志鸿优化系列丛书

丛书主编 任志鸿

YING ZAI KE TANG

赢在课堂

高中同步大纲版

◎让每一节课堂时间都成为真正的黄金时间！

◎让每一节课堂的学习目标完美实现！

◎让每一位学子都在课堂中得到发展！

数学

高一下册

西苑出版社

责任编辑／孟祥纯
封面设计／邢　丽 王苁苁

智慧的开发和能力的提升，永远没有捷径，唯有在课堂全心全力学习，才能让你决胜于课堂内外；

黄金时间凝聚在课堂，锦绣前程根基在课堂，一切的一切，赢在课堂！

赢在课堂

- 激发兴趣，课堂学习生动化
- 以质为要，栏目设计新颖化
- 以实为先，知识梳理网络化
- 能力立意，训练流程科学化

★赢在课堂系列丛书书目★

语文（高一上、下册）　数学（高一上、下册）　英语（高一上、下册）　物理（高一上、下册）
化学（高一上、下册）　历史（高一上、下册）　政治（高一上、下册）　地理（高一上、下册）

语文（高二上、下册）　数学（高二上、下册）　英语（高二上、下册）　物理（高二上、下册）
化学（高二上、下册）　历史（高二上、下册）　政治（高二上、下册）　生物（高二上、下册）
地理（选修一、选修二）　地理（区域地理）

