工程数学教程

·概率统计·

罗 铁 山　主 编

科学技术文献出版社

工程数学教程

·概率统计·

主　编　罗铁山
副主编　易昆南　肖志祥

科学技术文献出版社

（京）新登字 130 号内容简介

内 容 简 介

本书内容包括随机事件，随机事件的概率，条件概率，事件的相互独立性，随机变量，随机变量的数字特征，数理统计的基本知识，参数估计，假设检验，回归分析，正交试验，书末附有习题答案。

本书条理分明，通俗易懂，适于作为高等专科学校各专业《工程数学——概率统计》课程教材，也可供工程技术人员及管理人员参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

工程数学教程/罗铁山等主编．—北京：科学技术文献出版社，1996

ISBN　7-5023-2708-8

Ⅰ．工…　Ⅱ．罗…　Ⅲ．工程数学-教材　Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 03455 号

科学技术文献出版社出版发行

（北京复兴路 15 号　邮政编码 100038）

河北省抚宁县印刷厂印刷

1996 年 7 月第 1 版　　1996 年 7 月第 1 次印刷

850×1168 毫米　32 开本　5.5 印张　142 千字

印数：1-5,000 册

定价：（共二册）13.00 元

本册定价：6.50 元

前　　言

本书是根据国家教委印发的《高等工程专科学校概率统计课程教学基本要求》，本着以应用为目的，以必需、够用为度的原则组织编写的。

在编写中，我们力求做到概念准确，重点突出，详略适当，通俗易懂。为此对书中出现的定理、性质等多数作出了证明，并配置了部分例题及相应的习题，其题量和难易程度适中。为方便读者自学，书末还附有部分习题答案。

参加本书编写的有：肖志祥（第一章）、肖冠云（第二章）、肖永红（第三章）、叶青松（第四章）、易昆南（第五章）、罗铁山（第六章）。全书由罗铁山统稿。

由于编者水平有限，时间又比较仓促，书中难免存在不妥之处，恳请专家、读者给予批评和指正。

编者

一九九六年四月

目　　录

第一章　随机事件与概率

§1.1　排列与组合

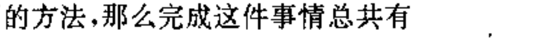
排列组合在概率计算中是很重要的工具之一，很多计算概率的问题都归结为计算有关的排列组合问题，在计算排列数和组合数时，要用到计数的一个基本原理——乘法原理.

一、乘法原理

例 1　某人从甲地到乙地有 3 条路可走，从乙地到丙地有 2 条路可走，若从甲地经乙地再到丙地，则总共有

$$N=3\times2=6$$

种不同的路线可走.



从这个例子我们可以推得下面的一般性结论：

做一件事情，完成它依次连续有 $K(K\geqslant1)$ 个不同的步骤，分别记作 $A_1,A_2,\cdots A_K$，而完成第 i 个步骤 $A_i(i=1,2,\cdots K)$ 有 n_i 种不同的方法，那么完成这件事情总共有

$$n_1\times n_2\times\cdots\times n_K$$

种不同的方法.

二、不重复排列

定义　从 n 个不同元素中，每次取出 m 个 $(1\leqslant m\leqslant n)$ 不同元

素，依某种次序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的排列.

当 $m=n$ 时，这样的排列称为全排列.

当 $1\leqslant m<n$ 时，这样的排列称为选排列.

用 P_n^m 表示从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的排列种数.

由乘法原理可知：

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

例 2　由 1,2,3,4,5 这 5 个数字能组成多少个二位整数，并且这些二位整数的个位与十位上的数字不能相同？

解　能组成没有重复数字的二位整数的个数是

$$P_5^2=5\times4=20.$$

例 3　10 个人排成一排，问有多少种不同的排法？

解　不同的排法共有 $P_{10}^{10}=10!=3628800$ 种

三、可重复排列

从 n 个不同的元素中，每个元素可重复抽取，这样抽取 m 个，依次排成一列，称为一种可重复排列.

由乘法原理可知，从 n 个不同元素中取出 m 个元素的可重复排列的种数为 n^m.

例 4　某地的机动车牌号由四位数字组成，问最多可排多少个不同的车牌号？

解　任意一个车牌号，都是一种可重复排列，即从 0～9 这十个数字中，每次取出 4 个的可重复排列，故能排出 10^4 个不同的车牌号.

四、组合

定义　从 n 个不同的元素里，每次取出 m 个不同的元素（$1\leqslant$

$m \leqslant n$)，不管怎样的顺序并成一组，称为从 n 个不同的元素里每次取出 m 个不同元素的组合.

所有不同组合的种数用 C_n^m 表示，其计算公式为

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{(n-m)!\ m!}$$

解决实际的排列组合问题时，注意所求问题或问题的某一步骤是否与次序有关，与次序有关的部分属于排列问题，与次序无关的部分属于组合问题.

