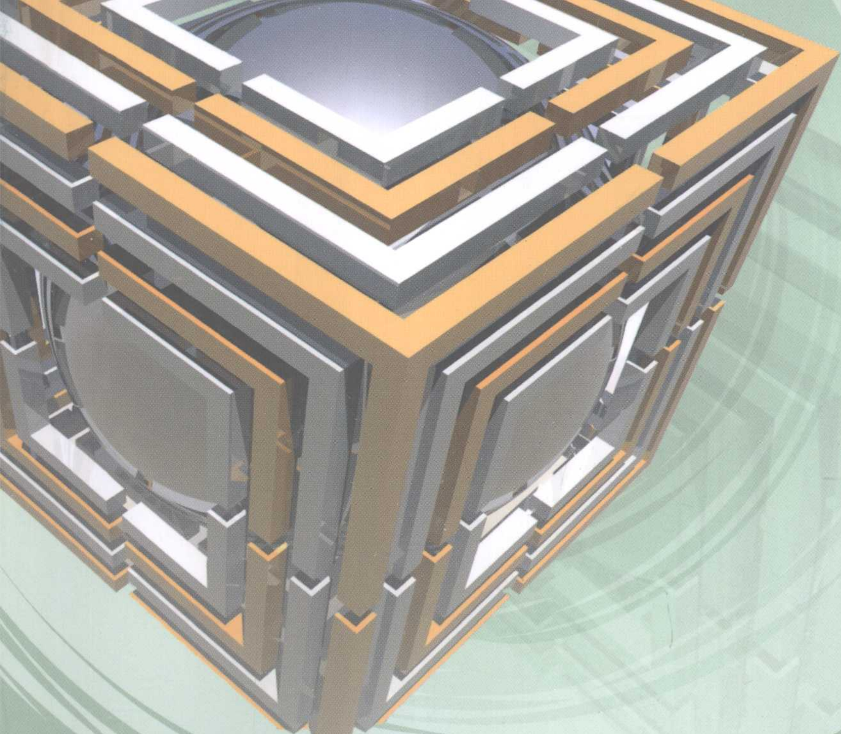

全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

主编　韩志刚
主审　魏文展

高等教育出版社

全国高职高专教育"十一五"规划教材

高等数学

主　编　韩志刚

主　审　魏文展

副主编　刘崇华　白克志　何友萍　吴训青

编　委　韦竹稳　李靖云　李遥华　张德全

　　　　唐干武　黄国敏　覃　英

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》,结合课程改革思路和编者多年教学经验而编写的。

本书的主要内容有函数、极限与连续,微分学及其应用,积分学及其应用,微分方程初步,级数与拉普拉斯变换,线性代数初步,概率与数理统计。书后附有数理统计分布数值表和习题参考答案等。

本书简化知识体系,注意理论联系实际,强调基础内容与专业所需的数学知识相结合,培养学生学习数学的兴趣,同时减少理论证明和繁杂的推导,概念的叙述简单明了,便于初学者理解和接受。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校以及本科院校的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校理工类专业的应用数学教材,也可作为相关技术人员和其他大专类学生的学习参考书和教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/韩志刚主编. —北京:高等教育出版社,2009.8

ISBN 978-7-04-027238-3

Ⅰ.高… Ⅱ.韩… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第098633号

策划编辑	邓雁城	**责任编辑**	李茜	**市场策划**	汪小华	**封面设计**	张楠
责任绘图	吴文信	**版式设计**	余杨	**责任校对**	杨雪莲	**责任印制**	尤静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	人民教育出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　本	787×1092 1/16	**版　次**	2009年8月第1版
印　张	14.25	**印　次**	2009年8月第1次印刷
字　数	350 000	**定　价**	20.60元

物料号　27238-00

前 言

为了适应高职高专教育的改革与发展,满足理工类各专业对数学的基本要求,我们在总结了多年教学实践经验的基础上,编写了这本《高等数学》教材。

本书编写的特点是:

1. 简化体系　本书的基础性知识紧扣高职高专的培养目标,深入贯彻落实"以应用为目的,以必需够用为度"的原则,在知识体系上对相关内容进行整合,注意知识的纵向的联系。在例题及习题的选择上,要使例题与知识点对应、习题与例题对应,便于教学。