语文（高三全一册）　数学（高三全一册）　英语（高三全一册）　物理（高三全一册）
化学（高三全一册）　历史（高三全一册）　政治（高三全一册）　生物（高三全一册）

ISBN 978-7-80210-335-1
9 787802 103351 >
定价：22.00 元

志鸿优化系列丛书

YING ZAI KE TANG

赢在课堂

高中同步大纲版

丛书主编 任志鸿

本册主编 赵兰义

编　　者 王洪国 刘炳堂 曹全明 张耀学

覃奇波 张英利

数学

高一下册

西苑出版社

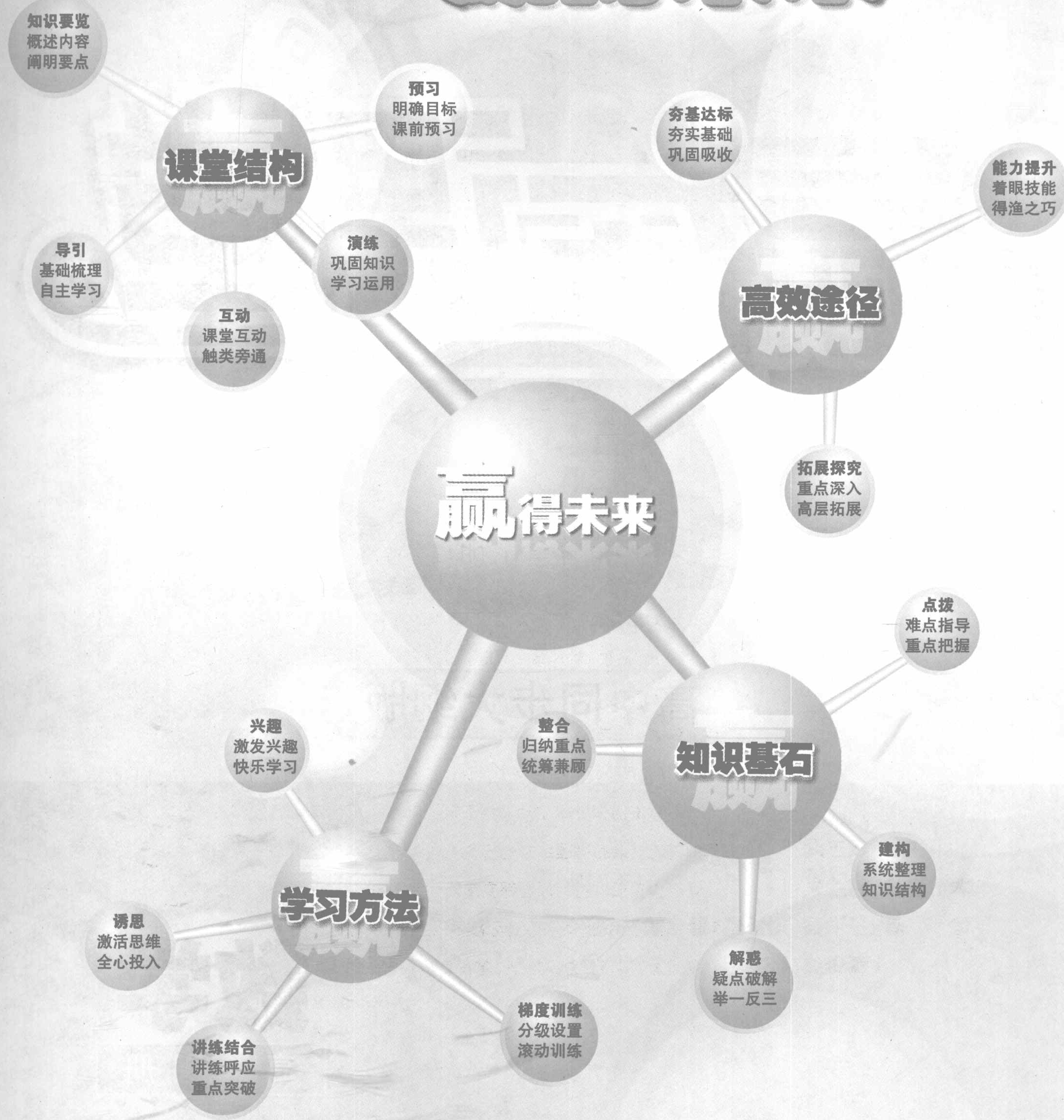
赢在课堂

这不是简单的物理变化，而是深刻的化学聚变。

栏目结构

赢的课堂结构+赢的学习方法+赢的知识基石+赢的高效途径

赢得未来



相信每一个人都向往着能够在一个明媚的夏日化蛹成蝶，把十年漫长的蜕变结束在一片灿烂中。我也不例外。也许我是幸运者，能够顺利地破茧而出。在走进燕园之前，我如实记下这破茧的方法——

破茧而出（代前言）

韦薇，女，1988 年出生，山东省淄博市实验中学毕业。2006 年高考中以 679 的高分成为山东省状元，现就读于北京大学。

在谈及真正的学习方法之前，我想借用米卢的一句话：态度决定一切。尽管中国队的世界杯之旅依然令人不堪回首，但绿茵场内的汗水和绿茵场外的泪水第一次诠释了足球的含义，这是它让人神魂颠倒群情振奋的原因。同样，寒窗下的生活是暗无天日苦不堪言，还是妙趣横生引人入胜，决定者是自己的态度。我一直相信，学习中不缺少乐趣，而是缺少发现。我也一直相信，兴趣是最好的老师，所以我不断地发现学习中点滴的乐趣，并刻意地去强化这种乐趣，这使我对每一学科都抱着极大的热情。比如，我很喜欢数学测验时的充实和紧张，喜欢完成一个较难题目后通身舒畅的惬意感觉，就因此喜欢数学课；我还喜欢化学的所有内容。这也可能与一个人的世界观人生观有关，就像看到一枝玫瑰，有人赞叹花的美丽，有人却只注重花下的尖刺。每个人都应把自己培养成前者。

除了兴趣之外，方法更是重中之重。然而学习方法不能用一句话概括，也不能一天养成，各学科的方法也不尽相同。我认为悟透每一学科的“灵魂”非常重要。比如语文要求的是一个人的文学素养，这就需要大量的积累。在我下定决心高考作文写议论文之后，我看书时就很注意搜集论据，而不是走马观花敷衍了事；翻过一遍《现代汉语词典》，成语也就掌握了大概。有目的就有成功。至于数学，培养数学思想比较关键，比如：转化函数，数形结合等等。这一般是在平时做题目之后多思考总结，多与同学交流积累起来的。现在有一句话很流行：“你有一个苹果，我有一个苹果，我们相互交换，每人还是一个苹果；你有一种思想，我有一种思想，我们相互交换，每一个人都有了两种思想。”可见同学间相互交流讨论的好处。英语方面我一直注意加大词汇量，平时出现频率较高的词汇就主动掌握下来，高考时做阅读理解就游刃有余了，毕竟读懂是理解的前提。最后是理综中的三科：理、化、生，理解就显得更重要了，物理定律情景、化学反应实质、生物原理都要求理解而不只是记住。遇到不懂的问题，要及时地钻研解决，实在不行的话，再问问老师，不能因一时的懒惰而束之高阁；另外，这方面做题也要适量，重点是总结题型，掌握方法，不要深陷题海。

