中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

微積分學教程

第二卷 第一分册

Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ 著
北京大學高等數學教研組譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

微積分學教程

第二卷 第一分册

Г. М. 菲赫金哥爾茨著
北京大學高等數學教研組譯

商務印書館

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的菲赫金哥爾茨（Г. М. Фихтенгольц）所著“微積分學教程”（Курс дефференциального и интегрального исчисления）第二卷 1951 年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲大學數學系學生及研究生用教科書。

本書共分三卷，第一卷由同濟大學楊弢亮、南京大學葉彥謙合譯，第二卷由北京大學高等數學教研組集體翻譯，第三卷由武漢大學路見可等譯。

此爲第二卷第一分册的中譯本。內容包括：原函數（不定積分）、定積分以及積分學在幾何學、力學與物理學中的應用三部分。

微 積 分 學 教 程

第二卷　第一分册

北京大學高等數學教研組譯

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

新　華　書　店　總經售

商務印書館北京廠　印　刷

（52280B1）

1954 年 2 月初版　版面字數 230,000

印數 1—7,000　定價 ¥13,500

第一分册目錄

第八章　原函數(不定積分)

第九章 定積分

第十章 積分學在幾何學、力學與物理學中的應用

微積分學教程

第八章　原函數(不定積分)

§1　不定積分與它的計算的最簡單方法

251. 原函數(即不定積分)的概念　在許多科學與技術的問題中，我們所需要的不是由給定的函數求它的微商，相反地，是要由一個函數的已知微商還原出這個函數。在第91目中，假定已知運動的方程 $s=$ $=s(t)$，即是，路程隨時間的變化而變化的規律，我們用微分法先得出了速度 $v=\frac{ds}{dt}$，然後找出加速度 $a=\frac{dv}{dt}$。但實際上，時常需要解決反面的問題：已給定加速度 a 是時間 t 的函數，$a=a(t)$，要求確定速度 v 與所通過的路程 s 依賴於 t 的關係。這樣，就需要由函數 $a=a(t)$ 還原出一個函數 $v=v(t)$，它的微商就是 a，然後，知道了函數 v，再求一個函數 $s=s(t)$，而它的微商也就是 v。

我們給下面的定義：

如果在給定的整個區間上，$f(x)$ 是函數 $F(x)$ 的微商，或 $f(x)dx$ 是 $F(x)$ 的微分

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } dF(x)=f(x)dx^*,$$

那麽，在所給定的區間上，函數 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的原函數或 $f(x)$ 的積分。

求一個函數的所有的原函數，叫做求積分，這是積分學的問題之一；可以看出，這個問題是微分學的基本問題的反面。

* 在這情形下也可說函數 $F(x)$ 是微分表達式 $f(x)dx$ 的原函數(或積分)。

定理 如果在某一個區間$\mathscr{X}$(有窮的或無窮的,閉的或非閉的)上,函數$F(x)$是$f(x)$的一個原函數,那麽,函數$F(x)+C$也是$f(x)$的一個原函數,其中C是任意常數。相反地,在這區間上$f(x)$的每一個原函數可表示成這種形式。

證明只要限於$\mathscr{X}$是有窮區間$[a, b]$的情形就够了。

$F(x)$與$F(x)+C$同是$f(x)$的原函數,這個情形是十分明顯的,因爲$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$。

現在設$\Phi(x)$是函數$f(x)$的任何一個原函數,於是在區間$[a,b]$上

$$\Phi'(x)=f(x).$$

因爲函數$F(x)$與$\Phi(x)$在所考慮的區間上有相同的微商,所以它們只相差一個常數[126,系理]:

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

這就是所要證明的。

由定理推知,爲要知道給定函數$f(x)$的所有的原函數,只要求出它的一個原函數$F(x)$就够了,因爲它們彼此之間只差一個常數項。

由此,表達式$F(x)+C$是微商爲$f(x)$或微分爲$f(x)dx$的函數的一般形狀,其中C是任意常數。這個表達式稱爲$f(x)$的*不定積分*,用

$$\int f(x)dx$$

來表示,這個記號中已暗含有任意常數。乘積$f(x)dx$稱爲*被積表達式*,函數$f(x)$稱爲*被積函數*。

例題 設$f(x)=x^2$;不難看出,這個函數的不定積分是

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

這很容易用反面的演算——微分法——來驗證。

我們提醒讀者注意,在"積分"記號$\int$下寫的是所要求原函數的*微分*,而不是*微商*(在我們的例題裏是x^2dx,而不是x^2)。以後在[282]中將要闡明,這樣的記法是有歷史根據的;而且它還表現着許多優點,因

