新培优奥赛系列

根据义务教育课程标准实验教材编写

黄冈特高级教师联合编写

知识方法点击

精典考题速递

初中新奥赛时代同步辅导

训练巩固提高

为学生升入重点中学服务，为各级各类学科奥赛服务

数学

主编 吕伦兵

七年级（人）

湖北科学技术出版社

知识方法点击　精典考题速递

初中

新奥赛时代

同步辅导

训练巩固提高

数学

主　编：卢博东　张景平

编　者：陈建福　江泽兵　董　锐　曹建明

赵卫东

七年级

（人）

湖北科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

新奥赛时代．七年级数学/吕伦兵主编．—武汉：湖北科学技术出版社，2009．6

ISBN 978-7-5352-4337-9

Ⅰ．新…　Ⅱ．吕…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 082557 号

责任编辑：赵襄玲　　　封面设计：戴　旻

出版发行：湖北科学技术出版社　　　电话：027—87679468

地　　址：武汉市雄楚大街 268 号（湖北出版文化城 B 座 12—13 层）　　　邮编：430070

网　　址：http://www.hbstp.com.cn

印　　刷：汉川市三星印务有限责任公司　　　邮编：431600

889×1194　1/16　　　11.50 印张　230 千字

2009 年 6 月第 1 版　　　2009 年 6 月第 1 次印刷

定价：21.70 元

QIAN

前言

YAN

为了选拔和发现人才，每年全国各地都要举行各级各类的升学考试和奥林匹克竞赛活动。为了给一线的辅导教师和学生提供一套优质的培优辅导书，我们特邀请了一批长期战斗在教学前线的优秀奥赛辅导教师，经过精心的构思，认真的锤炼，历时一年而完成此书。

本丛书在力求与教材同步的前提下，把教材中需要拓宽和引伸的竞赛知识点以及奥赛的基础知识，以“讲”为单位呈现给师生。达到好教、易学的目的。用好此书，学生不仅能在升学考试中取得优异的成绩，而且在奥林匹克竞赛中也能一展身手。

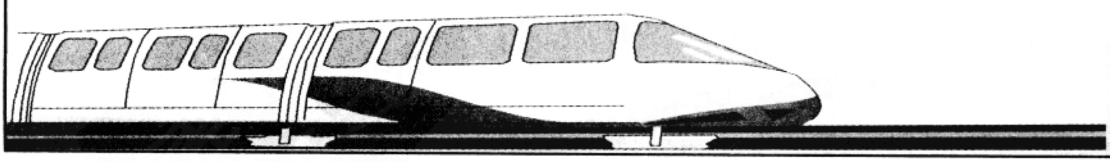
本丛书的每一讲都设置有**“赛点解析、专题精讲、实战演练”**三个环节，加深学生对培优知识的掌握和灵活运用。其中**“赛点解析”**以精炼的语言把该讲所涉及的主要知识点和解题方法作一个概括总结。**“专题精讲”**，每讲视其内容的多少设置了 2～3 道例题，每个例题尽量说明出处，同时还有分析、解、反思说明三个环节。**分析**侧重对具体题目的引导；**解**就是把题目中的解题过程写出来（视其对题目的分析情况，解有详有略）；反思说明主要是对该题所涉及的解题方法和技巧加以总结，也可以指出该题的易错点和易混淆点，还可以对该题加以拓展、引伸。**“实战演练”**这一环节，主要是配备一定数量的习题，供学生训练使用。每一讲训练题目的总数力求控制在 20 道以内，分为 A、B 两组，A 组为能力训练，主要以中考题为主，B 组为奥赛热身，主要来源于近几年全国各地的奥赛题。

本丛书在每一章（或若干讲）后都附有一套单元过关检测题，其目的是检测学生阶段性训练效果。丛书最后还附有几套实战模拟训练题，主要是培养学生的实战应考能力。

亲爱的读者，“追求卓越，不断创新”是我们努力的方向，希望本套丛书能帮你走向成功。

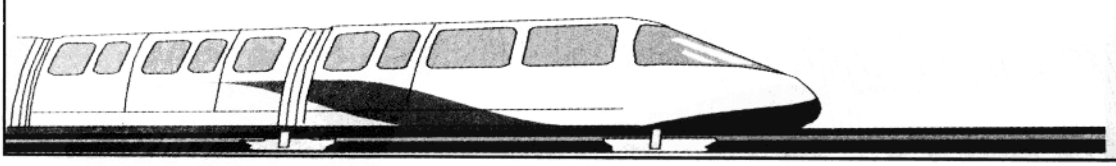
编者

2009.6



SHU XUE

目录



第一讲　与有理数相关的概念

赛点解析

1. 概念

大于 0 的数是正数，小于 0 的数是负数，0 既不是正数也不是负数.