2. 实践性强　本书注意理论联系实际,要从实际问题(案例)出发引出概念,同时每章都安排有"数学实训",要求学生应用所学知识设计一个问题,并经过团队研究得到解答,使学生感到"数学有用",从而培养学生学习数学的兴趣。

3. 适应性强　本书的知识是构建在对应专业技术要求的基础上,舍弃与专业学习关系不大的内容,强调基础内容与专业所需的数学知识相结合。

4. 可读性强　针对高职高专人才的需求及目标定位,本书力求在保证科学性的基础上,注意讲清概念,减少理论证明和繁杂的推导,概念的叙述要简单明了、通俗易懂、便于理解、易于接受。

5. 利于转变学生的学习方式和教师的教学方式　转变目前学生总是被动、单一的学习方式,开展数学实训,提倡学生自主实践、探索、合作的学习方式,将数学建模与数学实验融入教学中,让学生成为学习的主人,使学生的主体意识、能动性和创造性不断发展,培养学生的创新意识和实践能力。

6. 本教材每章后都编有自测训练题,力争使学生做到知识迁移延伸,逐层深入,通过学生演练自测题,既能使学生了解自己对所学知识掌握的程度,又培养了学生的求异思维和创新思维能力。

本书共分七章,其主要内容有:函数、极限与连续、微分学及其应用、积分学及其应用、微分方程初步、级数与拉普拉斯变换、线性代数初步和概率与数理统计,设计的教学时间为60学时左右。

本书由韩志刚教授担任主编,由魏文展教授担任主审,第1章由刘崇华编写,第2章由何友萍编写,第3章由白克志编写,第4章由韦竹稳编写,第5章由黄国敏编写,第6章由张德全编写,第7章由李遥华、唐干武编写。

在本书编写过程中,得到了高等教育出版社的热情关怀和指导,在此表示感谢。

由于作者水平有限,不足之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

编　者

2009年5月

目录

第1章
函数、极限与连续

引　言

第1章至第3章介绍微积分，微积分诞生在三百多年以前，它被科学家们誉为人类思维的伟大成果之一.微积分来源于实践，也应用于实践，在自然科学、工程技术，乃至于社会科学中都有着非常重要的应用.

例1　如图1.1，火箭从发射开始升空飞行，在这个过程中，它做的是变速运动，那么怎样定义火箭运动的瞬时速度，又如何计算呢？

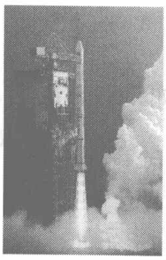

图1.1

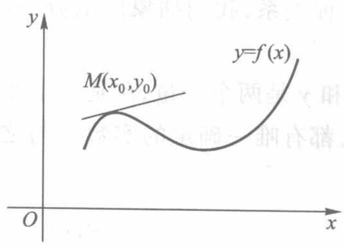

图1.2

例2　如图1.2，要求曲线 $y=f(x)$ 上点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程，怎样定义切线，怎样求切线？

例3　如图1.3，要做一个容量一定的易拉罐，怎样设计易拉罐的尺寸，才能使得用料最省？这是一个最大值与最小值问题.

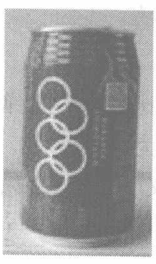

图1.3

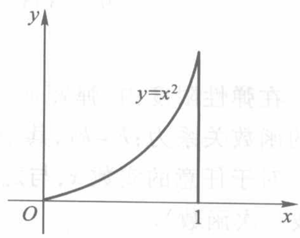

图1.4

例 4 如图 1.4,怎样求抛物线 $y=x^2$,直线 $x=1$ 及 x 轴围成图形的面积?

以上这些问题都可以用微积分来解决. 从历史上讲,这几类问题:瞬时速度问题,切线问题,最大值与最小值问题,面积和体积问题等都是微积分产生的源泉.

高等数学研究的主要对象是函数. 在高等数学中,几乎所有的重要概念都是通过极限来定义的,换句话说高等数学是以极限为工具来研究函数的. 本章我们在中学的基础上学习函数的概念和性质,介绍极限的概念及其运算,讨论函数连续性的概念和连续函数的性质,为学习微积分打下基础.

