



教育部高职高专规划教材

高等几何学习指导

► 阎保平 高巧琴 雒志江 主编



化学工业出版社

教材出版中心

教育部高职高专规划教材

高等几何学习指导

阎保平 高巧琴 雒志江 主编



化学工业出版社
教材出版中心

· 北京 ·

(京) 新登字 039 号

图书在版编目(CIP)数据

高等几何学习指导/阎保平, 高巧琴, 雒志江主编. —北京: 化学工业出版社, 2005. 6
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5025-7297-X

I. 高… II. ①阎…②高…③雒… III. 高等几何-高等学校: 技术学院-教学参考资料 IV. 018

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 065667 号

教育部高职高专规划教材
高等几何学习指导
阎保平 高巧琴 雒志江 主编
责任编辑: 张双进 程树珍
责任校对: 宋 蕊
封面设计: 于 宾

*

化学工业出版社 出版发行
教材出版中心
(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)
购书咨询: (010) 64982530
(010) 64918013
购书传真: (010) 64982630
<http://www.cip.com.cn>

*

新华书店北京发行所经销
北京红光印刷厂印装
开本 850mm×1168mm 1/32 印张 9 字数 251 千字
2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-7297-X
定 价: 16.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分。改革开放以来,在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下,各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此,1999年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种,用5年左右时间完成。这500种教材中,专门课(专业基础课、专业理论与专业能力课)教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求,在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上,充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位,调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础,突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下,专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用2~3年的时间,在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验,解决新形势下高职高专教育教材的有无问题;然后再用2~3年的时间,在《新世纪高职高专教育人

人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001年4月3日

前 言

高等几何是师范院校数学专业的基础课程之一。本课程在学生具备初等几何、解析几何与高等代数知识的基础上，系统地学习射影几何的基本知识，使他们能用变换群的观点来看待几何学，加深对几何学和几何空间概念的理解，并初步了解几何发展简史、欧氏第五公设问题和近代公理法的产生及希尔伯特公理体系。

我们编写本书作为朱德祥老先生编著的《高等几何》课程的配套参考用书，以高等师范学校数学教育专业毕业生应当具备的几何学的知识、能力和综合素质等基本要求为依据，以发展学生的空间概念，正确处理初等几何、解析几何的一些问题，以便深入掌握中学几何教材为目的。

本书特别注意对概念以及解题方法的分析，注意联系初等几何知识和中学教学实际。因此，在本书的各章中专门设立了“基本内容”、“基本概念”和“典型例题”，“习题解答”、“综合练习题”等五个模块，目的是帮助读者深入理解基本概念，进一步提高读者的解题能力和综合运用能力，同时精选了一些初等几何方面的例子，尽量让读者把高等几何和初等几何、中学教学实际紧密联系在一起。

全书共分九章，各章的作者为：阎保平任主编并编写第一章、第五章和第九章；高巧琴任主编并编写第二章和第八章；雒志江任主编并编写第四章和第七章；阎明编写第六章；陈月娥编写第三章，各章习题由各章的作者编写完成。

本书适合各类高等师范院校、教育学校以及高等师范专科学校数学系学生使用，也可作为自学考试、高师函授以及中学数学教师的学习参考用书。

由于水平和时间的限制，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

最后，对本书在编写和出版的过程中给予帮助的同志表示衷心的感谢。

作者
2005.5

内 容 提 要

本书主要参照《高等几何》（朱德祥，高等教育出版社，1983年）编写而成，编写过程中作者结合师范专科学校多年教学实践，对每章进行了基本内容、基本概念、典型例题及习题解答，并附有相应的综合习题和解答。

全书共分九章，分别为：仿射几何学的基本概念，欧氏平面的拓广，一维射影几何学，代沙格定理、四点形与四线形，射影坐标系和射影变换，二次曲线的射影性质，二次曲线的仿射性质，二次曲线的度量性质，几何基础简介。