古人有句话流传至今："书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。"对此，我只能同意前半句。但我所理解的"书"不是教科书的代名词，它还包括文学书、科普书等等；"勤"也不是指焚膏继晷闻鸡起舞，而是在应该学习的时候绝不懒惰。就是说上课的时候尽量控制自己的思想，及时对知识进行整理；课后，结合使用"志鸿优化"深入思考；自习前做一个简单的计划，保证一节课紧张有序，不至于忙得焦头烂额或是无所事事。再就是勤复习，我只是一个普通的人，没有过目不忘的本领，所以我也只能用最普通的记忆方法，多看文、理综教辅书，隔一定的时间再重新温习。只要在学校中做到"勤"，回家后又何必三更睡五更起啊？

至于考试，我认为心态是关键，对平时的小测验，要有气度，有道是"宠辱不惊，看庭前花开花落，去留无意，望天上云卷云舒"。考试的目的绝不是看得了多少分，排在第几名，而是为了找出学习中的不足之处。每一次拿到试卷，我所关心的是我哪道题错了，错误的原因是什么，用什么方法来补救；整理错题时也绝不仅仅是写上正确答案，而是点明做题时的障碍，并考虑其他特殊的解法。对于高考，我想说的是："宜未雨而绸缪，勿临渴而掘井。"考试之前的挑灯夜战是徒劳无益的，知识的积累、能力的培养应当贯穿在整个学习生涯中。高考之前要做的，只是树立信心，减轻压力，这样可从降低目标来实现。在平时的学习中，我把目标定在清华、北大，但在考试前，我把它修改为浙大。我对自己说无论如何，就算发挥得再差，浙大也是没有问题的，因此置身于同考场众多的严肃面孔中，我相信我的表情一定轻松而随意，这可能是我在同水平的竞争者中胜出的原因吧。

最后我想谈一谈课外书的问题。有时我发现身边不少同学随便找本书看得津津有味，甚至抛下作业不做，自习课变成阅读课。我不反对大量涉猎课外知识，但我有一个原则，先保证必须的功课。我一般是在做完一整套题后感觉累了，才看课外书，或者在晚上回家后看。书的选择也有标准，我觉得有三种书值得我们去看：一种是有思想的，像余秋雨的散文，浓郁的历史厚重感充溢其中；一种是有美感的，像《大明宫词》，无论场景还是语言都美不胜收；再一种是有知识的，像一些历史性的、科技性的书。其实这些对一个人的文风甚至于心态都是有影响的。正如古语所说："与善人居，如入芝兰之室，久而不闻其香；与恶人居，如入鲍鱼之肆，久而不闻其臭。"如果说人影响的是生活环境，书影响的则是思想环境，同样重要。

最后送大家一句话："春风得意，天下谁人不识君？任重道远，舍我其谁！"祝愿每个人都对自己充满信心，等待破茧而出的一刻！

YING ZAI KE TANG
赢在课堂

目录 CONTENTS

CONTENTS

第四章　三角函数

本章概要

内容提要

本章包括任意角的三角函数、两角和与差的三角函数、三角函数的图象和性质三部分内容. 第一部分主要是引进任意角的概念，通过弧度制，使角和实数一一对应起来，从而把三角函数的定义看成是以实数为自变量的函数. 为了求任意角的三角函数值，又根据三角函数定义导出了同角三角函数的关系式和诱导公式. 第二部分主要介绍两角和与差的三角函数公式、倍角的三角函数公式. 这些公式的基础是两角和的余弦公式. 第三部分先以三角函数线为工具，作出了正弦函数和余弦函数的图象，介绍了"五点法"作其图象简图的方法，再从其图象直观地归纳出这两种函数的性质(定义域、值域、周期性、奇偶数、单调性)，进而研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$与 $y=\sin x$ 的图象关系，最后，简要地介绍了正切函数的图象和性质以及已知三角函数值求角.

学法建议

三角函数在函数中是较困难和复杂的函数，公式多、性质多，特别是周期性，初学者都不容易理解，在学习时应注意：

1. 学习任意角和任意角的三角函数时，要首先复习初中已学过的角的概念和锐角三角函数的定义，以旧带新，由浅入深.

2. 三角公式较多，要抓住基本公式，借助图表、口诀等记准确，有关的导出公式不必死记硬背，但要熟练推导.