2. 注意

(1) 了解负数的引入是生活实际的需要.

(2) 带正号的数不一定是正数，带负号的数不一定是负数.

(3) 对 0 的认识：0 可以表示没有，也可以表示一个确切的量，如今天的气温是 0℃；0 是整数，也是偶数，还是自然数；0 既不是正数也不是负数，是正数与负数的分界点，是中性数.

3. 分类

(1) 有理数
- 整数
  - 正整数
  - 0
  - 负整数
- 分数
  - 正分数
  - 负分数

(2) 有理数
- 正有理数
  - 正整数
  - 正分数
- 0
- 负有理数
  - 负整数
  - 负分数

专题精讲

例 1　(2006 年江阴市) 将正偶数按下表排列：

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	……
第一行	2				
第二行	4	6			
第三行	8	10	12		
第四行	14	16	18	20	
……					

根据上面的规律，则 2008 所在行、列分别是________.

分析　通过观察比较，发现第 1 行 1 个偶数，第 2 行 2 个偶数. 而 2008 是第 1004 个偶数，故可先求出 2008 所在行数，再判断其所在列数则不难.

解　$\because 1+2+3+\cdots+45=\frac{1}{2}\times(1+45)\times45=1035$

$1035-\frac{2008}{2}=31<45$

故 2008 在第 45 行.

又 $\because \frac{2008}{2}-(1035-45)=14$

$\therefore$ 2008 在第 45 行第 14 列.

反思说明　解答这类问题，需要用归纳的方法，通过观察、实验探究进行发现.

例 2　(2007 年益阳市) 我们把分子为 1 的分数叫做单位分数，如 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ 任何一个单位分数都可以拆分为

两个单位分数的和,如$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$,$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$,$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$,…

(1)根据对上述式子的观察,你会发现$\frac{1}{5}=\frac{1}{\square}+\frac{1}{\bigcirc}$,请写出□、○所表示的数;

(2)进一步思考,单位分数$\frac{1}{n}$(n是不小于2的正整数)$=\frac{1}{\triangle}+\frac{1}{\square}$,请写出△、□所表示的式,并加以验证.

分析 由观察知,拆分后的第一个分数的分母比原单位分数的分母大1,第2个单位分数的分母是前两个单位分数的分母之积.

解 (1)□表示的数为6,○表示的数为30;

(2)△表示的式为$n+1$,□表示的式为$n(n+1)$.

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}$

反思说明 通过观察寻求规律,是一个从特殊到一般的思维过程,要善于发现隐含不变的结论,这就是我们数学中常说的"化归"思想.

例3 (2007年北京市竞赛题)三个有理数a、b、c两两不等,那么在$\frac{a-b}{b-c}$、$\frac{b-c}{c-a}$、$\frac{c-a}{a-b}$中有几个是负数.

分析 依据多个非零有理数相乘除时,积商的符号由负因数的个数决定,当负因数的个数是偶数时,积商为正;当负因数的个数为奇数时,积商为负.故该题应从三个代数式的乘积中去分析.

解 因为$\frac{a-b}{b-c}\cdot\frac{b-c}{c-a}\cdot\frac{c-a}{a-b}=1$

所以可以判定$\frac{a-b}{b-c}$、$\frac{b-c}{c-a}$、$\frac{c-a}{a-b}$中只有一个正数,为确定起见,不失一般性,不妨设$\frac{a-b}{b-c}>0$.

此时,要么$a-b>0$且$b-c>0$,即$a>b>c$,要么$a-b<0$且$b-c<0$,即$a<b<c$.

当$a>b>c$时,有$a-b>0$,$b-c>0$,而$c-a<0$,易知$\frac{b-c}{c-a}$、$\frac{c-a}{a-b}$均为负数;

当$a<b<c$时,有$a-b<0$,$b-c<0$而$c-a>0$,易知$\frac{b-c}{c-a}$、$\frac{c-a}{a-b}$也均为负数.

所以$\frac{a-b}{b-c}$、$\frac{b-c}{c-a}$、$\frac{c-a}{a-b}$中含有两个负数.

反思说明 关于有理数的大小比较问题常用方法是求差法和求商法,也可结合数轴来灵活地进行比较.在目标不明确的题目中,分类逐一分析讨论是最佳方法之选.

例4 用代数法说明:一个三位数的百位数字与个位数字交换位置后,所得的新数与原来的三位数的差必是11的倍数.

分析 此题是一个证明题,可用字母表示各数位上的数字,用十进制数位表示法进行证明.

解 设原三位数的百位数字、十位数字、个位数字分别为a、b、c,则此三位数可表示为$100a+10b+c$,新三位数可表示为$100c+10b+a$,依题意$(100c+10b+a)-(100a+10b+c)=99(c-a)$.

