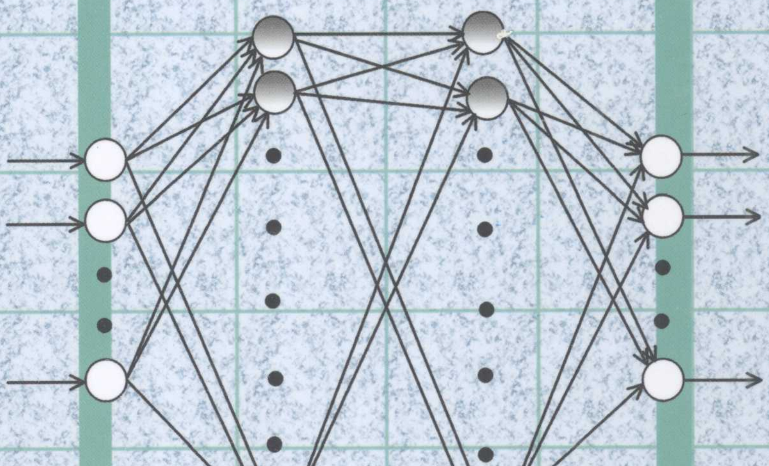
层状弹性体系的力学分析与计算

王 凯 著



科学出版社
www.sciencep.com

本书由东南大学科技出版基金资助出版

层状弹性体系的力学分析与计算

王　凯　著

科学出版社
北　京

前　言

1980 年在我国诞生了第一个具有自主知识产权的 N 层弹性体系力学计算程序——NESCP(N-layer Elastic System Computer Program)，迄今已经 20 多年过去了。

我国学者们从 1962 年开始层状弹性体系力学分析与计算领域的研究。1964 年在朱照宏的带领下，同济大学公路工程研究所成功编制了在圆形均布垂直荷载作用下双层和三层弹性体系力学计算程序，并进行了比较全面的数值计算。这些工作为我国在该领域进一步的研究工作奠定了良好的基础。

由本书第三章可知，如何由定解条件得到的线性代数方程组方便迅捷地求算出应力与位移积分表达式中的积分常数，是保证快速计算出应力与位移数值的关键。1964 年，对于双层和三层弹性体系，同济大学的学者们是采用消元的方法由上述线性代数方程组推导出积分常数的文字表达式并用于计算。由于在轴对称垂直荷载作用下双层和三层弹性体系的线性代数方程组分别只有 8 个和 12 个线性代数方程式，求解过程相对比较简单，人力尚能完成。但当层数 $N>3$ 时，随着体系层数的增加，方程组中方程式的个数迅速增多，导致积分常数文字表达式的推导过程十分繁难而无法进行下去。在 1980 年之前，国内这一领域的学者们都局限在"消元法"的思路内，以至于一个时期之内，多层弹性体系的力学计算似乎成了无法逾越的障碍。

我国改革开放以来，随着交通事业的发展，高等级公路和城市道路沥青路面的大量设计与修建，迫切需要解决多层弹性体系的力学计算问题。尽管国外在 20 世纪 70 年代已经解决了此问题，但对我国搞专利封锁，著名的 BISAR 程序专利费高达 100 万美元。

"外国人能做到的，中国人通过努力也一定能做到"，已故周恩来总理的教导时时激励着当时笔者年轻的心。1979～1980 年，笔者决心攻克这一国内难题。通过潜心研究，笔者发现尽管在轴对称垂直荷载作用下 N 层弹性体系求解积分常数的线性代数方程组有 $4N$ 个方程式，但可以分成若干小组。其中第一、二式构成一个小组，它们是由表面边界条件得到的，而下面诸式可以四个组成一个小组，每一个小组的四个方程式对应每一个层间界面上的四个层间结合条件，由于层间结合条件相似，这些方程式小组也很相似，可以用一个统一的式子来表达。根据上述特性，笔者进一步思考，如果能推导出相邻小组积分常数的递推关系式，则 $4N$ 元线性代数方程组的求解问题就有可能转化为若干个四元乃至二元线性代数方程组的求解问题，从而大大简化了求解过程。基于这一思路，笔者发明了"递推回代法"①，成功地解决了轴对称垂直荷载作用下 N 层弹性体系积分常数计算中 $4N$ 元线性代数方程组的求解问题。在此基础上笔者再接再厉，推导出在多层弹性体系条件下应力与位移积分计算中要用到的一系列公式如余项公式、积分上限计算公式等，于 1980 年编制了我国第一个 N 层弹性体系力学计算程序并取名 NESCP。这一成果填补了