3. 学会使用单位圆，无论是弧度制还是三角函数线，都与单位圆有密切的联系，已知三角函数值求角也可借助单位圆，深刻领会单位圆中的角与三角函数值的关系，才能正确地使用单位圆解题.

4. 学会数形结合思想方法. 由"五点法"作出三角函数的图象，再由图象总结三角函数的性质，这个过程本身就是数形结合，用数形结合可解答三角函数的很多问题.

5. 掌握转化与化归的数学思想. 无论证明三角恒等式，还是化简三角函数式都要用到等价转化的思想. 要学会自觉地运用等价转化的数学思想，使复杂的问题变简单，使困难的问题变容易.

6. 三角函数的公式很多，问题解决的途径也很多，要学会通过条件和目标展开联想，找出最佳途径，特别是使用的三角公式要用基本的最临近的公式.

7. 解析式较复杂的三角函数问题或实际问题转化为三角函数问题，要转化为最常见的三角函数解析式，再利用已学过的知识处理. 如：$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，再利用函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象和性质研究解决.

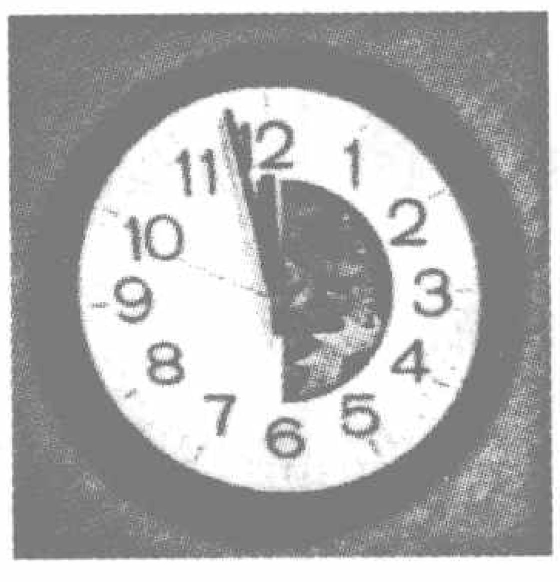
一　任意角的三角函数

4.1　角的概念的推广

预习 · 导引

激趣诱思

钟表的时针与分针总是构成一个大于等于 0°小于 360°的角. 当把一天的凌晨 0 点时刻，时针的位置作为角的一边，经过 3 个小时后时针的位置作为角的另一边，则两边构成的角为 90°. 现在反过来，钟表上的时针转过 90°就经过了 3 个小时，转过一周(360°)就经过了 12 个小时，那么经过一昼夜、两昼夜钟表的时针转过了多少度呢？显然，时针旋转形成的角是大于 360°的角，我们如何认识这样的角呢？学习了本节角的概念的推广后，你就会一一都明白了.



新知预习

1. 正角、负角和零角：按逆时针方向旋转所形成的角叫做______；按顺时针方向旋转所形成的角叫做______；当一

条射线没有作任何旋转时，也形成一个角，叫做______.

2. 与 α 角终边相同的角的表示：所有与 α 角终边相同的角，连同 α 角在内，都可以表示为集合______________________.

3. 象限角：在直角坐标系内，使角的顶点与坐标原点重合，角的始边在 x 轴的正半轴上，那么角的终边落在第几象限，就说这个角是__________（或说这个角属于第几象限）．如果角的终边落在__________上，那么这个角就不属于任何象限.

知识结构

- 角的概念
  - 角的分类
    - 正角
    - 负角
    - 零角
  - 角的表示
    - 象限角
    - 终边相同的角

互动课堂

重难点拨

一、角的有关概念的理解

一个角可以看作平面内一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形，正确理解角的概念的关键是运用运动的观点，抓住终边的旋转方向.

【例 1】下列命题中正确的是 ……………………………（　　）

A. 终边相同的角一定相等

B. 锐角都是第一象限角

C. 第一象限的角都是锐角

D. 小于 90° 的角都是锐角

思路分析：选择题可以逐一分析，甚至画图研究，淘汰错误选项，保留正确选项．这一方法也叫淘汰法，是解答选择题的好方法.

解：根据正角、负角、锐角、象限角的定义，结合排除法直接判断.

30° 角与 390° 角终边相同而它们显然不相等，故排除 A.

390° 是第一象限角但不是锐角，

从而排除 C.