因为$\frac{99}{11}=9$,$c-a$为整数,所以$99(c-a)$是11的倍数.

反思说明 关于多位数数位上的数字问题,总是用字母表示进行研究.

实战演练

A 能力训练

1. 若 n 是一个整数，且 $3n^2+4n+2003$ 是一个偶数，则 n 一定是(　　)

A. 奇数　　B. 偶数　　C. 任意整数　　D. 有时奇数，有时偶数

2. 从 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ 中删去两个数后使余下的四个加数之和恰等于 1，那么删去的两个加数是(　　)

A. $\frac{1}{4},\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4},\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{6},\frac{1}{10}$　　D. $\frac{1}{8},\frac{1}{10}$

3. 在如图所示的一排方格中，每个方格中除 9、7 外的其余字母各表示一个数，已知其中任何 3 个连续方格中的数之和为 19，则 $A+H+M+O$ 等于(　　)

A	9	H	M	O	X	7

A. 21　　B. 23　　C. 25　　D. 26

4. 一杯可乐售价 1.8 元，商家为了促销，顾客每买一杯可乐可获一张奖券，每三张奖券可兑换一杯可乐，则每张奖券相当于(　　)

A. 0.6 元　　B. 0.5 元　　C. 0.45 元　　D. 0.3 元

5. 2008 年奥运会在中国北京举行，参加男子足球比赛的共有 16 支代表队，平均分成 4 个小组首先进入小组赛，每个小组举行单循环比赛(每个球队都与本小组的其他队比赛一场)，选出两支球队进入 8 强，本次奥运会足球赛的小组赛共进行比赛场次为(　　)

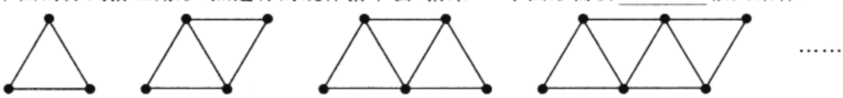
A. 12　　B. 24　　C. 32　　D. 48

6. 瑞士中学教师巴尔末成功地从光谱数据 $\frac{9}{5}$、$\frac{16}{12}$、$\frac{25}{21}$、$\frac{36}{32}$…中得到巴尔末公式，从而把光谱奥妙的大门打开了，请你按这种规律写出第 7 个数据是________.

7. 现有四个有理数 3、4、-6、10，将这四个数(每个数用且只用一次)进行加减乘除四则运算，使其结果等于 24，请你写出一个符合条件的算式________________.

8. 已知 $\frac{2}{1}\times2=\frac{2}{1}+2$，$\frac{3}{2}\times3=\frac{3}{2}+3$，$\frac{4}{3}\times4=\frac{4}{3}+4$…若 $\frac{a}{b}\times10=\frac{a}{b}+10$($a$，$b$ 都为正整数)，则 $a+b$ 的最小值是________.

9. 用火柴棒按下图的方式搭三角形，照这样的规律搭下去，搭第 10 个图形需要________根火柴棒.



10. 2001 减去它的 $\frac{1}{2}$，再减去剩余的 $\frac{1}{3}$，再减去剩余的 $\frac{1}{4}$…，依次类推，一直减到剩余数的 $\frac{1}{2001}$，那么最后剩余的数是________.

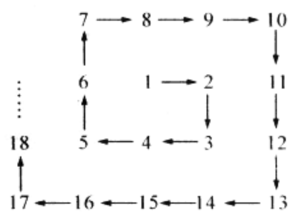
B 奥赛热身

11. 若 a、b 是正数，且满足 $12345=(111+a)(111-b)$，则 a，b 的大小关系是(　　)

A. $a>b$　　B. $a=b$

C. $a<b$　　D. 不能确定

12. 把自然数 1，2，3…按右图排列，从 1 开始，右边写 2 后向下转弯写 3，再向左转弯写 4，5 再向上……这样第一次转角的数是 2，第 2 次转角的数是 3，…那么第 20 次转角的数是________.



第 12 题图

13. 今有 11 只茶杯，杯口向上，每次将其中 4 只同时翻转，称为一次运动，能否经过若干次运动后使杯口全部向下.

14.（2006 年安徽省）教师在黑板上写出三个算式：$5^2-3^2=8\times2$，$9^2-7^2=8\times4$，$15^2-3^2=8\times27$，王华接着又写了两个具有同样规律的算式：$11^2-5^2=8\times12$，$15^2-7^2=8\times22$…

（1）请你再写出两个（不同于以上算式）具有上述规律的算式.

（2）用文字写出反映上述算式的规律.

（3）证明这个规律的正确性.