① 有关这方面内容的详细介绍请参看本书第三章第三节。

国内空白，打破了国外的专利封锁，在道路学术界引起了很大反响。

值得一提的是笔者完成该成果后，即将成果学术报告向国内同行广泛发送。尤其是在1980年上海召开的学术会议上，笔者毫无保留地向参加会议的代表介绍“递推回代法”的思路以及“递推回代法”、余项公式、积分上限计算公式的推导过程。正是在“递推回代法”思路的启发下，随后数年内在我国又陆续产生了求解积分常数的“分层求逆子阵的传递矩阵法”、“反力递推法”、“系数递推法”以及与它们相应的多层弹性体系力学计算程序。

1980～1985年，笔者一直从事“层状弹性体系应力与位移的一般分析与计算”课题的研究工作。在赶超该领域世界先进水平的征程中，笔者五六年如一日，孜孜不倦，刻苦攻关，付出了艰辛的劳动，也取得了丰硕的成果。在《力学学报》(外文版)、《土木工程学报》、《中国公路学报》、《固体力学学报》、《岩土工程学报》以及《西安公路学院学报》、《重庆交通学院学报》、《西安空军工程学院学报》等学术刊物上共发表与该课题有关的论文13篇。包含该课题研究报告主要内容的论文曾选入1986年日本东京国际计算力学会议论文集，并在第一届中英公路及城市交通会议上交流和在第二届全国计算力学会议上宣读。

1986年陕西省交通厅(当时笔者在西安公路研究所工作)对该课题的成果组织全国专家评议，评议意见为：

本成果为国内首创，填补了国内空白，具有国内最先进水平并达到了国际上同类科研成果的先进水平。

本成果具有较高的理论水平和实用价值，在公路和机场跑道设计等方面有广泛的应用。

1988年“*N*层弹性体系力学计算程序NESCP”荣获全国工程设计计算机优秀软件三等奖。

1990年“层状弹性体系应力与位移的一般分析与计算”荣获陕西省科技进步一等奖。

时间过得真快，20多年过去了，弹指一挥间。回首往事，笔者深感有必要将过去所做的工作和所收集的资料加以系统整理和总结，编辑成册，以供道路工程专业和相关专业的研究生、高年级大学生以及从事道路工程和相关工程的设计、研究人员学习和参考。同时也借此向世人展示，在多层弹性体系力学分析与计算领域，中国人通过努力同样能占有一席之地，这是任何人想抹杀也抹杀不了的。

由于篇幅所限，本书仅介绍了基础理论和计算方法，对“递推回代法”和计算机程序(包括特殊函数、数值积分、弹性半空间体、弹性地基板和层状弹性体系计算机程序的编写以及对国际上著名程序BISAR的剖析等)未能做详细介绍。如果读者有这方面的需求，笔者打算就这两方面的内容编写第二本专著，以飨读者。

在本书写作和出版的过程中，承蒙东南大学交通学院王炜院长、程刚副院长、陈荣生教授、徐吉谦教授、周福田教授、倪富健教授以及东南大学研究生院王修信副院长的指教、关心和帮助，笔者在此谨表示衷心的感谢。