而它的保存是十分合理的。

從不定積分的定義可直接推出下列的一些性質:

1. $d\int f(x)dx=f(x)dx$,

即是,符號 d 與 $\int$,當前者位於後者的前面時,可互相消去。

2. 因爲 $F(x)$ 是函數 $F'(x)$ 的一個原函數,我們有

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,$$

這式子可以改寫爲

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

由此可見,在 $F(x)$ 前面的符號 d 與 $\int$,當 d 在 $\int$ 後面的時候,也可把它們消去,但必須在 $F(x)$ 後加上一個任意常數。

回到我們一開始就提出來的那個力學問題上,現在我們可以寫

$$v=\int a(t)dt$$

與

$$s=\int v(t)dt.$$

爲了明確起見,假定我們要討論的運動是等加速運動,例如,在重力作用下的運動;這時 $a=g$ (沿鉛垂線向下的方向爲正方向),並且,不難了解

$$v=\int g\,dt=gt+C.$$

我們得到了速度 v 的表達式,在這表達式中,除時間 t 外,還包含有一個任意常數 C。在同一瞬時,對於不同的 C 的值,我們將得到速度的不同的值; 因此,對於問題的完全解決,我們已有的數據是不够的。爲要得出問題的完全確定的解決,需要知道在某一瞬時速度的數値才够。例如,設我們已知,在 $t=t_0$ 時速度 $v=v_0$; 我們把這些值代入所求得的速度的表達式中

$$v_0=gt_0+C,$$

由此

$$C=v_0-gt_0,$$

現在我們的解就有了完全確定的形狀

$$v=g(t-t_0)+v_0.$$

其次，我們求得路程 s 的表達式

$$s=\int[g(t-t_0)+v_0]dt=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+C'$$

(用微分法容易驗證，原函數可以取這樣的形式)。例如，假定在 $t=t_0$ 時路程 $s=s_0$ 給定，我們就可以確定未知的新的常數 C'；求得 $C'=s_0$ 之後，我們寫出解的最後的形狀

$$s=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0.$$

習慣上稱值 t_0, s_0, v_0 為量 t, s 與 v 的開始值。

我們知道，函數 $y=F(x)$ 的微商給出對應圖形的切線的斜率。因此，可以這樣來解釋求給定函數 $f(x)$ 的原函數 $F(x)$ 的問題：**要找出一條曲線 $y=F(x)$，使它的切線斜率適合給定的變化規律**

$$\operatorname{tg}\alpha=f(x).$$

如果 $y=F(x)$ 是這些曲線之一，那麼，所有其餘的曲線可以從它的平行於 y 軸的簡單位移(移動的距離 C 是任意的)中得到(圖 1)。為要從這曲線族中得出特殊的一條個別曲線，只需給出這曲線應當通過的一點 (x_0, y_0)，開始條件 $y_0=F(x_0)+C$ 就給出 $C=y_0-F(x_0)$。

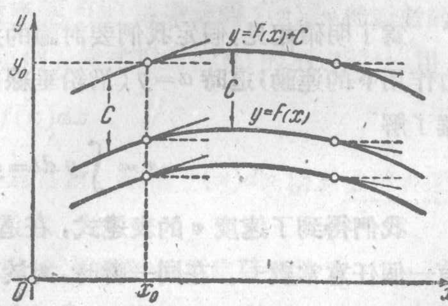

圖 1

252. 積分與面積定義問題 把原函數解釋作曲線圖形的面積是更為重要的。因為在歷史上原函數的概念與面積的定義是極緊密地聯系着的，所以我們就在這兒來講述這個問題(這兒只利用平面圖形的面積的直覺的表示，而把這個問題的精確提法留到第十章去講)。

設在區間 $[a, b]$ 上給定只取正(或非負)值的連續函數 $y=f(x)$。考慮限制在曲線 $y=f(x)$ 下，x 軸上及縱坐標 $x=a$ 與 $x=b$ 之間的圖形 $ABCD$(圖 2)；我們把類似的圖形叫做曲線梯形。想要確定這圖形的面積 P 的值，我們研究變動圖形 $AMND$ 的面積的性質；而這變動圖形包含在開始縱坐標 $x=a$ 和與在區間 $[a, b]$ 上任意選出的 x 值相對應的縱坐標之間。當 x 改變時，這個面積將隨之而變，並且對應於每一 x 有它的一個完全確定值，於是曲線梯形 $AMND$ 的面積是 x 的某一函數；我們用 $P(x)$ 表示它。