本书可作为师范院校数学专业本科和专科学生的教学参考书，也可作为高师函授及中学数学教师的学习参考用书。

目 录

射影几何学

第一章 仿射几何学的基本概念	3
第一节 基本内容	3
一、仿射变换	3
二、图形的仿射性质	4
第二节 基本概念	5
一、透视仿射	5
二、仿射不变性、仿射不变量和仿射图形	6
三、仿射坐标系	7
四、仿射变换的代数表示及求法	9
第三节 典型例题	10
一、简比	10
二、仿射变换的运用及求法	12
第四节 习题解答	16
综合练习题	22
第二章 欧氏平面的拓广	25
第一节 基本内容	25
一、中心投影（透视）与无穷远元素（理想元素）	25
二、齐次坐标	28
三、对偶原理	29
四、复元素	31
第二节 基本概念	31
一、无穷远元素	31
二、射影直线与欧氏直线、射影平面与欧氏平面的区别	34
三、图形的射影性质	35
四、齐次坐标	36
五、对偶原理	39

第三节 典型例题	42
一、中心投影的运用	42
二、齐次坐标及运用	44
三、对偶原理的运用	46
四、复元素	47
第四节 习题解答	48
综合练习题	51
第三章 一维射影几何学	54
第一节 基本内容	54
一、点列、线束与交比	54
二、一维射影对应	57
三、透视对应	59
四、对合对应	60
第二节 基本概念	61
一、交比	61
二、一维基本图形	66
第三节 典型例题	68
一、交比	68
二、利用交比解决有关初等问题	71
三、求射影对应的表达式	79
第四节 习题解答	83
综合练习题	93
第四章 代沙格定理、四点形与四线形	95
第一节 基本内容	95
一、代沙格三角形定理	95
二、完全四点(角)形与完全四线(边)形	96
第二节 基本概念	97
一、代沙格定理	97
二、完全四点形	98
三、对完全四点形和完全四线形调和性的证明	99
第三节 典型例题	101
一、代沙格定理的运用	101
二、完全四点形与完全四线形调和性的运用	105
第四节 习题解答	109
综合练习题	113

第五章 射影坐标系和射影变换	114
第一节 基本内容	114
一、射影坐标系	114
二、射影变换	117
三、变换群与几何学	119
第二节 基本概念	121
一、“射影坐标系”的引入	121
二、射影变换	122
三、关于射影、仿射和欧氏三种几何的比较	126
第三节 典型例题	127
一、射影坐标的运用	127
二、射影变换表达式的求法	128
三、射影变换二重元素的求法	133
四、变换群与几何学	134
第四节 习题解答	137
综合练习题	147
第六章 二次曲线的射影性质	149
第一节 基本内容	149
一、二次曲线的射影定义	149
二、二阶曲线与二级曲线的关系	151
三、二阶曲线与直线的相关位置	154
四、极点与极线、配极对应	155
五、二阶曲线的射影分类	159
第二节 基本概念	160
一、二次曲线的射影定义及性质	160
二、二阶曲线与二级曲线的关系	164
三、“极点”与“极线”、“配极对应”	166
四、“二次曲线的射影分类”的几点说明	168
第三节 典型例题	169
一、二次曲线的射影定义	169
二、巴斯卡定理和布利安双定理的运用	172
三、极点与极线、配极对应	174
四、二次曲线的射影分类	179
第四节 习题解答	181
综合练习题	191

第七章 二次曲线的仿射性质	193
第一节 基本内容	193
一、二次曲线的中心、直径和渐近线	193
二、二次曲线的仿射分类	196
第二节 基本概念	199
一、二次曲线	199
二、二次曲线的仿射分类	204
第三节 典型例题	205
一、二次曲线的中心、直径和渐近线	205
二、仿射理论在解析几何上的运用	209
三、二次曲线的仿射分类的运用	213
第四节 习题解答	215
综合练习题	218
第八章 二次曲线的度量性质	220
第一节 基本内容	220
一、圆点和迷向直线	220
二、二次曲线的主轴、焦点与准线	221
第二节 基本概念	222
一、“圆点”的由来及注意事项	222
二、迷向直线与拉格儿定理	223
三、常见二次曲线	224
第三节 典型例题	228
第四节 习题解答	232
综合练习题	234