在本书写作的过程中，笔者的妻子毛世怀副教授自始至终给予了莫大的支持、帮助

与鼓励，并协助完成了本书初稿 Word 文档的制作和计算机绘图，笔者在此特表示深切的谢意。

除此之外，在本书写作的过程中，笔者还得到了宋启根教授、管平教授、李世昌教授、丁汉山教授、肖鹏副教授、赵业鑫副教授和朱珉仁副教授的指教和帮助，在此深表谢意。

由于笔者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正，以便进一步修正、补充。

王　凯

2008 年 8 月

目　录

第一章　绪　　论

层状弹性体系的力学分析与计算是多层柔性路面、多层柔性道面以及多层地基设计与计算的理论基础。该理论及在其基础上所编制的各种实用程序在世界各国的上述工程结构的设计与计算中得到了广泛的应用。

层状弹性体系的力学分析又称为层状弹性体系理论，属于弹性力学的范畴。层状弹性体系理论将所研究的物体看作是自上而下由若干弹性层和弹性半空间体组成的弹性体系。

层状弹性体系理论是在弹性半空间体理论的基础上发展起来的。1885 年布辛尼斯克(Boussinesq)对弹性半空间体在单个垂直集中力作用下的应力和位移做出了理论解，它在近代土力学中获得了广泛的应用。1882 年塞路蒂(Cerruti)对弹性半空间体在单个水平集中力作用下的应力和位移做出了理论解[1]。

由于数学和弹性力学的发展，到 20 世纪 40～60 年代，层状弹性体系理论取得了长足的进步。1943 年和 1945 年伯米斯特(Burmister)利用拉甫(Love)位移函数得到了在轴对称垂直荷载作用下双层和多层弹性体系应力和位移的理论解[2,3]。1951 年史奈登(Sneddon)对轴对称弹性力学问题第一次引入汉克尔积分变换的解法[4]，1955 年和 1956 年牟岐鹿楼对这种方法加以发展并用于解决弹性半空间体非轴对称问题[5,6]。1962 年希夫曼(Schiffman)又将其进一步推广到多层弹性体系的求解[7]。

为了使上述理论在工程中获得实际应用，从 20 世纪 40 年代开始，一些学者致力于理论解的数值计算。1943 年伯米斯特计算了 $\mu=0.5$ 时双层弹性体系表面荷载圆中心处的弯沉值[2]。1948～1951 年，福克斯(Fox)和阿克姆(Acum)计算了双层和三层弹性体系 $\mu=0.5$时层间连续及光滑情况的一系列应力值[8,9]。柯岗(Коган)于 1952～1958 年发表了一系列关于双层和三层弹性体系应力和位移计算的论文，列出了一定数量的计算图表[10～12]。琼斯(Jones)于 1962 年计算并发表了三层弹性体系 $\mu=0.5$ 时参数较为广泛的计算图表[13]。

20 世纪 60～70 年代，电子计算机及计算方法发展很快，而工程实际也要求解决多层(层数 $N>3$)弹性体系的力学计算，于是多层弹性体系力学计算程序在各国学者的努力下应运而生。1967 年弗斯特拉坦(Verstraeten)完成了在圆形均布垂直荷载、单向水平荷载和向心水平荷载作用下四层弹性连续体系的应力和位移计算[14]，这是多层弹性体系力学计算的开端。

1968 年佩兹(Peutz)等合作编制成功 BISTRO 计算机程序[15]，该程序可以计算在多圆均布垂直荷载作用下 N 层弹性连续体系内任一点的应力和位移分量，这是多层弹性体系力学计算的第一个标志性程序。

1973 年德乔昂(De Jong)等合作编制成功 BISAR 计算机程序[16]，该程序可以计算在多圆均布复合荷载(包括垂直和单向水平荷载)作用下 N 层弹性连续-光滑-半结合体系内

任一点的应力和位移分量、主应力和主应变分量以及主方向等，这是多层弹性体系力学计算的第二个标志性程序。

1977 年杰拉德(Gerrad)等合作编制成功了计算功能更全面的 CIRCLY 计算机程序[17]，该程序可以计算在多圆均布、三角分布或曲面分布复合荷载(包括垂直、单向水平、向心水平和旋转水平荷载)作用下 N 层弹性连续-光滑-半结合体系内任一点的应力、位移分量以及其他力学分量，这是多层弹性体系力学计算的第三个标志性程序。它代表着当今世界上运用线性弹性理论计算多层弹性体系的最高水平。