§1.1 函 数

一、函数的概念

现实世界中,变量的变化不是孤立的,而是两个或多个变量按着一定的法则、遵循一定的规律、保持一定的关系同时变化. 例如,圆的面积 s 和半径 r 按 $s=\pi r^2$ 的法则同时变化;做自由落体运动的物体下落的距离 s 和下落所需要的时间 t 遵循 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的规律同时变化,等等.

从变量之间的这种关系,我们抽象出函数的定义.

1. 函数的概念

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个非空实数集. 如果对于数集 D 中的每一个数 x,按照一定的对应法则 f,都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 y 是定义在数集 D 上的 x 的函数,记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 D 称为函数的定义域,x 称为自变量,y 称为函数(或因变量).

对于确定的 $x_0\in D$,与之对应的 y_0 称为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作

$$y_0=f(x_0)\quad 或\quad y_0=y\Big|_{x=x_0}.$$

当 x 取遍数集 D 中的所有数值时,对应的函数值全体构成的数集

$$M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为该函数的值域.

例 1 胡克定律 在弹性限度内,弹簧伸长量与外力成比例. 设把弹簧拉长 x 米时,所用的力为 F 牛,则 F 与 x 的函数关系为:$F=kx$,其中 k 是常数,称为劲度系数.

例 2 线性函数 对于任意的实数 x,与之对应的 y 定义为 $y=ax+b$,其中 a,b 为实数,这个函数叫做线性函数(或一次函数).

2. 函数的两个要素

函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素. 两个函数,只要它们的定义域和对应法则分

别相同，就称这两个函数为相同的函数，与变量用什么符号表示无关. 例如，$y=x^2$ 与 $s=t^2$ 是相同的函数，而 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 是不同的函数.

自变量的取值范围称为函数的定义域. 给定一个函数，就意味着给定了其定义域，如果所讨论的函数来自某个实际问题，则其定义域必须符合实际意义；如果不考虑所讨论的函数的实际背景，则其定义域应使得它在数学上有意义.

例 3　函数 $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}+\ln(x+2)$ 的定义域由

$$\begin{cases}9-x^2>0,\\ x+2>0\end{cases}$$

确定，为$(-2,3)$.

例 4　立方体的体积 V 是它的边长 x 的函数，表示为 $V=x^3$. 这个函数的定义域是$(0,+\infty)$，而不是$(-\infty,+\infty)$.

3. 函数的表示法

表示函数的方法有公式法、图形法和列表法.

有些函数在其定义域不同的范围内用不同的式子表示，这样的函数叫做分段函数.

例 5　函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是一个分段函数，它在$(-\infty,0)$及$[0,+\infty)$内的表达式不相同，图形也不相同，如图 1.5 所示.

例 6　某种形波如图 1.6 所示，它的函数表达式为

$$y=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

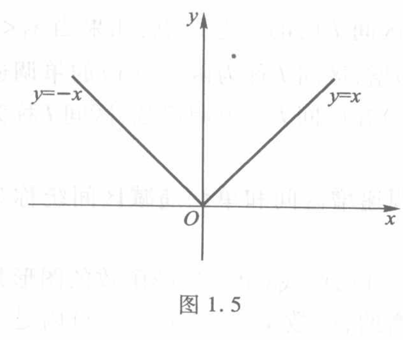

图 1.5

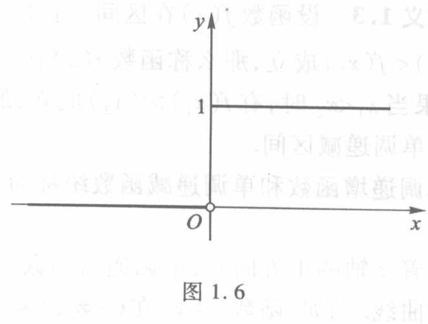

图 1.6

例 7　某地出租车计价标准如表 1.1 所示.

表 1.1

路程	计价标准
2 km 以内	6.6 元
超过 2 km,8 km 以内	1.60 元/km
超过 8 km	2.40 元/km

试建立车费与行驶路程的函数关系,并求行驶路程分别为 6 km、14 km 时,所要支付的车费.