-30° 角小于 90° 角，而 -30° 角不是锐角，

故排除 D. 所以选 B.

答案：B

点拨提示：解由命题构成的选择题，利用举反例排除错误命题是一种十分有效的方法，应加强逆向思维的训练.

二、象限角

一是看角的顶点是否与坐标原点重合，二是看角的始边是否与 x 轴的非负半轴重合，这是判断象限角的两个前提条件，二者缺一不可.

【例 2】α 是第一象限角，$\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？2α 角的终边位置如何？

解：因为 α 是第一象限角，所以 $k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\cdot180^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180^\circ+45^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

当 k 为偶数时，设 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$，则 $2n\cdot180^\circ<\frac{\alpha}{2}<2n\cdot180^\circ+45^\circ(n\in\mathbf{Z})$，即 $n\cdot360^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360^\circ+45^\circ(n\in\mathbf{Z})$，$\therefore\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角.

当 k 为奇数时，设 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$，

触类旁通

1-1 下列命题中，真命题是 ……（　　）

A. 第二象限角比第一象限角大

B. 角 α 是第四象限角的充要条件是 $k\cdot360^\circ-90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$

C. 三角形的内角是第一或第四象限角

D. 若 $0^\circ\leqslant\alpha\leqslant90^\circ$，则 α 是第一象限角

1-2 已知 $A=\{$小于 90° 的角$\}$，$B=\{$第一象限角$\}$，则 $A\cap B$ 等于 …………………（　　）

A. {锐角}

B. {小于 90° 的角}

C. {第一象限角}

D. 以上均不对

2-1 已知 α 是第四象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是 ………………………………………………（　　）

A. 第二象限角

B. 第一或第二象限角

C. 第二或第三象限角

D. 第二或第四象限角

2-2 若 α 是第四象限角，则 $180^\circ-\alpha$ 是第几象限角？

则$(2n+1)\cdot 180°<\frac{\alpha}{2}<(2n+1)\cdot 180°+45°(n\in \mathbf{Z})$，即$n\cdot 360°+180°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot 360°+180°+45°(n\in \mathbf{Z})$，

∴$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角. ∴$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限角. 又$k\cdot 720°<2\alpha<k\cdot 720°+180°(k\in \mathbf{Z})$，则$2\alpha$是第一或第二象限角或终边落在$y$轴正半轴上.

三、终边相同的角的表示

在求终边相同的角的问题中关键是找到一个与其终边相同的某一角(一般找0°～360°的角)，然后用集合和符号语言表示.

【例3】在角的集合$\{\alpha|\alpha=k\cdot 90°+45°,k\in \mathbf{Z}\}$中，

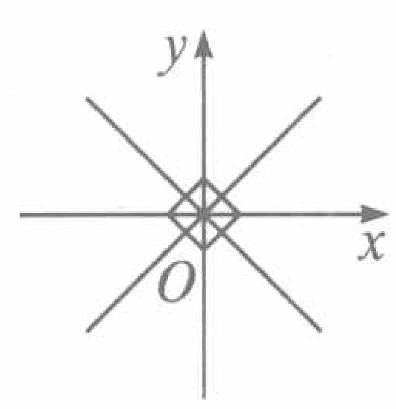
(1)有几种终边不相同的角？

(2)有几个属于区间$(-360°,360°)$内的角？

(3)写出其中是第三象限的角的一般表示法.

思路分析：从代数角度看，取$k=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$可以得$\alpha$为$\cdots,-135°,-45°,45°,135°,225°,\cdots$.

从图形角度看，$\alpha=k\cdot 90°+45°(k\in \mathbf{Z})$，即以45°角为基础，依次加上90°的整数倍，即依次按顺时针或逆时针方向旋转90°，所得各角如右图所示.



解：(1)在给定的角的集合中终边不相同的角共有4种.

(2)由$-360°<k\cdot 90°+45°<360°$，

得$-\frac{9}{2}<k<\frac{7}{2}$.