除此之外，世界各国还有不少计算 N 层弹性体系应力和位移分量的计算机程序，例如，切夫隆(Chevron)公司的 CHEV-5L 程序，美国加利福尼亚(California)研究院的 ELSYM程序，澳大利亚联邦科学与工业研究院的 GCP—1 程序等，对它们的功能不再一一详细叙述。

我国学者们从 1962 年开始层状弹性体系力学分析与计算领域的研究，1964 年在朱照宏的带领下，同济大学公路工程研究所与中国科学院计算技术研究所合作，对双层和三层弹性连续或光滑体系在圆形均布垂直荷载作用下的应力和位移进行了比较全面的数值计算，提出了数解表及计算图并于 1975 年出版[18]。1978 年许志鸿利用牟岐鹿楼所推导的公式编制了圆形均布单向水平荷载作用下双层弹性体系的计算机程序并进行了应力和位移计算[19]。

1980 年我国多层弹性体系力学分析与计算领域的研究取得了突破。1980 年作者编制成功了在圆形均布垂直荷载作用下 N 层弹性连续体系的力学计算程序，1981 年又分别编制成功了在双圆均布复合荷载(垂直和单向水平荷载)作用下 N 层弹性连续体系和 N 层弹性光滑体系的力学计算程序。以上程序的功能已达到并超过 BISTRO 程序的功能。上述三项成果的论文先以油印研究报告的形式发表，并于 1982 年、1983 年和 1981 年分别刊登于《土木工程学报》、《固体力学学报》和《西北公路运输科技》[20~22]。

1983 年作者编制成功了在多圆均布复合荷载(垂直和单向水平荷载)作用下 N 层弹性连续-光滑-半结合体系的力学计算程序并对列普司切兹(Lipschitz)-汉克尔(Hankel)积分及其在弹性半空间体和多层弹性体系力学计算中的应用展开研究，在此基础上于 1984 年初编制了功能更全面的多层弹性体系力学计算程序。该程序的功能已达到 BISAR 程序的功能。上述研究成果的论文先以油印研究报告的形式发表，并于 1986 年分别刊登于《重庆交通学院学报》和《土木工程学报》[23,24]。

1981～1983 年期间作者对曲面分布荷载(原称碗形分布荷载)、向心水平荷载和旋转水平荷载作用下 N 层弹性体系的力学计算课题也进行了研究并编制了相应的计算机程序，这些研究成果的论文于 1983～1986 年分别刊登于《岩土工程学报》、《重庆交通学院学报》、《西安空军工程学院学报》和《西安公路学院学报》[25~28]。

在上述工作的基础上，作者于 1984 年 9 月编制成功在多圆均布、三角分布或曲面分布复合荷载(包括垂直荷载、单向水平荷载、向心水平荷载和旋转水平荷载)作用下 N 层弹性连续-光滑-半结合体系的力学计算程序，该程序的功能已类似于 CIRCLY 程序的功能。研究成果的论文分别于 1987 年和 1990 年刊登于《力学学报》(外文版)和《中国公路学报》[29,30]。

除此之外，1984 年作者还对刚性圆板施压下 N 层弹性体系的力学计算课题进行了

研究，研究成果论文刊登于 1985 年《西安公路学院学报》[31]。

除了作者之外，我国还有不少学者按照不同思路编制了若干多层弹性体系力学计算程序，较有影响的有朱照宏的高阶矩阵代数法程序[32,37]，郭文复、邓学钧的分层求逆子阵的传递矩阵法程序[33,34]，吴晋伟的"反力递推法"程序[35]和郭大智的"系数递推法"程序[36]等。

应当指出，由于国外技术封锁，我国多层弹性体系力学分析与计算的研究工作，基本上是在自力更生的基础上进行的，但这也促使我们的研究在很多方面具有中国特色，主要有如下几个方面：

在对弹性力学基础理论的研究方面，作者在总结归纳前人和自己研究成果的基础上，参照经典弹性力学专著和教材中已阐述过的"弹性力学空间问题"和"空间轴对称问题"，提出了一种新的弹性力学问题——"空间轴对称弹性体扭转问题"并建立了求解这一类力学问题的弹性力学基本方程①。