解 设行驶路程为 s km 时,车费为 m 元,则车费与行驶路程的函数关系为

$$m=\begin{cases}6.6, & 0<s\leqslant 2,\\ 6.6+1.6(s-2), & 2<s\leqslant 8,\\ 16.2+2.4(s-8), & s>8,\end{cases}$$

这是一个分段函数.行驶路程分别为 6 km、14 km 时,所要支付的车费分别为

$$m(6)=6.6+1.6(6-2)=13(\text{元}),$$
$$m(14)=16.2+2.4(14-8)=30.6(\text{元}).$$

4. 反函数

定义 1.2 设 $y=f(x)$ 为定义在数集 D 上的 x 的函数,其值域为 M. 若对于数集 M 中的每一个数 y,通过 $y=f(x)$,数集 D 中都有唯一的数 x 与之对应,这就以 M 为定义域确定了一个函数,这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 M,值域为 D.

注:(1) 函数 $x=f^{-1}(y)$ 中,y 表示自变量,x 表示因变量. 但是,习惯上一般用 x 表示自变量,用 y 表示因变量. 因此,将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y 互换,从而将函数 $y=f(x)$ 的反函数表示为 $y=f^{-1}(x)$;

(2) 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数;

(3) 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

二、函数的几种性质

1. 单调性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,x_1,x_2 是区间 I 内的任意两点,如果当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立,那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增,区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调递增区间;如果当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立,那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递减,区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数,单调递增区间和单调递减区间统称为单调区间.

沿着 x 轴的正方向看,单调递增函数的图形是一条上升的曲线;单调递减函数的图形是一条下降的曲线. 例如,函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增的,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的,在 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的,参见图 1.7 和图 1.8.

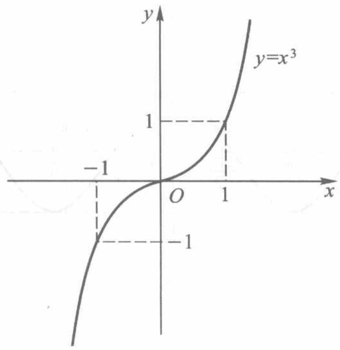

图 1.7

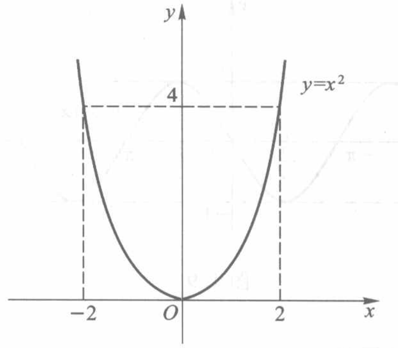

图 1.8

2. 奇偶性

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上有定义，如果对于任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$ 成立，那么称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，那么称 $f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图形关于坐标原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称. 图 1.7 和图 1.8 中的图形分别为奇函数和偶函数.

例 8　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=2x^4+3x^2+1$；　(2) $f(x)=x^3+\cos x$.

解　(1) 函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 对任意的 x，因为

$$f(-x)=2(-x)^4+3(-x)^2+1=2x^4+3x^2+1=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，对任意的 x，有

$$f(-x)=(-x)^3+\cos(-x)=-x^3+\cos x,$$

由于

$$f(-x)\neq -f(x),\qquad f(-x)\neq f(x),$$

所以该函数既不是奇函数，也不是偶函数，称为非奇非偶函数.

3. 周期性

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在不为零的常数 T，使得对于任意的 $x\in I$，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，那么称 $f(x)$ 是周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期.

若 T 是函数的一个周期，则 $\pm 2T,\pm 3T,\cdots$ 也都是它的周期. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

周期为 T 的周期函数，在长度为 T 的各个区间上，函数的图形有相同的形状.

例如，正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$ 的周期都是 2π，如图 1.9、图 1.10 所示.

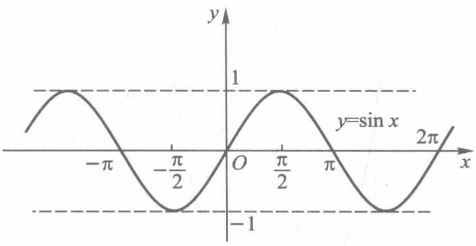

图 1.9

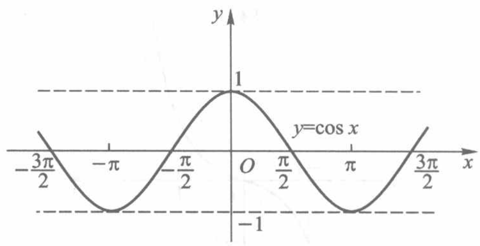

图 1.10

4. 有界性

定义 1.6　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，使得对于任意的 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数；否则称 $f(x)$ 是无界函数.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的.