15. 有依次排列的三个数 3、9、8，对任意相邻的两个数，都用右边的数减去左边的数，所得之差写在这两数之间，可产生一个新的数串：3、6、9、−1、8，这称为第一次操作；第二次同样操作后，也可产生新的数串：3、3、6、3、9、−10、−1、9、8，继续依次进行操作，那么从数串 3、9、8 开始操作一百次以后，所产生的新数串的所有数字之和是多少？

第二讲　数轴与相反数

赛点解析

1. 数轴

原点、正方向、单位长度是数轴的三要素，三者缺一不可. 有理数可以用数轴上的点表示，但数轴上的点并不都代表有理数；数轴是联系数与形的桥梁，在数轴上的点表示的两个数，右边的数总比左边的数大.

2. 相反数

绝对值相等，只有符号不同的两个数是互为相反数，除零以外，相反数总是一正一负，成对出现的. 零的相反数是零.

在数轴上看，表示互为相反数的两个点分别在原点的两侧，而且到原点的距离相等.

(1)通常用 a 与 $-a$ 表示一对相反数.

(2)若 a 与 b 互为相反数，则 $a+b=0$，$|a|=|b|$.

(3)若 $|a|=|b|$，则 $a=b$ 或 $a=-b$(a 与 b 互为相反数).

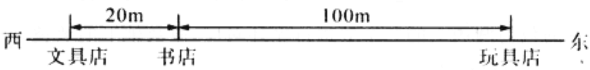
专题精讲

例1　(第 8 届“希望杯”)文具店、书店和玩具店依次坐落在一条东西走向的大街上，文具店在书店西边 20m 处，玩具店位于书店东边 100m 处，小明从书店沿街向东走了 40m，接着又向东走了 −60m，此时小明的位置是(　　)

A. 文具店　　B. 玩具店　　C. 文具店西边 40m　　D. 玩具店东边 −60m

分析　这种沿街走来走去的运动，可以画图求解，但往返次数多了，就容易弄错，如果抽象成数轴模型，转化为有理数的加减法，运算就会很方便了.

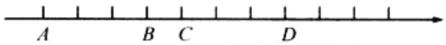
解　这是一道依靠建立简单的数轴模型来进行判断的问题，依题意可画图：



因为向东走了 −60m，也就是向西走了 60m. 所以小明从书店沿街向东走了 40m 后，接着又向西走了 60m，这时恰好来到文具店，故选 A.

反思说明　事实上，若选书店为原点 O，向东为正方向，则小明先走了 +40m，再走了 −60m，一共走了(40m)+(−60m)=−20m，即最后位置在原点左边 20m 处，即小明的位置在文具店. 把一个实数问题转化为数轴问题，这种建模思想在数学中应用很广.

例2　(第 15 届江苏竞赛)如下图，数轴上标出了若干个点，每相邻两点相距 1 个单位，数轴上还标出了 4 个点 A、B、C、D，它们对应的数分别是 a、b、c、d，且 $d-2\cdot a=10$，那么数轴原点是(　　)



A. A 点　　B. B 点　　C. C 点　　D. D 点

分析　由图可知 D 到 A 的距离是 7，可知 $d-a=7$.

再 $d-2a=10$，即可求出 a 的值，最后可分析出原点的位置.

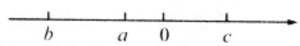
解　由图知：$d-a=7$，又 $d-2a=10$，$\therefore a=-3$，又因 A 与 B 的距离是 3，故选 B.

反思说明 像这类在数轴上确定点的位置的题，需结合图形和已知条件，结合点与点之间的距离，进行分析，做到数形结合就不难解得了．

例 3 （2007 年天津竞赛）已知 $a<0<c,ab>0,|b|>|c|>|a|$，化简 $|a+c|+|b+c|-|a-b|+|2a-c|$

分析 此题是一个关于去绝对值符号的问题，要去掉绝对值符号，必须要知道绝对值符号内的代数式的正负情况，不妨借用数轴求解．由已知，在数轴上表示出数 a、b、c 对应点的大致位置．

解 ∵$a<0<c,ab>0$，∴$b<0$，故在数轴表示 a、b 的点都在原点的左边，表示 c 的点在原点的右边；又∵$|b|>|c|>|a|$，说明表示 b 的点离原点的距离大于表示 c 的点离原点的距离，且都大于表示 a 的点离原点的距离，如右图所示．