几何基础

第九章 几何基础简介	239
第一节 基本内容提要	239
一、几何公理法的产生和发展	239
二、几何与理法的公理体系	243
第二节 习题解答	248
综合练习题答案、提示与解答	256
参考资料	270

射影几何学

第一章 仿射几何学的基本概念

本章知识是从欧氏几何过渡到射影几何的桥梁，它是在欧氏几何的基础上，由透视仿射建立了仿射变换，并导出了透视仿射的不变性（同素性、结合性、平行性）、不变量（简比）和仿射变换的代数表示以及图形的仿射不变性等重要内容。

第一节 基本内容

一、仿射变换

1. 二平面间的透视仿射

定义 1.1 设有相交二平面 π 与 π' ，它们的交线为 g ，直线 l 与平面 π 和 π' 都不平行（如图 1-1 所示），通过平面 π 内的各点 $A, B, C, \dots$ 分别作 l 的平行线交平面 π' 于 $A', B', C', \dots$ ，这样便使平面 π 内的点与平面 π' 内的点建立了一一对应，这种对应称为平面 π 到 π' 的透视仿射或平行射影。

记为 T ，则 $A' = T(A), \dots$

透视仿射的基本性质如下：

- ① g 上的每个点都是二重点。
- ② 保持同素性，即在这种对应下几何元素保持同一种类而不改变。
- ③ 保持结合性，即一条直线上的每个点总对应着它的对应直线上的一个点。
- ④ 在透视仿射里，保持简比不变，即一个平面内共线三点的简比等于另一个平面内三个对应点的简比。

2. 简比（单比、仿射比）

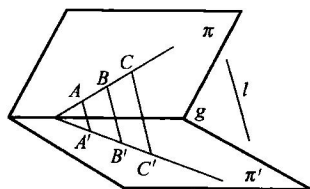


图 1-1

定义 1.2 设 A, B, C 为共线的三点, 这三点的简比 (ABC) 定义为下述有向线段的比:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC}.$$

C 在线段 AB 上时, 简比 $(ABC) < 0$; 在 AB 的延长线上时, $(ABC) > 0$; C 与 A 重合时, $(ABC) = 0$; C 是 AB 中点时, $(ABC) = -1$.

3. 仿射变换

定义 1.3 设有 n 个平面 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$, 用 $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ 顺次表示 π_1 到 π_2, π_2 到 $\pi_3, \dots, \pi_{n-1}$ 到 π_n 的透视仿射, 经过这一串透视仿射, π_1 上的点和 π_n 上的点一一对应, 称为平面 π_1 到平面 π_n 的仿射或仿射变换. 即有限回透视仿射的乘积为一个仿射. 记为 $T: T = T_{n-1} \cdots T_2 T_1$.

特别注意, 若 T_1, T_2 顺次表示 π_1 到 π_2, π_2 到 π_1 的透视仿射, 则 $T = T_2 T_1$ 就是平面 π_1 到自身的透视仿射.

仿射变换的性质如下:

- ① 保持同素性;
- ② 保持结合性;
- ③ 保持简比不变;
- ④ 保持平行性.

4. 仿射变换的等价定义

定义 1.4 如果平面 π_1 与平面 π_n 重合, 则 π_1 到 π_n 的仿射变换叫做平面 π_1 到自身的仿射变换.

定义 1.5 平面内的点之间的一一变换如果满足以下条件:

- ① 任何共线点的象仍是共线点;
- ② 任何共线三点的简比不变.

则此一一变换叫做平面内的仿射变换.

5. 仿射坐标系

笛氏坐标系在仿射对应之下的象叫做仿射坐标系.

二、图形的仿射性质

定理 1.1 二直线间的平行性是仿射不变性.

推论 平行四边形是仿射不变图形.