三、初等函数

1. 基本初等函数

以下六类函数统称为基本初等函数.

(1) 常量函数 $y=C$（C 为常数），定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{C\}$.

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为常数），定义域和值域与 α 的取值有关.

(3) 指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，a 为常数），定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,+\infty)$，当 $0<a<1$ 时单调递减，当 $a>1$ 时单调递增，在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的，图形如图 1.11 所示.

(4) 对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，a 为常数），定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，当 $0<a<1$ 时单调递减，当 $a>1$ 时单调递增，在 $(0,+\infty)$ 内是无界的，图形如图 1.12 所示.

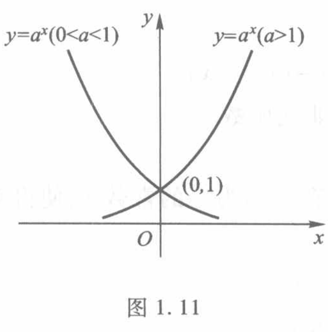

图 1.11

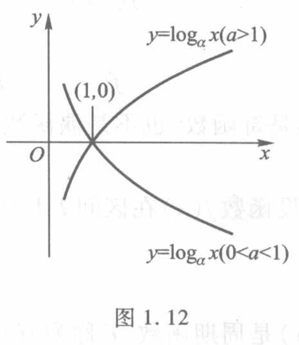

图 1.12

$y=\log_{10}x=\lg x$ 称为常用对数，$y=\log_e x=\ln x$ 称为自然对数，其中 e 是一个无理数，e = 2.718 28⋯.

(5) 三角函数

① 正弦函数 $y=\sin x$，定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[-1,1]$，是奇函数，周期为 2π，在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，图形如图 1.9 所示.

② 余弦函数 $y=\cos x$,定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$[-1,1]$,是偶函数,周期为2π,在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,图形如图 1.10 所示.

③ 正切函数 $y=\tan x$,定义域是$\left\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\right\}$($\mathbf{Z}$ 是整数集,下同),值域是$(-\infty,+\infty)$,是奇函数,周期为 π,是无界函数,图形如图 1.13 所示.

④ 余切函数 $y=\cot x$,定义域是$\{x \mid x\neq k\pi,k\in \mathbf{Z}\}$,值域是$(-\infty,+\infty)$,是奇函数,周期为 π,是无界函数,图形如图 1.14 所示.

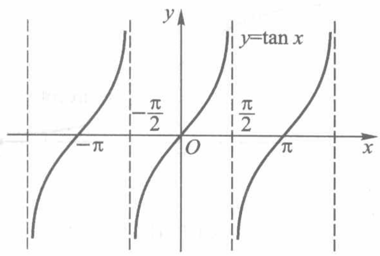

图 1.13

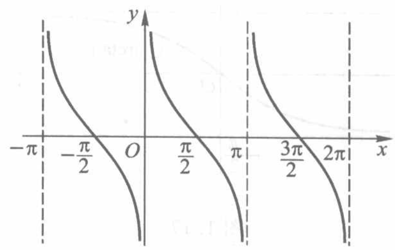

图 1.14

⑤ 正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$,定义域是$\left\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\right\}$,值域是$[1,+\infty)$,是无界函数.

⑥ 余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$,定义域是$\{x \mid x\neq k\pi,k\in \mathbf{Z}\}$,值域是$[1,+\infty)$,是无界函数.

(6) 反三角函数

① 正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数称为反正弦函数,记为 $y=\arcsin x$,定义域是$[-1,1]$,值域是$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,图形如图 1.15 所示.

② 余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上的反函数称为反余弦函数,记为 $y=\arccos x$,定义域是$[-1,1]$,值域是$[0,\pi]$,图形如图 1.16 所示.