观察数轴可知：$a+c>0,b+c<0,a-b>0,2a-c<0$．

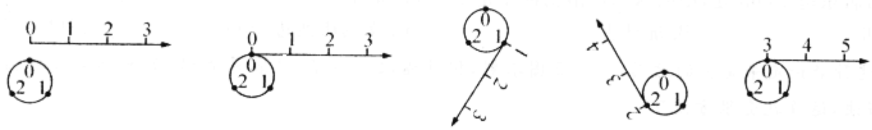
∴原式 $=(a+c)-(b+c)-(a-b)-(2a-c)=c-2a$

反思说明 数轴可直观地刻画出数的正负性及数的绝对值的大小关系，对解决含绝对值的化简问题实用有效．

例 4 （2007 年江西中考题）如下图所示，按下列方法将数轴的正半轴绕在一个圆（该圆周长为 3 个单位长度，且在圆周的三等分点处分别标有数字 0、1、2）上，先让原点与圆周上数字 0 所对应的点重合，再将正半轴按顺时针方向绕在该圆周上，使数轴上 1、2、3、4…所对应的点分别与圆周上 1、2、0、1…所对应的点重合，这样，正半轴上的整数就与圆周上的数字建立了一种对应关系．

（1）圆周上的数字 a 与数轴上的数 5 对应，则 $a=$________．

（2）数轴上的一个整数点刚刚绕过圆周 n 圈（n 为正整数）后，并落在圆周上的数字 1 所对应的位置，这个整数是________（用含 n 的代数式表示）．



分析 分清圆周上的数字与数轴上的数建立的对应关系的规律是解题的突破口．

解 依题意知，数轴上的数与圆周上的三个数进行循环对应，故数轴上的数被 3 整除的点对应 0，被 3 整除余 1 的对应 1，被 3 整除余 2 的对应 2，故（1）填 2，（2）填 $3n+1$．

反思说明 借助于数轴把应用问题数字化，直观化，然后利用数学知识来解题，体现了一种数学建模思想，这也是近年来数学中考和竞赛的热点题型．

实战演练

A 能力训练

1. 如果 $|a-2007|$ 与 $(b-2008)^2$ 互为相反数，那么 $(a-b)^{2009}=$（　　）

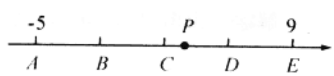
A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 2008

2. （希望杯）若 $a<0,b>0$，且 $|a|<|b|$，那么下列结果中是正数的是（　　）

A. $(a-b)(ab+a)$　　B. $(a+b)(a-b)$　　C. $(a+b)(ab+a)$　　D. $(ab-b)(a+b)$

3. 如图，点 A、B、C、D、E 在数轴上，且 A 点表示 -5，E 点表示 9，且 $AB=BC=CD=DE$，则图中 P 点接近下列哪一个数（　　）

A. -1　　B. 1　　C. 3　　D. 5



4. 互不相等的三个有理数 a、b、c 在数轴上的对应点分别为 A、B、C，如果 $|a-b|+|b-c|=|a-c|$，那么点 B(　　)

A. 在 A 点和 C 点的右边　　B. 在 A 点和 C 点的左边

C. 在 A 点和 C 点之间　　D. 以上三种位置都有可能

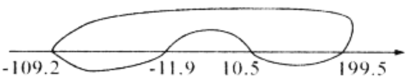
5. 一滴墨水洒在一个数轴上，根据所标出的数值，判定墨迹盖住的整数个数是(　　)

A. 285

B. 286

C. 287

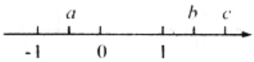
D. 288



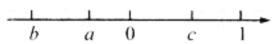
6. 已知点 A 在数轴上对应点所表示的为有理数 a，将 A 向左移 4 个单位长度后，再右移一个单位长度得到点 B，点 B 对应的有理数是 -2.5，则 $a=$________.

7. 在数轴上表示整数的点称为整点，现数轴上有一条长为 100 个单位长度的线段，则该线段覆盖住________个整点.

8. a、b、c 为有理数，在数轴上如下图所示，则式子 $|a|+|b|+|a+b|+|b-c|$ 化简的结果为________.



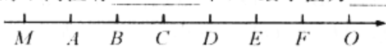
第 8 题图



第 9 题图

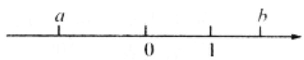
9. 有理数 a、b、c 在数轴上的位置如上图所示，若 $m=|a+b|-|b-1|-|a-c|-|1-c|$，则 $1000m=$________.

10. (江苏竞赛题)如下图，数轴上线段 MO(O 为原点)的七等分点 A、B、C、D、E、F 中，只有两点对应的数是整数，点 M 对应的数 $m>-10$，那么可以取的不同值有________个，m 最小值为________.



B 奥赛热身

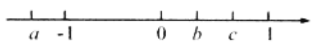
11. (2007 年"希望杯") a、b 为有理数，在数轴上如图所示，则(　　)



A. $\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<1$

C. $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<1$　　D. $1<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

12. (2007 年"希望杯")有理数 a、b、c 在数轴上对应的点的位置如图所示，给出下列四个命题：



A. $abc<0$

B. $|a-b|+|b-c|=|a-c|$

C. $(a-b)(b-c)(c-a)>0$

D. $|a|>1-bc$

其中正确的命题有(　　)

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

13. 已知有理数 a、b 且 $a>1$，$-1<b<0$，试将有理数 a、b、$-a$、$-b$、$-ab$ 按从大到小的顺序排成一列.