定理 1.2 两平行线段之比是仿射不变量。

定理 1.3 一直线上二线段之比是仿射不变量。

定理 1.4 在仿射变换下，任何一对对应三角形面积之比等于常数。换句话说，任意两个三角形面积之比是仿射不变量。

推论 1 在仿射变换下，任何一对对应多边形面积之比等于常数。换句话说，任意两个多边形面积之比是仿射不变量。

推论 2 在仿射变换下，任意两个封闭图形的面积之比是仿射不变量。

定理 1.5 平面内的透视仿射由对称轴与其外一对对应点完全确定。

定理 1.6 设 P_1, P_2, P_3 是平面内不共线的任意三点， P'_1, P'_2, P'_3 也是不共线的任意三点。那么存在一个也只有一个仿射变换 T ，使 $T(P_i) = P'_i (i=1, 2, 3)$ 。换句话说，三对对应点（原象不共线，映象也不共线）决定惟一仿射变换。

设仿射变换把点 $P(x, y)$ 变为点 $P'(x', y')$ ，则其仿射变换的代数表示式为

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

第二节 基本概念

一、透视仿射

二平面间的透视仿射是指已知两个相交（或平行）的平面和一个射影方向，利用这个方向经过平行投影，建立两平面间点的一一对应，这种一一对应由所给的射影方向就可以惟一确定。两平面的交线上的每个点都是自对应点（二重点）。

类似地，同一平面内二直线间的透视仿射定义如下。

如图 1-2 所示，设平面 π 内有一直线 l ，和平面 π 内另二条直线 m 和 m' 都不平行，若通过直线 m 上的点 $A, B, C, \dots$ 作直线 $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \dots \parallel l$ ，交直线 m' 于 $A', B', C', \dots$ ，这样使 m 上的点与 m' 上的点建立了一一对应关系，这种对应叫做同一平面内直线 m 到直线 m' 的透视仿射。显然，透视仿射与 l 的方向有

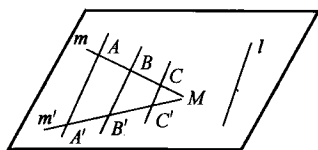


图 1-2

关. 两直线的交点 (图 1-2 中的 M 点) 为自对应点.

仿射对应与透视仿射性质如下.

① 透视仿射的对应点连线互相平行, 而在一般情况下, 仿射对应的对应点连线不一定平行. 在什么

情况下可以使对应点的连线平行. 容易证明, 如果 n 个平面 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ 相互平行或共线, 那么 π_1 到 π_n 之间的对应是透视仿射, 对应点连线平行.

② 二平面间透视仿射, 当两平面相交时, 其交线为自对应轴, 也就是说, 交线上每个点都是自对应点. 而二平面间仿射一般没有自对应轴.

理解“简比 (仿射比)”概念的注意事项如下.

① 共线的三点才能有简比, 不共线的三点不能有简比.

② 共线三点 A, B, C 的简比 (ABC) 实际上是有向线段 AC 与 BC 的代数长度之比, 即 $\frac{AC}{BC}$, 所以简比与这三个字母所在的位置有关. 简比可以有正、负和零之分.

③ 在解析几何中, 对于共线三点 A, B, C 有定比分点问题, 其中的定比 λ 与这里的简比概念是不同的. 简比为 $(ABC) = \frac{AC}{BC}$.

在解析几何中, 定比 $\lambda = \frac{AC}{CB}$, 所以简比 (ABC) 等于点 C 分割线段 AB 的分割比 λ 的相反数.

二、仿射不变性、仿射不变量和仿射图形

由于仿射几何是研究仿射不变性与不变量的学科, 所以必须搞清“仿射不变性”、“仿射不变量”、“仿射性”、“仿射量”、“仿射图形”等概念的含义.

① “仿射不变性”与“仿射性”的含义相同, 它们都是指图形经过仿射变换后不改变的性质. 最基本的仿射不变性:

同素性——在仿射变换下, 点对应点, 直线对应直线;

结合性——若一个点 A 在直线 l 上, 则在仿射变换下, A 的对