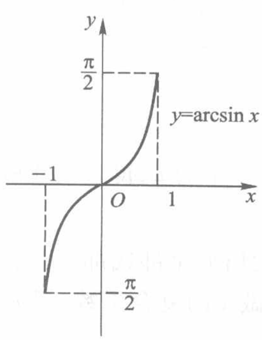

图 1.15

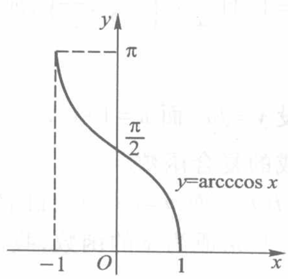

图 1.16

③ 正切函数 $y=\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数称为反正切函数，记为 $y=\arctan x$，定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，图形如图 1.17 所示.

④ 余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$上的反函数称为反余切函数，记为 $y=\text{acr cot } x$，它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$(0,\pi)$，图形如图 1.18 所示.

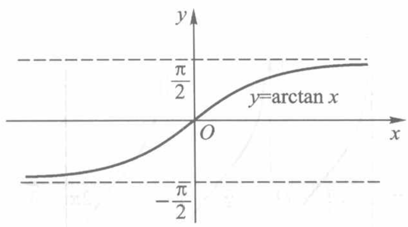

图 1.17

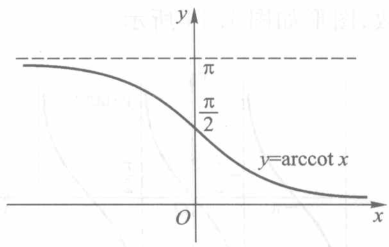

图 1.18

反正弦函数和反正切函数都是奇函数，即

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x, x\in[-1,1];$$
$$\arctan(-x)=-\arctan x, x\in(-\infty,\infty).$$

例 9　求下列反三角函数值：

(1) $\arcsin\frac{1}{2}$；　　(2) $\arccos 0$；

(3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；　　(4) $\arctan 1$.

解　(1) 因为 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，且$\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$；

(3) 因为 $\cos\frac{\pi}{2}=0$，且$\frac{\pi}{2}\in[0,\pi]$，所以 $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$；

(3) 因为 $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，且$\frac{3\pi}{4}\in[0,\pi]$，所以 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$；

(4) 因为 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，且$\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

2. 复合函数

先看一个例子，设 $y=\sqrt{u}$，而 $u=1+x^2$，以 $1+x^2$ 代替$\sqrt{u}$中的 u，得 $y=\sqrt{1+x^2}$，我们称它为由 $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$ 复合而成的复合函数.

定义 1.7　设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$的值域全部或部分包含在函数 $f(u)$的定义域内，那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数，我们把 y 叫做 x 的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

复合函数本质上就是一个函数. 为了研究函数的需要，今后经常需要将一个复合函数分解成若干个基本初等函数或简单函数.

例 10 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=e^{\sqrt{x}}$；　(2) $y=(2x+3)^2$；

(3) $y=2\sin\sqrt{1-x^2}$；　(4) $y=\ln(\arcsin 2x)$.

解 采用"由外往里，逐层分解"的方法，可得：

(1) $y=e^{\sqrt{x}}$ 由 $y=e^u, u=\sqrt{x}$ 复合而成；

(2) $y=(2x+3)^2$ 由 $y=u^2, u=2x+3$ 复合而成；

(3) $y=2\sin\sqrt{1-x^2}$ 由 $y=2\sin u, u=\sqrt{v}, v=1-x^2$ 复合而成；

(4) $y=\ln(\arcsin 2x)$ 由 $y=\ln u, u=\arcsin v, v=2x$ 复合而成.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的，并且能用一个式子表示的函数，叫做初等函数.

本书研究的函数，主要为初等函数.

习　题　1.1

1. 下列各题中所给的函数是否相同？为什么？

(1) $y=\frac{x}{x}$ 与 $y=1$；　(2) $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$；

(3) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；　(4) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x^2-1}$；　(2) $y=\sqrt{1-\ln x}$.

3. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x-\sin x$；　(2) $f(x)=x^2+\cos x$；

(3) $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$；　(4) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

4. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=(5x-3)^{10}$；　(2) $y=e^{-x}$；

(3) $y=\sin 2x$；　(4) $y=\sin^2 x$；

(5) $y=\sqrt{x^2-1}$；　(6) $y=\arctan(x^2+1)$；

(7) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$；　(8) $y=\ln\tan\frac{1}{x}$.

