；

(4) $g[g(x)]$；　　(5) $f\{f[g(x)]\}$；　　(6) $f\{f[f(x)]\}$.

1.4 如何求一个函数的反函数

求 $y=f(x)$的反函数的步骤如下：

(1) 从方程 $y=f(x)$中解出 x，如果解 $x=f^{-1}(y)$唯一确定，则说明 $y=f(x)$存在反函数.

(2) 将 $x=f^{-1}(y)$中的自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，即在 $x=f^{-1}(y)$中交换 x 与 y，得 $y=f(x)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 7　求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；　　(2) $y=1+\ln(x+2)$.

解　(1) 解方程 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$，得

$$\frac{1}{y}=1+2^{-x}\Rightarrow 2^x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow x=\log_2\frac{y}{1-y}.$$

因此，所求反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

(2) 解方程 $y=1+\ln(x+2)$，得

$$\ln(x+2)=y-1\Rightarrow x=e^{y-1}-2.$$

因此，所求反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

例 8　求函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的值域.

解　当 $y=f(x)$具有反函数时，其反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域就是 $y=f(x)$的值域.

由例 7 知，$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$，解不等式$\dfrac{x}{1-x}>0$，得 $0<x<1$，因此，$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$的定义域为(0,1)，从而 $y=$