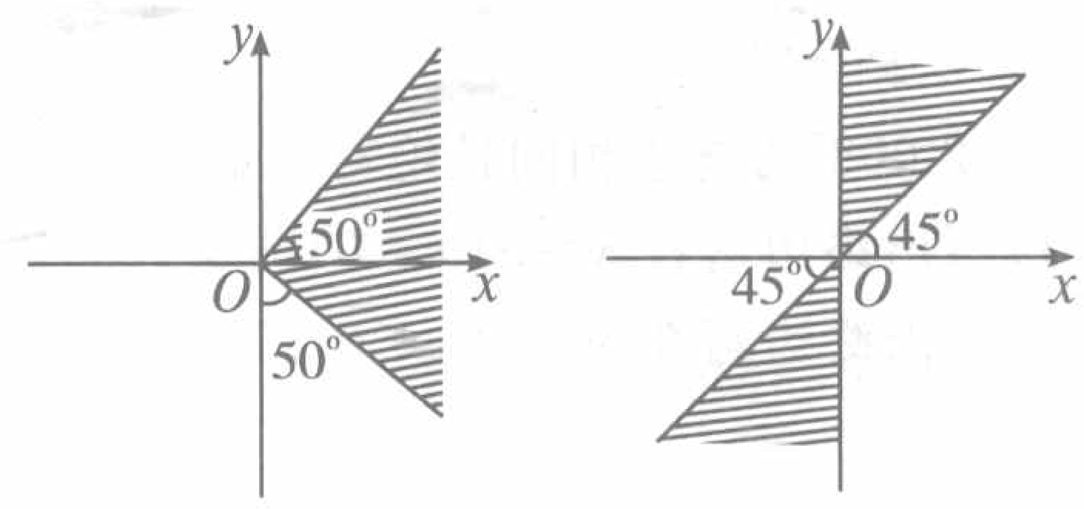
又$k\in \mathbf{Z}$，

故$k=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$. ∴在给定的角的集合中属于区间$(-360°,360°)$的角共有8个.

(3)其中是第三象限的角可表示为$k\cdot 360°+225°,k\in \mathbf{Z}$.

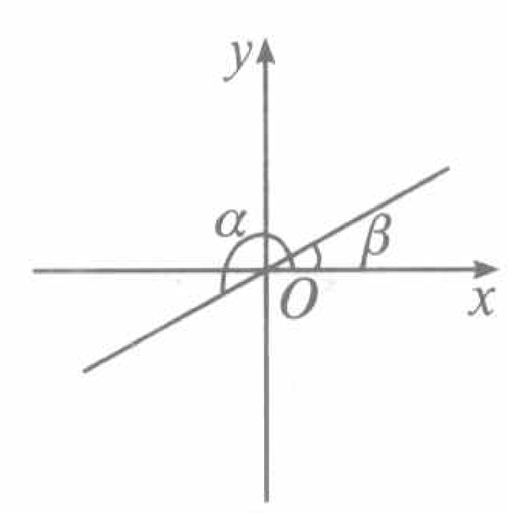
点拨提示：与α终边相同的角用$k\cdot 360°+\alpha(k\in \mathbf{Z})$表示，其中$k$有无数个整数值，每一个整数$k$的值表示终边相同的一个角. $2k\cdot 180°$与$(2k+1)\cdot 180°(k\in \mathbf{Z})$表示偶数个180°与奇数个180°，所以并集可以写成$n\cdot 180°(n\in \mathbf{Z})$. 要深刻理解这里的$n$与$k$.

3-1 如下图(1)(2)所示，写出终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合.



(1)　　　(2)

3-2 如下图，α、β的终边互为反向延长线，则$\alpha-\beta=$________.



思悟升华

1. 小于90°的角不都是锐角，它还包含零角、负角，只有小于90°的正角才是锐角，要注意从现在开始角已经推广到了任意角.

2. 在解答终边具有某种对称关系的角的问题时，应注意在坐标系中画出直观图形，利用数形结合方法进行求解，同时要注意综合考虑各种情况，防止丢解.

3. 由α所在象限确定$\frac{\alpha}{n}$所在象限时，要注意分类讨论思想的应用和数形结合思想的应用.

演练·提升

夯基达标

1. 与$-30°$角终边相同的角的集合是 ………………（　　）

A. $\{\alpha|\alpha=300°\}$

B. $\{\alpha|\alpha=-30°+k\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=330°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=30°-k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$

2. 若角 α 与角 β 的终边相同，则角 $\alpha-\beta$ 的终边 …（　）

A. 在 x 轴的非负半轴上　　B. 在 x 轴的非正半轴上

C. 在 y 轴的非负半轴上　　D. 在 y 轴的非正半轴上

3. 若 α 是第四象限角，则 $90^\circ-\alpha$ 是…………………（　）

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

4. 若 $M=\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+60^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{\beta|\beta=k\cdot180^\circ+60^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{\gamma|\gamma=k\cdot720^\circ+60^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，那么 M、N、P 三个集合之间的关系为 ………………………（　）

A. $M\supsetneqq N\supsetneqq P$　　B. $N\supsetneqq M\supsetneqq P$

C. $N\supsetneqq P\supsetneqq M$　　D. $P\supsetneqq N\supsetneqq M$

5. 与 $-2\,008^\circ$ 的终边相同且绝对值最小的角是________.