14. (2006 年"希望杯")电子跳蚤落在数轴的某点 K_0，第一步从 K_0 向左跳一个单位到 K_1，第二步由 K_1 向右跳 2 个单位到 K_2，第 3 步由 K_2 向左跳 3 个单位到 K_3，第四步由 K_3 向右跳 4 个单位到 K_4，……按以上规律跳了 100 步时，电子跳蚤落在数轴上的点 K_{100} 所表示的数恰是 19.94，则电子跳蚤的初始位置 K_0 表示的数是多少？

15. 若 a 为有理数，在 $-a$ 与 a 之间有 1999 个整数，问 a 的取值范围是什么？

16.（南京中考题）

（1）阅读下面材料（如图所示）：

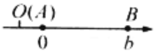


图1

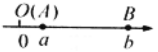


图2

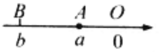


图3

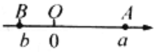


图4

点 A、B 在数轴上分别表示 a、b，A、B 两点之间的距离表示为 $|AB|$. 当 A、B 两点中有一点在原点时，不妨设点 A 在原点，如图 1，$|AB|=|OB|=|b|=|a-b|$；当 A、B 两点都不在原点时，

①如图 2，点 A、B 都在原点的右边 $|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=b-a=|a-b|$；

②如图 3，点 A、B 都在原点的左边，$|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=-b-(-a)=|a-b|$；

③如图 4，点 A、B 在原点的两边，$|AB|=|OA|+|OB|=|a|+|b|=a+(-b)=|a-b|$.

综上，数轴上 A、B 两点之间的距离 $|AB|=|a-b|$.

（2）回答下列问题：

①数轴上表示 2 和 5 的两点之间的距离是________，数轴上表示 -2 和 -5 的两点之间的距离是________，数轴上表示 1 和 -3 的两点之间的距离是________；

②数轴上表示 x 和 -1 的两点 A 和 B 之间的距离是________，如果 $|AB|=2$，那么 x 为________；

③当代数式 $|x+1|+|x-2|$ 取最小值时，相应的 x 的取值范围是________；

④求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-1997|$ 的最小值.

第三讲　绝对值

赛点解析

1. 绝对值的几何意义

$|a|$表示数 a 的点到原点的距离.

$|x-a|$表示数 a 与数 x 两点间的距离.

2. 绝对值的代数意义

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$$

3. 绝对值的基本性质

(1) $|a|\geqslant 0$　(2) $|ab|=|a|\cdot|b|$　(3) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$　(4) $|a|=|-a|$　(5) $|a|^2=|a^2|=a^2$

(6) $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$　(7) $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$

4. 去绝对值符号的常用方法

(1)由已知条件去绝对值符号.

(2)从数轴上读取信息去绝对值符号.

(3)运用"零点分段法"分类讨论去绝对值符号.

(4)双重绝对值一般先去内面绝对值,再去外面绝对值.

专题精讲

例1　(北京市竞赛题)计算:

$$\left|\frac{1}{2008}-\frac{1}{2007}\right|+\left|\frac{1}{2007}-\frac{1}{2006}\right|+\left|\frac{1}{2006}-\frac{1}{2005}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}-1\right|$$

分析　若直接计算会很繁琐,应从$|a|$的性质入手,想法去掉绝对值符号,以简便计算.由题中可知,每一绝对值符号内均为负数,而负数的绝对值等于它的相反数,即当 $a<0$ 时,$|a|=-a$.

解　原式$=-(\frac{1}{2008}-\frac{1}{2007})-(\frac{1}{2007}-\frac{1}{2006})-(\frac{1}{2006}-\frac{1}{2005})-\cdots-(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}-1)$

$=-\frac{1}{2008}+\frac{1}{2007}-\frac{1}{2007}+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2006}+\frac{1}{2005}-\cdots-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1$

$=-\frac{1}{2008}+1=\frac{2007}{2008}$

反思说明　去掉绝对值符号是绝对值化简的切入点,而绝对值符号内的数的正负性的判断是化简的关键.

例2　已知 a、b、c 是非零有理数,

(1)求$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{|ab|}{ab}+\frac{|bc|}{bc}+\frac{|ca|}{ca}+\frac{|abc|}{abc}$的最小值.

(2)若 $abc<0$,$a+b+c>0$ 且 $x=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$,试求代数式$(1-2x)^{2008}-2008x+2008$ 的值.