例 5　从 6 名男生和 4 名女生中，选出 3 名男生，2 名女生分别担任 A、B、C、D、E 五项工作，问有多少种安排方法?

解　这个问题分两个步骤，第一步：从这 10 名学生中选出 3 名男生，2 名女生，(这与次序无关，属于组合问题，选法有 $C_6^3 \cdot C_4^2$ 种)；第二步：对选出的 5 名学生安排 A、B、C、D、E 五项工作(这与次序有关，属于排列问题，有 P_5^5 种不同的安排方法)，所以此问题的答案为

$$C_6^3 \cdot C_4^2 \cdot P_5^5 = 14400 \text{ 种}$$

§1.2　随 机 事 件

在人类认识自然，改造自然的过程中，人们常遇到两类不同现象，一类是确定性现象，例如重物在高处总是垂直落到地面；在标准大气压下，水加热到 100℃ 必然沸腾等. 另一类现象具有不确定性，称为随机现象，例如掷一枚质地均匀的对称的硬币，可能正面朝上，也可能反面朝上；新生儿可能是男也可能是女等. 这类现象的特点是：①在一定条件下，具有多种可能结果，但究竟发生哪一种结果，事先不能肯定. ②在相同条件下，对随机现象进行大量多次观察时，随机现象的结果呈现某种规律性.

概率统计就是要研究这种规律性.

一、随机试验

对自然现象进行观察或进行一次科学试验统称为试验，概率论里讨论的试验具有下列特点：

(1)在相同条件下，试验可以重复进行.

(2)试验可能的结果不止一个. 但试验前可以明确知道所有可能的结果.

(3)每次试验的确定结果，事先不能准确预言.

具有上述特点的试验，称为随机试验. 简称为试验，通常用 E 表示.

对每一个随机试验，总是在一定的试验目的之下讨论试验结果的规律性，例如从一批灯泡中任取一只进行通电试验，如果试验目的是检验产品是否合格，则试验结果为“合格品”或““不合格品”，如果试验目的是检验其寿命，则试验结果为所有可能的时间.

二、随机事件

在随机试验中，在试验目的之下的每一个可能结果，称为随机事件，简称事件，用字母 A、B、C、……表示． 例如随机试验 E_1：掷一枚硬币观察正面或反面朝上，则 $A=\{$正面朝上$\}$和 $B=\{$反面朝上$\}$为 E_1 的随机事件；又例如随机试验 E_2：观察一名士兵一次射击打靶命中的环数，则 $A=\{$命中环数小于 8$\}$，$B=\{$命中 9 环$\}$等为 E_2 的随机事件.

为了研究方便，还需注意下面两类事件.

在每次试验中，必然发生的事件，称为必然事件，记作 Ω，例如在试验 E_2 中，$\Omega=\{$命中环数不超过 10$\}$为 E_2 的必然事件.

在试验中必然不发生的事件，称为不可能事件，记作$\varnothing$，例如在试验 E_2 中，$\varnothing=\{$命中环数大于 10$\}$为不可能事件.

规定必然事件 Ω 和不可能事件$\varnothing$为随机事件.

在随机试验中，有些事件可以看作是由试验的若干个直接结

果组合而成，这类事件称为复合事件，例如试验 E_2 中 $A=\{$命中环数小于 8$\}$为复合事件，它可以由"命中 0 环"、"命中 1 环"…"命中 7 环"这 8 个试验的直接结果组合而成.

在随机试验中，不能分解成其它事件组合的最简单的事件称为基本事件，用 W 表示. 一个基本事件，也就是试验的一个直接的可能结果. 例如试验 E_2 的基本事件为 $W_i=\{$命中 i 环$\}(i=0,1,2\cdots\cdots10)$.

如果用集合的观点来认识必然事件，不可能事件、基本事件和复合事件，会对研究这些事件之间的关系和运算带来方便.

以试验中的每一个基本事件作为元素，由所有基本事件构成的集合称为样本空间，用 Ω 表示. 每一个基本事件也称作样本点，这样复合事件就是样本空间的子集，每一个基本事件也可看作是样本空间的单点集.

不可能事件不包含任何基本事件则为空集.

随机事件 A 发生，当且仅当 A 所包含的基本事件至少有一个发生.

将样本空间做为一个事件，由于样本空间包含了所有基本事件，所以，样本空间做为一个事件为必然事件.