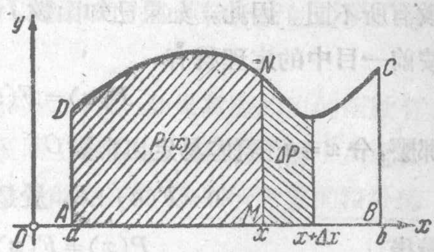

圖 2

我們首先提出求函數 $P(x)$ 的微商的問題。爲了這個目的，我們給 x 添上某一個(比方說，正的)改變量 Δx；此時面積 $P(x)$ 將獲得改變量 ΔP。

以 m 及 M 分別表示在區間 $[x, x+\Delta x]$ 上函數 $f(x)$ 的最小值與最大值[84]，並將面積 ΔP 與底爲 Δx，高爲 m 及 M 的矩形的面積加以比較。顯然

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x,$$

由此

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

如果 $\Delta x \to 0$，那麼，由於連續性，m 與 M 趨於 $f(x)$，因而

$$P'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

這樣，我們就得到一個有名的定理（通常叫做牛頓-萊不尼慈定理）*：依有限的橫坐標 x 而變的變動面積 $P(x)$ 的微商，等於有限的縱

* 其實，這個定理——雖然是在另一種形式裏——已爲牛頓的老師巴若(Is. Barow)發表過了。

坐標 $y=f(x)$。

換句話說，變動面積 $P(x)$ 是給定函數 $y=f(x)$ 的原函數。由於當 $x=a$ 時這個原函數變爲 0 這一特點，使得它與原函數族中其他的原函數有所不同。因此，如果已知函數 $f(x)$ 的任何一個原函數 $F(x)$，則按前一目中的定理就有

$$P(x)=F(x)+C,$$

那麼，令 $x=a$，就容易定出常數 C

$$0=F(a)+C, \text{ 於是 } C=-F(a).$$

最後

$$P(x)=F(x)-F(a).$$

特別地，要求得整個曲線梯形 $ABCD$ 的面積 P，需要取 $x=b$:

$$P=F(b)-F(a).$$

作爲例子，我們求界限在拋物線 $y=ax^2$ 下，x 軸上及對應於給定橫坐標 x 的縱坐標之間的圖形的面積 $P(x)$（圖 3）；因爲拋物線交 x 軸於坐標軸的原點，所以，在這兒 x 的開始值爲 0。容易找出函數 $f(x)=ax^2$ 的原函數：$F(x)=\frac{ax^3}{3}$。當 $x=0$ 時這個函數恰好變爲 0，所以

$$P(x)=F(x)=\frac{ax^3}{3}=\frac{xy}{3}$$

[比較 32, 4)]。

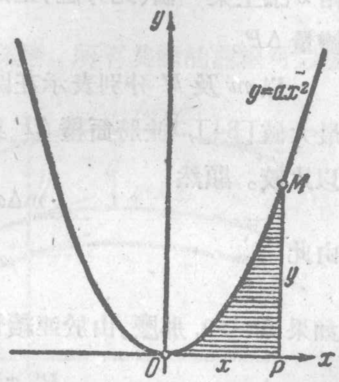

圖 3

由於在計算積分與求平面圖形的面積之間有聯系，通常習慣於把積分計算本身叫作求積。

爲了把以上所講的全部事實推廣到也取負值的函數的情形，只要約定圖形中位於 x 軸下面那一部分的面積的值爲負值就行了。

這樣，在區間 $[a, b]$ 上不管怎樣的連續函數 $f(x)$，讀者總可以把它的原函數想像成給定函數的圖形所界出的變動面積的形式。可是，

把這個幾何的解釋就認爲是原函數存在性的證明，當然是不可以的。因爲面積概念本身還不是有根據的。

每個在給定區間上的連續函數 $f(x)$ 有在這區間上的原函數，這一重要事實，在下章[293]中我們將給以嚴格的並且純粹分析的證明。這個斷言我們現在暫且加以採用。

在本章中我們只講到連續函數的原函數。如果實際給出的函數有間斷點，那麼我們將只在它連續的區間上考慮它。因此，承認了上述斷言之後，我們就無須每次預先講明積分的存在性：我們所考慮的積分總是存在的。

253. **基本積分表**　對於微商是 $f(x)$ 的某一函數 $F(x)$ 所確立的每個微分公式，直接導出相當的積分公式

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

選出第 94 目中計算初等函數的微商的那些公式，也選出後來(對於雙曲函數)推出的一些公式，現在我們就可作出下面的積分表：

1. $\int 0\cdot dx=C.$

2. $\int 1\cdot dx=\int dx=x+C.$

3. $\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C,\ (\mu\neq-1).$

4. $\int \frac{1}{x}dx=\int\frac{dx}{x}=\log|x|+C.$

5. $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg}x+C.$

6. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$

7. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C.$

$\int e^x dx=e^x+C.$

8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

9. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

12. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

13. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

14. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}dx = -\operatorname{cth} x + C.$

15. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx = \operatorname{th} x + C.$

關於公式 4，我們要作一點說明：它是應用在不包含零的任何區間上的。實際上，如果這個區間在零的右方，就有 $x>0$，而由已知的微分公式 $[\log x]' = \frac{1}{x}$ 即可直接推出

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

如果區間在零的左方，就有 $x<0$，那麼，用微分法容易證實 $[\log(-x)]' = \frac{1}{x}$，由此

$$\int \frac{dx}{x} = \log(-x) + C.$$

合併這兩個公式就得公式 4。

藉助於積分法則，可將上面所得到的積分表的範圍加以擴充。

254. **最簡單的積分法則** I. 若 a 是常數 $(a \neq 0)$，則

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx.$$

實際上,微分表達式的右端,我們得到[104, I]

$$d\left[a\cdot\int f(x)dx\right]=a\cdot d\left[\int f(x)dx\right]=a\cdot f(x)dx,$$

所以這個表達式是微分表達式 $a\cdot f(x)dx$ 的原函數,而這正是所要證明的。因此,常數因子可以拿到積分符號的外面來。

II. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$

微分表達式的右端[104, II]:

$$d\left[\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\right]=d\int f(x)dx\pm d\int g(x)dx=$$
$$=[f(x)\pm g(x)]dx;$$

所以,該表達式就是微分表達式 $[f(x)\pm g(x)]dx$ 的原函數。這就是所要證明的。微分的和(或差)的不定積分,等於每個微分各自積分的和(或差)。

附註 關於這兩個公式,我們要注意下面這一點。這兩個公式中的每個不定積分都包含一個任意常數項。類似型式的等式應了解爲等式左右兩部分之間的差是一個常數。也可以從字面上直接了解這些等式,但這時等式中所有出現的積分中的任一個積分不再是任意原函數:這個積分中的積分常數,在其他幾個積分常數選定之後,就被確定了。這個重要的附註,在此後應當加以注意。

III. 若

$$\int f(t)dt=F(t)+C,$$

則

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)+C'.$$

實際上,所給的關係式相當於:

$$\frac{d}{dt}F(t)=F'(t)=f(t).$$

但同時

$$\frac{d}{dx}F(ax+b)=F'(ax+b)\cdot a=a\cdot f(ax+b),$$

於是
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=f(ax+b),$$
即是，$\frac{1}{a}F(ax+b)$ 實際上是函數 $f(ax+b)$ 的一個原函數。

特別時常遇到的情形是 $a=1$ 或 $b=0$，這時：
$$\int f(x+b)dx=F(x+b)+C_1,$$
$$\int f(ax)dx=\frac{1}{a}\cdot F(x)+C_2.$$

［實際上，規則 III 是不定積分中換元法則的極特別的情形。關於換元法則，在下面 256 目就要講到。］

255. 例題 1) $\int(6x^2-3x+5)dx.$

利用規則 II 與 I（及公式 3, 2），我們有
$$\int(6x^2-3x+5)dx=\int 6x^2dx-\int 3x\,dx+\int 5dx=$$
$$=6\int x^2dx-3\int x\,dx+5\int dx=2x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

2) 容易積分一般形狀的多項式
$$\int(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)dx=$$
$$=a_0\int x^ndx+a_1\int x^{n-1}dx+\cdots+a_{n-1}\int x\,dx+a_n\int dx=$$
$$=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx+C. \qquad \text{(II, I; 3, 2)}$$

3) $\int(2x^2+1)^3dx=\int(8x^6+12x^4+6x^2+1)dx=$
$$=\frac{8}{7}x^7+\frac{12}{5}x^5+2x^3+x+C. \qquad \text{（例題 2）}$$

4) $\int(1+\sqrt{x})^4dx=\int(1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2)dx=$
$$=\int dx+4\int x^{\frac{1}{2}}dx+6\int x\,dx+4\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^2dx=$$
$$=x+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^2+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3+C. \qquad \text{(II, I; 3, 2)}$$

5) $\int\frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx=\int\frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}dx=\int\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=$
$$=\frac{1}{3}\int x\,dx+\frac{1}{3}\int dx-\int\frac{1}{x}dx-\int x^{-2}dx=$$
$$=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\log x+\frac{1}{x}+C. \qquad \text{(II, I; 3, 2, 4)}$$