5. 求下列反三角函数的值：

(1) $\arcsin 1$；　(2) $\arcsin 0$；　(3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$；

(4) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$；　(5) $\arctan 0$；　(6) $\arctan(-1)$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 0\leqslant x<1, \\ 0, & x=1, \\ 1-x, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 求 $f(0), f(1), f\left(\frac{5}{4}\right)$.

7. 火车站收取行李费规定如下,当行李不超过 50 kg 时,按基本运费计算,每千克收费 0.15 元;当超过 50 kg 时,超重部分按每千克 0.25 元收费. 求:

(1) 运费与重量之间的函数关系,并指出定义域;

(2) 作出函数的图形;

(3) 当行李重量分别是 30 kg、50 kg、75 kg 时,相应的运费分别是多少?

8. 某种周期齿形波的图形如图 1.19 所示,试建立一周期内函数的表达式.

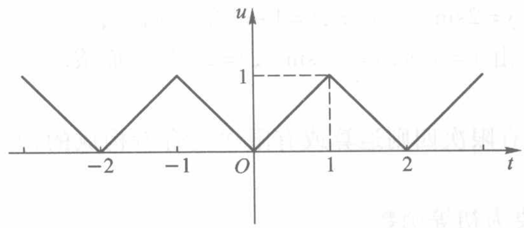

图 1.19

§ 1.2　极限及其运算

一、数列的极限

例 1　当 n 无限增大时,考察数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$: $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$ 的变化趋势.

如表 1.2 所示,从数值上看,当 n 无限增大时,数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 的通项 $y_n=\frac{n}{n+1}$ 无限趋近于 1.

表 1.2

n	1	9	99	999	9999	99999	…	$\to\infty$
$\frac{n}{n+1}$	0.5	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	…	$\to 1$

如图 1.20,从几何上看,随着 n 无限增大,表示数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 的通项 $y_n=\frac{n}{n+1}$ 的点无限接近于点 1.

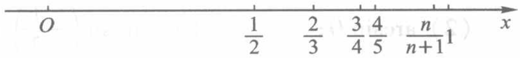

图 1.20

定义 1.8　如果当 n 无限增大时,数列 x_n 无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 为数列 x_n 的极限. 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A\text{（或当 } n\to\infty \text{ 时，} x_n\to A\text{）}.$$

例 2 下列数列当 $n\to\infty$ 时的极限是否存在？若存在，写出其极限.

（1）$x_n=\dfrac{1}{n}$；（2）$x_n=(-1)^n n$；（3）$x_n=(-1)^n$；（4）$x_n=C$（C 为常数）.

解 观察数列当 $n\to\infty$ 时的变化趋势，可得

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n$ 不存在；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$.

例 3 刘徽的割圆术.

为了求得单位圆的面积即圆周率 π，人们用圆内接正 n 边形的面积 $A_n(n\geqslant 3)$ 去逼近它，以 A_n 作为 π 的近似值. 随着 n 的增大，人们不断地改进 π 的近似值的精确程度，在此过程中，逐渐产生了朴素的极限概念. 公元三世纪，我国数学家刘徽在《九章算术》中解释他的“割圆术”的时候说：“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”. 这就是说，只要取 n 充分大，用 A_n 逼近 π 的误差可以任意小，A_n 的极限就是 π，即 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\pi$. 刘徽按照这个想法，从圆内接正六边形的面积算到圆内接正一百九十二边形的面积，得出圆周率 π 的近似值为 3.14. 大约两个世纪以后，祖冲之又算出 π 介于 3.141 592 6 和 3.141 592 7 之间. 这是我国古代数学的光辉成就之一.

二、函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

“$x\to\infty$”表示 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大，x 既可取正值也可取负值. 若 x 取正值且无限增大，记作 $x\to+\infty$；若 x 取负值且其绝对值 $|x|$ 无限增大，记作 $x\to-\infty$.

例 4 讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.

解 如表 1.3 所示，从数值上看，当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的值无限趋近于常数 0.

表 1.3

x	±10	±100	±1000	±10000	±100000	…	$\to\infty$
$\dfrac{1}{x}$	±0.1	±0.01	±0.001	±0.0001	±0.00001	…	$\to0$

如图 1.21，从几何上看，当 $x\to\infty$ 时，表示函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的点无限趋近于 x 轴.

定义 1.9 如果当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向于无穷大时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad\text{（或当 } x\to\infty \text{ 时，}\ f(x)\to A\text{）}.$$