例 1 试验 E_3：掷一颗骰子，观察出现的点数，记 $W_i=$出现 i 点，$i=1,2\cdots6$，则 E_3 的基本事件为$\{W_i\}$，$i=1,2\cdots\cdots6$

样本空间 $\Omega=\{W_1,W_2,\cdots\cdots W_6\}$

例 2 试验 E_4：从一批灯泡中任取一只，观察是否合格，记 $W_1=$合格，$W_2=$不合格. 则

基本事件为$\{W_1\}$，$\{W_2\}$

样本空间 $\Omega=\{W_1,W_2\}$

例 3 在例 2 中，观察灯泡使用寿命，用 t 表示灯泡的寿命，则：

基本事件：$\{t\}t$ 为非负实数.

样本空间 $\Omega=\{t;t\geqslant0\}$

例 4 试验 E_6：掷一枚硬币，分别掷 5 次. 观察每 5 次中，正、反面朝上的情况，则

样本空间 Ω 由 $2^5=32$ 个基本事件组成：(正，正，正，正，正)；(正，正，正，正，反)；……；(反，反，反，反，反).

三、事件的关系和运算

随机事件做为样本空间 Ω 的子集，下面用集合论的方法和几何图形来讨论事件的关系和运算.

设试验 E 的样本空间为 Ω，设 $A,B,C,A_K,B_K(K=1,2\cdots\cdots)$ 为 E 中的事件.

事件的运算（并、积、差）

1. 事件的并

"事件 A 与 B 至少有一个发生"这一事件称为 A 与 B 的并（和），记作 $A\cup B$ 或 $A+B$.

图 1.1 中的阴影部分即为 $A\cup B$.

假设 A、B 不是空集，用集合论的语言表达即为 $W\in A\cup N$，当且仅当 $W\in A$ 或 $W\in N$.

2. 事件的积

"事件 A 与 B 同时发生"这一事件，称为 A 与 B 的积，记作 $A\cap B$ 或 AB.

图 1.2 中阴影部分即为 AB.

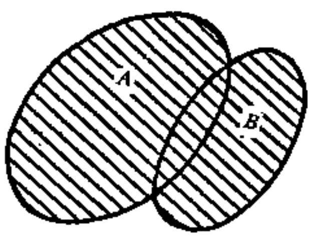


图 1.1

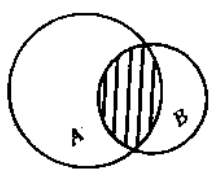


图 1.2

假设 A、B 非空，用集合论的语言表达即为

$W\in A\cap B$，当且仅当 $W\in A$ 且 $W\in B$.

事件的并运算和积运算都可以推广到有限多个事件的情形.

$A=\bigcup\limits_{i}^{n}A_i$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个事件发生"这一事件.

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$ 表示"$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 同时发生"这一事件.

有时还需考虑无穷多个事件的并运算和积运算.定义与前面有限个事件情形类似.

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \qquad B=\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$$

3. 事件的差

"事件 A 发生，而事件 B 不发生"这一事件，称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

图 1.3 中阴影部分即为 $A-B$

假设 A 非空，用集合论的语言表达即为

$W\in A-B$ 当且仅当 $W\in A$ 且 $W\notin B$.

事件之间的关系(包含，互不相容，互逆)

4. 事件包含

如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 含于事件 B，图 1.4 中所示 $B\supset A$.

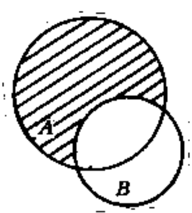


图 1.3

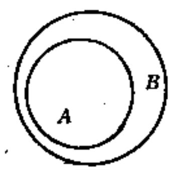


图 1.4

如果 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，则称事件 A,B 相等，记作 $A=B$.

5. 事件互不相容

如果事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥).

图 1.5 中 A 与 B 互不相容.

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件是互不相容的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容.

显然，同一试验中，任意两个基本事件是互不相容的.

6. 事件互逆

同一试验中，若事件 A 与 B 必有一个发生，且仅有一个发生，即 A 与 B 同时满足 $A\cup B=\Omega$；$AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互逆，或称 A 与 B 互为对立事件，记作 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$，也称 $\overline{A}$ 为 A 的逆事件.

图 1.6 中事件 A 与 B 为对立事件，B 为图中阴影部分.

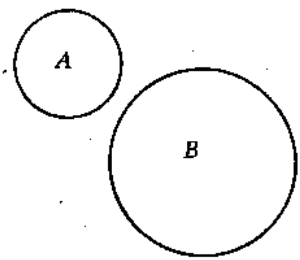


图 1.5

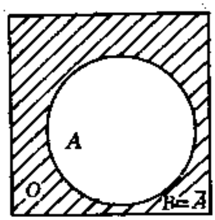


图 1.6

由事件的积运算和事件互逆的定义可知 $A-B=A\overline{B}$

例 4 试验 E：某人向指定目标射击三次，观察是否击中目标，记 $A_i=\{$第 i 次击中目标$\}$，$i=1,2,3$. 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1)$A=\{$只击中一次$\}$

(2)$B=\{$至少击中一次$\}$

解 (1)事件“只击中一次”可以是第一次击中，第二，三次未

击中($A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$)；或第二次击中，第一，三次未击中($\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$)；或第三次击中，第一，二次未击中，($\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$)

则 $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

且 $A_1\overline{A}_2\overline{A}$，$\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ 和 $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 互不相容.