如前所述，当弹性半空间体表面分别作用垂直集中力和水平集中力荷载时，国外学者布辛尼斯克和塞路蒂对弹性半空间体内产生的应力与位移，给出了理论解。但当弹性半空间体表面作用水平扭矩荷载时，至今还没有人对弹性半空间体内产生的应力与位移，给出理论解。作者对这一问题进行了研究并推导了相应的应力与位移的理论表达式。由于该理论表达式能满足弹性力学的所有方程且在边界上满足边界条件，因而是这一问题的真正解答②。

如何由定解条件得到的线性代数方程组方便迅速地求算出应力与位移积分表达式中的积分常数，是多层弹性体系力学计算的关键之一。作者在分析多层弹性体系求解积分常数的线性代数方程组特性的基础上，提出了一种求解新方法——"递推回代法"[29~38]③。由于该方法将传统的矩阵运算转化成了普通的代数运算，从而比国外普遍采用的"传递矩阵法"运算次数大为减少。除此之外，与"传递矩阵法"相比，"递推回代法"还有两个优越之处：一是"传递矩阵法"进行矩阵运算时，有时会出现病态矩阵并导致计算结果很不精确，而"递推回代法"不会出现；二是"传递矩阵法"不能解决多层弹性光滑体系积分常数的求解问题，只能依靠近似计算的方法，而"递推回代法"可以解决。

在对应力与位移积分表达式进行数值积分方面，作者利用"递推回代法"推导过程中获得的一系列表达式，得到了在多层弹性体系条件下应力与位移积分表达式的数值积分计算中要用到的一些公式如余项公式、积分上限 x_s 的计算公式等。在具体数值积分时作者将积分区间 $[0,x_s]$ 再划分成数个长度相等的子区间并在每个子区间上直接采用高精度的 34 结点高斯(Gauss)求积公式④，这种数值积分方法比国外根据贝塞尔函数相邻零点的区间布置结点(采用 4～15 结点高斯求积公式)并通过试算确定积分上限的数值积分方法简便。试算表明，这种数值积分方法的计算结果与国外数值积分方法的计算结果完全一致或非常接近而计算时间则少得多。

曲面分布荷载(包括三角曲面分布荷载)图式⑤与传统的均布荷载图式或三角分布荷

① 有关本问题的详细介绍请参看本书第二章第二节。
② 有关本问题的详细介绍请参看本书第三章第五节。
③ 有关"递推回代法"的详细介绍请参看本书第三章第三节。
④ 有关"高斯数值积分"的详细介绍请参看本书附录第五节和第三章第三节。
⑤ 有关"曲面分布荷载"的详细介绍请参看本书第三章第一节。

载图式相比，由于其分布图形与实际荷载分布更接近并且在弹性体表面荷载边缘处的应力计算结果不会像后二者出现间断或无穷大，因而具有其独特的优越性。目前世界上有两种曲面分布荷载图式，一种是作者提出的曲面分布荷载图式（在本书中称为Ⅰ型曲面分布荷载），另一种就是澳大利亚杰拉德（Gerrad）等提出的曲面分布荷载图式（在本书中称为Ⅱ型曲面分布荷载）[17]。两种曲面分布荷载图式都属于旋转曲面分布荷载图式的范畴，它们都是在前人论文中提出的“半球面分布荷载图式”的基础上发展而来的。由于杰拉德的论文中仅列出了该荷载分布函数的最原始的简单表达式，因此在本书中对该曲面分布荷载图式在多层弹性体系力学分析与计算中的相关公式也做了详细的推导和论述。

飞机和汽车轮胎对机场道面或路面的作用，除了垂直荷载、单向水平荷载和向心水平荷载外，还作用着旋转水平荷载。在建立旋转水平荷载作用下多层弹性体系应力与位移的表达式时，作者提出了一种新的推导方法并由此得到了正确的表达式①。作者与姚炳卿合作研究发现，日本著名学者牟岐鹿楼论文[6]中的应力与位移表达式之所以有错，是由于他采用的推导方法不够完善且在推导过程中变量符号出错造成的[27,28]。