分析　(1)$\frac{a}{|a|}$的值只能是±1,解决本题的关键是对 a、b、c 的符号的所有可能情况进行分类讨论;(2)根据条件

$abc<0$，$a+b+c>0$，可推出 a、b、c 中两正一负．

解 (1)对 a、b、c 三个非零有理数，可按三个正数、两正一负、一正两负、三个负数四种情况加以讨论．由于式子具有轮换性，不妨按下列情况讨论：

①当 $a>0$，$b>0$，$c>0$ 时

原式$=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}+\frac{ab}{ab}+\frac{bc}{bc}+\frac{ca}{ca}+\frac{abc}{abc}=7$；

②当 $a>0$，$b>0$，$c<0$ 时

原式$=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{-c}+\frac{ab}{ab}+\frac{-bc}{bc}+\frac{-ca}{ca}+\frac{-abc}{abc}=-1$；

③当 $a>0$，$b<0$，$c<0$ 时

原式$=\frac{a}{a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c}+\frac{-ab}{ab}+\frac{bc}{bc}+\frac{-ca}{ca}+\frac{abc}{abc}=-1$；

④当 $a<0$，$b<0$，$c<0$ 时

原式$=\frac{a}{-a}+\frac{b}{-b}+\frac{c}{-c}+\frac{ab}{ab}+\frac{bc}{bc}+\frac{ca}{ca}+\frac{-abc}{abc}=-1$.

综上所述，所求代数式的最小值是-1.

(2)由 $abc<0$，知 a、b、c 三个数中有一个负数或三个全是负数，又由 $a+b+c>0$ 知 a、b、c 不能全为负数，所以 a、b、c 中有一负两正；根据 x 的轮换性，不妨设 $a>0$，$b>0$，$c<0$

则 $x=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{-c}=1$

∴代数式$(1-2x)^{2008}-2008x+2008$ 的值为$(1-2)^{2008}-2008\times1+2008=1-2008+2008=1$

反思说明 本题提示了解决绝对值问题可用分类讨论法来达到去掉绝对值符号的目的.

例3 (第16届"迎春杯")已知 $y=|x-a|+|x+19|+|x-a-96|$，如果 $19<a<96$，$a\leqslant x\leqslant96$，求 y 的最大值.

分析 根据已知条件去掉绝对值符号，找出 y 与 x 的关系.

解 ∵$a\leqslant x\leqslant96$，$19<a<96$

∴$x-a\geqslant0$，$x+19>0$，$x-a-96<0$

∴$y=x-a+x+19-(x-a-96)=x+115$

当 $x=96$ 时，$y_{最大}=96+115=211$

反思说明 解绝对值问题的关键是去掉绝对值符号. 本例是根据已知条件确定绝对值符号内的代数式的符号，从而去掉绝对值符号，本例求 y 的最大值的方法是：找出 y 与 x 的联系，弄清 y 与 x 的变化规律(x 越大，y 越大)，从而根据 x 的最大值，确定 y 的最大值.

例4 化简：(1) $\frac{2|x|-3x}{|2x-|5x||}$　　(2) $|x+5|+|2x-3|$

分析 (1)由于分母不能为0，因此 $x\neq0$，故有 $x>0$ 与 $x<0$ 两种情形进行讨论；

(2)将零点、-5、$\frac{3}{2}$ 在同一数轴上表示出来，就 $x<-5$，$-5\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$，$x>\frac{3}{2}$ 三种情形进行讨论.

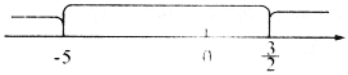
解 (1)∵分母不能为0，故$|2x-|5x||\neq0$，∴$x\neq0$

当 $x>0$ 时，原式$=\frac{2x-3x}{|2x-5x|}=\frac{-x}{3x}=-\frac{1}{3}$

当 $x<0$ 时，原式$=\frac{-2x-3x}{|2x+5x|}=\frac{-5x}{-7x}=\frac{5}{7}$

(2)由 $x+5=0$ 得 $x=-5$；由 $2x-3=0$ 得 $x=\frac{3}{2}$

将零点、-5、$\frac{3}{2}$都标在同一数轴上，这两点把数轴分成三部分，如图



当 $x<-5$ 时，原式 $=-(x+5)-(2x-3)=-3x-2$

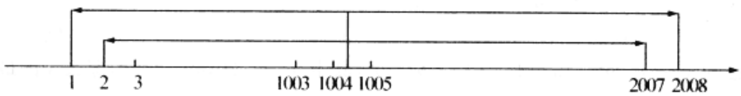
当 $-5\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$ 时，原式 $=x+5-(2x-3)=-x+8$

当 $x>\frac{3}{2}$ 时，原式 $=x+5+2x-3=3x+2$

反思说明 令各个绝对值内的代数式为0，找出零界点，再确定讨论范围的方法称为"零点分段法"．其一般步骤为：找零点，划范围，定正负，去符号，这种方法能有效地解决含多个绝对值的化简问题．