6. (1)写出终边落在 $y=x(x\geqslant0)$ 图象上的角 α 的集合 S；

(2)写出终边落在 $y=x(x\leqslant0)$ 图象上的角 α 的集合 M.

能力提升

7. 下列说法中，正确的是 …………………………（　）

①始边相同，顶点相同，终边也相同的角一定相等

②两等角的始边相同，顶点相同，则终边一定相同

③若 θ 是第一象限角，则 $\frac{\theta}{2}$ 有可能是第三象限的角

④若 θ 的终边不在第一、二象限，则它在第三、四象限

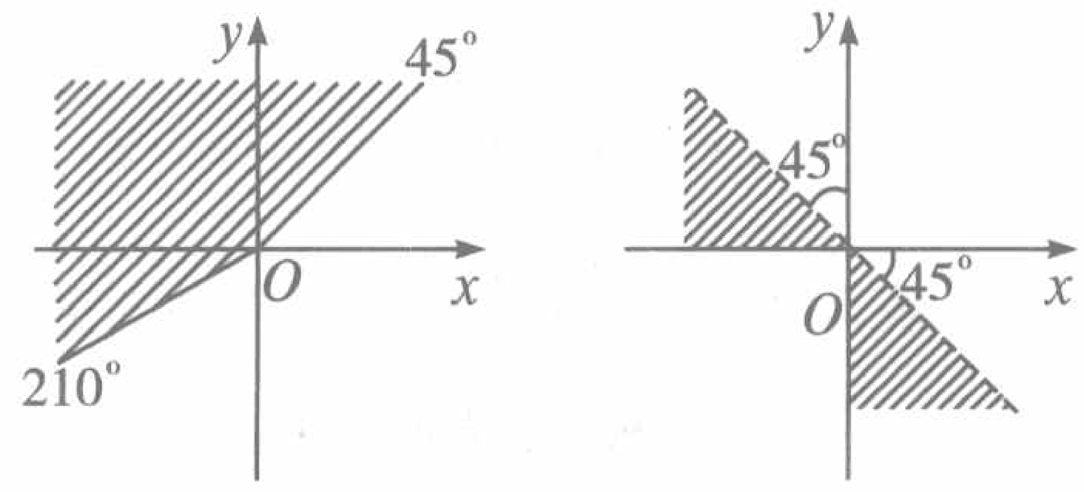
A. ②　　B. ①②　　C. ②③　　D. ②④

8. 已知角 2α 的终边落在 x 轴的上方，那么 α 所在的象限是 …………………………………………………（　）

A. 一　　B. 一、二　　C. 一、三　　D. 一、四

9. 已知与 $-1\,820^\circ$ 终边相同的角的集合为 A，集合 $B=[-720^\circ,360^\circ]$，求 $A\cap B$.

10. 如图，试分别表示终边落在阴影区域的角.



(1)　　(2)

11. 有一个小于 360° 的正角，这个角的 6 倍的终边与 x 轴的正半轴重合，求这个角.

拓展探究

12. 设时钟的时针在 2 点与 3 点之间时：

(1)时针与分针什么时候重合？

(2)什么时候两针在反向延长线上？

4.2　弧度制

预习导引

激趣诱思

我们知道函数是非空数集到非空数集的映射，我们已经有了任意角的概念，怎样把其推广到任意角的三角函数呢？三角函数的值是实数，角的大小能否用实数表示呢？

以前我们是用度数表示角的大小，现在的问题是把度数转化为用相应大小的实数表示，这种转化是什么呢？这种转化就是弧度制与角度制的互化．

本节我们学习用弧度制表示角．

新知预习

1. 概念：等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做____________．用“弧度”为单位来度量角的制度叫做________．