有关表面局部受刚性圆板施压时 N 层弹性体系的力学计算课题，国内外学者们曾做过一些研究工作，但都未能得到满意的解决。作者于 1984 年提出了一种新的计算方法，这就是将原来的混合边值问题变换成等价的应力边值问题，从而避开了求解对偶积分方程的困难，使该课题得到比较满意地解决[31]②。

以上仅对层状弹性体系的力学分析与计算的发展概况做了历史的回顾。随着交通事业的不断发展，在路面和机场道面的设计与修建中新技术、新材料和新结构的不断涌现，以及理论研究工作、数值计算方法和计算机科学的不断进步，可以预计本学科的研究必将得到新的更大的发展。

参　考　文　献

[1] Westergaard H M. Theory of Elasticity and Plasticity [M]. New York: John Wiley & Sons, 1952

[2] Burmister D M. The theory of stresses and displacements in layered sestems and application to the design of airport runways [C]. Proc. HRB, 1943, 23

[3] Burmister D M. The general theory of stresses and displacements in layered soil systems [J]. Journal of Applied Physics, 1945, 16

[4] Sneddon I N. Fourier Transforms [M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951

[5] 牟岐鹿楼. 表面局部受刚体压缩之半无限弹性体的三维应力问题（中文译名）[C]. 日本机械学会论文集，1955，21：767～773

[6] 牟岐鹿楼. 表面受剪切荷载作用之半无限弹性体的三维应力问题（中文译名）[C]. 日本机械学会论文集，1956，22：468～474

[7] Schiffman R L. General analysis of stresses and displacements in layered elastic systems [C]. Proceedings of the International Conference on the Structural Design of Asphalt Pavements, Michigan, 1962: 365～375

[8] Fox L. Computation of traffic stresses in a simple road structure [R]. Road Research Technical Paper, 1948, 9

[9] Acum W E A, Fox L. Computation of load stresses in a three-layer elastic system [J]. Geotechnique, 1951, 2 (4)

① 有关“旋转水平荷载”作用下应力与位移表达式推导的详细介绍请参看本书第三章第二节。

② 有关本课题的详细介绍请参看本书第三章第七节。

[10] Коган Б И. Напряжения и деформации многослойных покрытий [J]. Труды ХАДИ, вып. 14, 1953

[11] Коган Б И. Напряжения и деформации в покрытиях с непрерывно меняющимся модулем упругости [J]. Труды ХАДИ, сб. 19, 1957

[12] Коган Б И. Применении точного решения теории упругости для многослойного полупространства к расчету нежестких дорожных покрытий [J]. Труды ХАДИ, сб. 21, 1958

[13] Jonse A. Tables of stresses in three-layer elastic systems [C]. HRB Bull., 1962, 342

[14] Verstraeten J. Stresses and displacements in elastic layered systems [C]. General Theory—Numerical Calculations in Four Layered Systems with Continuous Interface. Proceedings of the Second International Conference on the Structural Design of Asphalt Pavements, 1967

[15] Peutz M G F, van Kempen H P M, Jones A. Layered systems under normal surface loads— 'BISTRO' computer program [C]. Koninklijke/Shell—Laboratorium, Amsterdam, The Netherlands, HRB, 1968, 228

[16] De Jong D L, Peutz M G F, Korswagen A R. Layered systems under normal and tangential surface loads— 'BISAR' computer program [R]. Koninklijke/Shell—Laboratorium, Amsterdam, External Report AMSR, 1973

[17] Gerrad C M, Wardle L J. Rotional design of surface pavement layers [J]. Journal of the Australian Road Research Board, June 1980: 3~15