例5 求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-2008|$ 的最小值．

分析 由绝对值的几何意义知：$|x-a|$ 在数轴上表示数 x 与数 a 两点之间的距离，故求原式的最小值，就是在数轴上找出表示 x 的点，使它到1、2、3、…、2007、2008的点的距离和最小，如图所示：



解 由绝对值几何意义知，求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-2008|$ 的最小值，即在数轴上找出表示 x 的点，使它到1、2、3、…2008的点距离之和最小，如上图．

故当 $1004\leqslant x\leqslant 1005$ 时，原式的值最小，把 $x=1004$ 代入得：

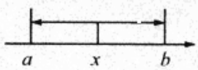
原式 $=|1004-1|+|1004-2|+|1004-3|+\cdots+|1004-2008|$

$=1003+1002+1001+\cdots+1+0+1+\cdots+1003+1004$

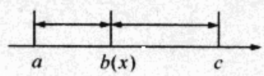
$=2(1+2+3+\cdots+1003)+1004=1008016$

反思说明 (1) $|a-b|$ 的几何意义是数轴上表示 a、b 两点间的距离．

(2)如图①当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$|x-a|+|x-b|$ 的值最小；



①



②

如图②当 $x=b$ 时，$|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的值最小．

(3)一般地，设 a_1、a_2、a_3、…、a_n 是数轴上依次排列的点表示的有理数，若 n 为奇数，则当 $x=\frac{a_{n+1}}{2}$ 时，$|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ 的值最小；若 n 为偶数，则当 $\frac{a_n}{2}\leqslant x\leqslant\frac{a_n}{2}+1$ 时，$|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ 的值最小．

实战演练

A 能力训练

1. $\frac{|1-9|-|9-3|}{1-9-9+3}$ 的值的相反数是(　　)

A. -7　　B. $\frac{1}{7}$　　C. $-\frac{1}{7}$　　D. 7

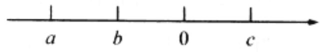
2. 使代数式 $\frac{|x-|x||}{x}$ 的值为正整数的数 x 是(　　)

A. 正数　　B. 负数　　C. 非零的数　　D. 不存在

3. 已知 $abc\neq0$，且 $M=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{abc}{|abc|}$，根据 a、b、c 不同的取值，M 有(　　)

A. 唯一确定的值　　B. 3种不同的值　　C. 4种不同的值　　D. 8种不同的值

4.（第15届“希望杯”）有理数 a、b、c 的大小关系如下图，则下列式子中一定成立的是（　　）



A. $a+b+c>0$　　B. $|a+b|<c$

C. $|a-c|=|a|+c$　　D. $|b-c|>|a-c|$

5. 对任意有理数 a，式子 $1-|a|$、$|a+1|$、$|-1|+a$、$|a|+1$ 取值不为0的是（　　）

A. $|a|+1$　　B. $1-|a|$　　C. $|a+1|$　　D. $|-1|+a$

6. 若 $1<x<3$，化简 $|x-3|+|2x-1|=$________.

7. 若 $|x|=5$，$|y|=4$，且 $|y-x|=y-x$，则 $x+y=$________.

8. 已知 a、b、c、d 都是整数，且 $|a+b|+|b+c|+|c+d|+|d+a|=2$，则 $|a+d|=$________.

9.（宁波中考题）已知 $x-y=4$，$|x|+|y|=7$，则 $x+y=$________.

10. 若 $a>0$，$b<0$，则使 $|x-a|+|x-b|=a-b$ 成立的 x 的取值范围是________.

B 奥赛热身

11.（“希望杯”试题）如果 $2a+b=0$，则 $\left|\frac{a}{|b|}-1\right|+\left|\frac{|a|}{b}-2\right|$ 等于（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

12.（河南省竞赛题）已知 $y=|x-b|+|x-20|+|x-b-20|$，其中 $0<b<20$，$b\leqslant x\leqslant 20$，那么 y 的最小值为________.

13.（“希望杯”试题）有理数 a、b、c 均不为0，且 $a+b+c=0$，设 $x=\frac{|a|}{b+c}+\frac{|b|}{a+c}+\frac{|c|}{a+b}$，求 $x^{19}-32x+2004$ 的值.

14. 设 a、b、c、d 都是有理数，若 $|a+b|=4$，$|c+d|=2$，且 $|a-c+b-d|=c-a+d-b$，求 $a+b+c+d$ 的最大值.

15. 一条街上有5栋楼，按从左到右顺序编号为1、2、3、4、5，第 K 号楼中恰有 K（$K=1,2,3,4,5$）个 A 厂的职工，相邻两楼之间的距离为50m，A 厂打算在直街上建一车站，为了使这5栋楼中所有 A 厂职工去车站所走的路程和最小，车站应建在距1号楼多远处？