(2)事件“至少击中一次”可以表示成 A_1,A_2,A_3 中至少有一个发生，即 $B=A_1\cup A_2\cup A_3$.

下面将概率论与集合论中的术语对照列表如下：

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	空间，全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
$\{W\}$	基本事件	单点集
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集或补集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 互不相容(互斥)	A 与 B 没有公共元

由集合的运算规律可知事件的运算满足以下规律：

交换律：$A\cup B=B\cup A$，　$AB=BA$

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，　$(AB)C=A(BC)$

分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$

$$(AB)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

对偶公式：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$$

§1.3　随机事件的概率

观察一个随机试验中的各个随机事件，一般来说，总会发现有些随机事件发生的可能性大些，有些随机事件发生的可能性小些，有些随机事件发生的可能性彼此大致相同，这就需要用一个数量指标来定量地刻划随机事件发生的可能性大小，这个数量指标就叫做事件的概率.

一、古典概率

掷一枚均匀的硬币，由于硬币是均匀对称的，所以，有理由认为出现"正面"和"反面"的可能性都一样，人们也就自然地认为出现"正面"和"反面"的概率都是$\frac{1}{2}$.

一般地，若随机试验 E 有如下特点：

1)一个试验只有有限个可能出现的结果，即样本空间中只有有限个基本事件$\{W_1\}$，$\{W_2\}$，……$\{W_n\}$.

2)在一次试验中，各个基本事件发生的可能性相等.

则对试验 E 中的任意事件 A，其概率的计算式为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}(m)}{\text{基本事件总数}(n)}=\frac{m}{n} \qquad (3.1)$$

这样定义的概率称作古典概率，具有特点 1)，2)的试验，称为古典试验.

由 $P(A)$的表达式(3.1)可知，计算 $P(A)$时，只需知道事件 A 所包含的基本事件个数 m，基本事件总数 n.

例 1　某市电话号码由 0，1，2，…9 共十个数字中的任意七个数字组成，假设某用户的电话号码是 2823211，问当不知道这个电话号码时，一次就能拨对该用户电话号码的概率是多少？

解　依题意，所有可能的电话号码有 10^7 个，当不知道电话号码时，拨这 10^7 个电话号码中的任一电话号码的可能性是一样的.

令事件 $A=\{$一次就拨对该户电话号码$\}$，基本事件总数 $n=10^7$，而事件 A 只含 1 个基本事件，由(3.1)式知

$$P(A)=\frac{1}{10^7}=0.0000001$$

由此可知，当不知道用户电话号码时，一次拨号就能拨对的可能性是很小的.

例 2　一批产品共 200 件，其中恰有 6 件废品，求(1)这批产品的废品率；(2)任取三件，至多有一件废品的概率.

解　(1)设 $A_1=\{$任取一件为废品$\}$，这批产品的废品率也就是从中任取一件为废品的概率.

由(3.1)知　$P(A)=\dfrac{6}{200}=0.03$

(2)设 $A_2=\{$任取三件，至多有一件废品$\}$

$B_0=\{$任取三件，恰好都不是废品$\}$

$B_1=\{$任取三件，恰有一件废品$\}$

基本事件总数 C_{200}^3(从 200 件产品中任取三件的取法)，事件 B_0 所含基本事件个数 C_{194}^3，事件 B_1 所含基本事件个数 $C_6^1\cdot C_{194}^2$.

由于 $A_2=B_0\cup B_1$，而且 B_0 与 B_1 是互斥的.

所以

$$P(A_2)=\frac{C_{194}^3+C_6^1\cdot C_{194}^2}{C_{200}}=0.9977$$

例 3　设有 5 个球，每个球等可能地落入 8 个盒子中的每一个盒子，求指定的 5 个盒子中各有一球的概率？

解　设 $A=\{$指定的 5 个盒子中各有一球$\}$，每个球等可能地落入 8 个盒子中的任一个，所以 5 个球落入 8 个盒子中的所有形式为 8^5 种，即基本事件总数 $n=8^5$，而指定的 5 个盒子中各有一球的形式有 $5\times4\times3\times2\times1=5!$ 种，即事件 A 所含的基本事件数 $m=5!$ 由(3.1)式得

$$P(A)=\frac{5!}{8^5}=0.0037$$