[18] 同济大学公路工程研究所. 路面厚度计算图表 [M]. 北京：人民交通出版社，1975

[19] 许志鸿. 双层弹性体系在圆形均布水平荷载作用下的应力与位移 [J]. 同济大学学报，1978，(4)：55~68

[20] 王凯. N层弹性连续体系在圆形均布垂直荷载作用下的力学计算 [J]. 土木工程学报，1982，(2)：65~76

[21] 王凯. N层弹性连续体系在双圆均布复合荷载作用下的力学计算 [J]. 固体力学学报，1983，(1) (1981年5月12日收到)：136~153

[22] 王凯. N层弹性滑动体系在双圆均布复合荷载作用下的力学计算 [J]. 西北公路运输科技，1981，(3)：15~38

[23] 王凯. Lipschitz-Hankel积分及其在弹性半空间问题中的应用 [J]. 重庆交通学院学报，1986，(4)：12~31

[24] 王凯. N层弹性体系在多圆均布复合荷载作用下的力学计算 [J]. 土木工程学报，1986，(1)：55~71

[25] 王凯. 路面设计的碗形分布荷载图式. 岩土工程学报 [J]. 1983，(4)：43~55

[26] 王凯. N层弹性体系在多圆向心水平荷载作用下的力学计算 [J]. 重庆交通学院学报，1984，(2)：50~64

[27] 王凯，姚炳卿. 弹性层状体系在环向水平荷载作用下的力学分析 [J]. 西安空军工程学院学报，1984，(2)：180~188

[28] 王凯，姚炳卿. N层弹性体系在多圆旋转水平荷载作用下的力学计算 [J]. 西安公路学院学报，1986，(3)：15~30

[29] Wang Kai. Analysis and calculation of stresses and displacements in layered elastic systems [J]. Acta MeChanica Sinica, August, 1987 (Received 17 April 1985), 3 (3)：251~260

[30] 王凯. 层状弹性体系理论及其在半刚性基层沥青路面分析中的应用 [J]. 中国公路学报，1990，(4)：32~41

[31] 王凯. N层半无限弹性体在刚性圆板压缩下的力学计算 [J]. 西安公路学院学报，1985，(3)：18~34

[32] 朱照宏. 多层弹性体系应力分析计算程序的编制 [R]. 同济大学科学技术情报站，1983：1~33

[33] 郭文复. 多层半无限弹性体在圆形荷载作用下的解析解 [J]. 力学学报，1984，(3)：282~289

[34] 邓学钧. 弹性多层地基上刚性路面板的力学分析 [J]. 岩土工程学报，1986，(5)：31~38

[35] 吴晋伟. 多层路面的应力分析. 中南公路工程 [J]. 1983，(2)：73~92

[36] 郭大智. 多层柔性路面中应力与位移计算 [C]. 中国公路学会道路工程学会一九八三年年会论文选集，1984：183~186

[37] 朱照宏，严作人. 弹性多层路面的力学图谱分析 [J]. 同济大学学报，1986，(1)：1~11

[38] 对"N层弹性连续体系在圆形均布垂直荷载作用下的力学计算"的讨论 [J]. 土木工程学报，1984，(1)：91~95

[39] 王凯. 层状弹性体系应力与位移的一般分析与计算（科研课题总结报告）[R]. 西安公路研究所，1985

第二章　弹性力学公式简介

第一节　弹性力学空间问题的基本方程

在柱坐标(r,θ,z)系中弹性力学空间问题的平衡微分方程(不计体力)为[①,②]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\\
&\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}=0\\
&\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{zr}=0
\end{aligned}\right\}\tag{2-1-1}$$

相应的几何方程为(式中u,v,w分别为r,θ,z方向的位移)

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r} &&\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\\
&\varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{r} &&\gamma_{\theta z}=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial z}\\
&\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} &&\gamma_{zr}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}
\end{aligned}\right\}\tag{2-1-2}$$

物理方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_r=\frac{1}{E}[\sigma_r-\mu(\sigma_\theta+\sigma_z)] &&\gamma_{r\theta}=\frac{\tau_{r\theta}}{G}\\
&\varepsilon_\theta=\frac{1}{E}[\sigma_\theta-\mu(\sigma_z+\sigma_r)] &&\gamma_{\theta z}=\frac{\tau_{\theta z}}{G}\\
&\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_r+\sigma_\theta)] &&\gamma_{zr}=\frac{\tau_{zr}}{G}
\end{aligned}\right\}\tag{2-1-3}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_r=2G\varepsilon_r+\lambda e &&\tau_{r\theta}=G\gamma_{r\theta}\\
&\sigma_\theta=2G\varepsilon_\theta+\lambda e &&\tau_{\theta z}=G\gamma_{\theta z}\\
&\sigma_z=2G\varepsilon_z+\lambda e &&\tau_{zr}=G\gamma_{zr}
\end{aligned}\right\}\tag{2-1-4}$$

---

① 式(2-1-1)和式(2-1-2)见铁摩辛柯《弹性理论》(1964 年版)第 322 页式(170)和式(169)，该两式也可由直角坐标系方程通过坐标变换求得。

② 根据弹性力学剪应力互等定律，作用在两个相互垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力，是互等的，例如，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$，$\tau_{zx}=\tau_{xz}$或$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}$，$\tau_{\theta z}=\tau_{z\theta}$，$\tau_{zr}=\tau_{rz}$。因此，剪应力记号的两个角码的次序可以对调。在本书各章的公式或表达式中，经常出现剪应力(包括剪应变)记号的两个角码的次序根据习惯写法或需要而对调的情况，请读者留意，不再一一说明。

其中

$$e=\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z=\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)u+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\lambda=\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\qquad G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

要从以上 15 个基本方程求出具体有实际意义的解，还必须加上适当的边界条件。在弹性力学中，根据对研究的弹性体所给出的不同边界条件，将弹性力学问题分为以下三类[①]：

（1）应力边界问题，在该问题中，弹性体在全部边界上所受的面力是已知的，根据面力分量与边界上应力分量之间的关系，可以把面力已知的条件转换成应力方面的已知条件，这就是所谓应力边界条件并以此来求解弹性体内部应力与位移的分布。

（2）位移边界问题，在该问题中，弹性体在全部边界上的位移分量是已知的，从而构成位移边界条件并以此来求解弹性体内部的应力与位移分布。

（3）混合边界问题，在该问题中，弹性体一部分边界具有已知位移，因而具有位移边界条件，另一部分边界具有已知面力，因而具有应力边界条件，或者在同一部分边界上，两个边界条件中的一个是位移边界条件，另一个是应力边界条件，并以此来求解弹性体内部的应力与位移分布。

在弹性力学中求解问题，也有三种基本方法：应力法、位移法和混合法。在本书中求解问题主要采用位移法。

用位移法求解问题就是取位移分量为基本未知函数，对空间问题来说，就是从上述 15 个基本方程中消去应力分量和应变分量，得出只包含位移分量的微分方程。根据该微分方程和边界条件求出位移分量后，再利用几何方程和物理方程求出应变分量和应力分量。

在柱坐标系中，将几何方程(2-1-2)代入物理方程(2-1-4)，得到用位移分量表示应力分量的弹性方程为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r&=\left[(\lambda+2G)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\lambda}{r}\right]u+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\lambda\frac{\partial w}{\partial z}\\
\sigma_\theta&=\left(\lambda\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\lambda+2G}{r}\right)u+\frac{\lambda+2G}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\lambda\frac{\partial w}{\partial z}\\
\sigma_z&=\lambda\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)u+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+(\lambda+2G)\frac{\partial w}{\partial z}\\
\tau_{r\theta}&=G\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)v+\frac{G}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\\
\tau_{\theta z}&=\frac{G}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+G\frac{\partial v}{\partial z}\\
\tau_{zr}&=G\frac{\partial u}{\partial z}+G\frac{\partial w}{\partial r}
\end{aligned}\right\}\tag{2-1-5}$$

① 在工程数学中，初始条件和边界条件统称为定解条件。求一个偏微分方程满足定解条件的解的问题称为定解问题。没有初始条件只有边界条件的定解问题称为边值问题。因此当没有初始条件时，文中所述的三类边界问题，一般又分别称为应力边值问题，位移边值问题和混合边值问题。