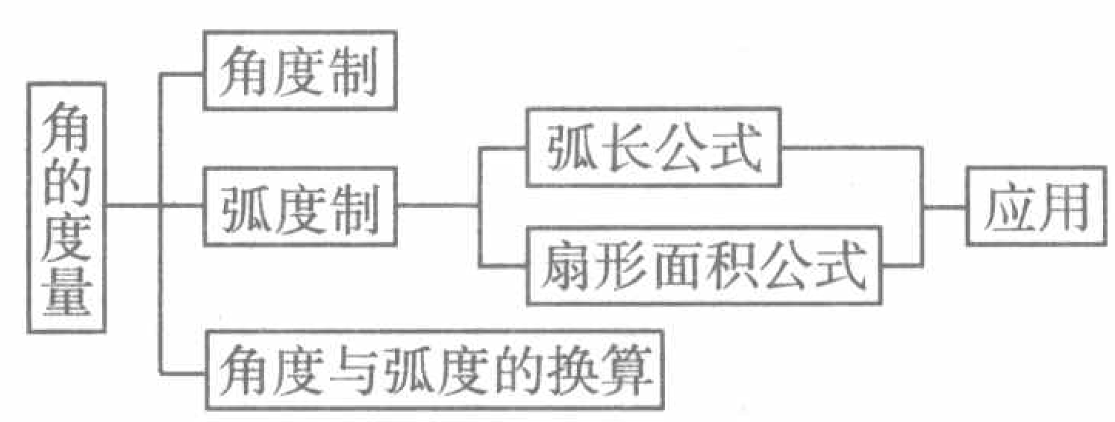
2. 度数与弧度数的换算：$180°=$________；$1°=$______ rad≈0.017 45 rad；1 rad=______≈_____=_____．

3. 特殊角的角度数与弧度数的对应值

角度	$0°$	$30°$	____	$60°$	____	$120°$	____	$150°$	____
弧度	____	____	$\frac{\pi}{4}$	____	$\frac{\pi}{2}$	____	$\frac{3\pi}{4}$	____	π
角度	$210°$	$225°$	____	$270°$	____	$315°$	____	$360°$	____
弧度	____	____	$\frac{4\pi}{3}$	____	$\frac{5\pi}{3}$	____	$\frac{11\pi}{6}$	____	4π

4. 弧长公式：$l=$______（α 为圆弧所对圆心角的弧度数，r 是弧所在圆的半径），扇形面积公式：$S=$______=______．

知识结构



互动课堂

重难点拨

一、弧度与角度的换算

解决角度与弧度之间的换算问题关键是要抓住 $\pi=180°$ 的关系．另外，要记准 $[0°,360°]$ 范围内的特殊角的角度与弧度的互化．

【例 1】设 $\alpha_1=-570°$，$\alpha_2=750°$，$\beta_1=\frac{3\pi}{5}$，$\beta_2=-\frac{7\pi}{3}$．

(1)将 α_1、α_2 用弧度制表示出来，并指出其所在象限；

(2)将 β_1、β_2 用角度制表示出来，并在 $-720°\sim0°$ 之间找出与它们终边相同的角．

思路分析：$180°$ 的角是 π 弧度，所以求一个 $n°$ 的角它含有几个 $180°$，就是几个 π 弧度，即 $n°=\frac{n}{180}\cdot\pi$．由弧度化度数同理．

解：(1)∵ $180°=\pi$，

∴ $-570°=-570\times\frac{\pi}{180}=-\frac{19\pi}{6}$．

∴ $\alpha_1=-2\times2\pi+\frac{5\pi}{6}$．同理，$\alpha_2=2\times2\pi+\frac{\pi}{6}$．

∴ α_1 在第二象限，α_2 在第一象限．

(2) $\beta_1=\frac{3\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}\times\frac{180°}{\pi}=108°$，$\beta_2=-\frac{7\pi}{3}=-\frac{7\pi}{3}\times\frac{180°}{\pi}=-420°$，

解不等式 $-720°\leqslant k\cdot360°+108°<0°(k\in\mathbf{Z})$，得 $k=-2$ 或 $k=-1$．

∴ 在 $-720°\sim0°$ 之间与 β_1 有相同终边的角是 $-612°$ 和 $-252°$．

同理，在 $-720°\sim0°$ 之间与 β_2 有相同终边的角是 $-420°$ 和 $-60°$．

触类旁通

1-1　设三角形的三内角之比为 2∶5∶8，求各内角的弧度数．

点拨提示：(1)角度化弧度只需乘以$\frac{\pi}{180}$，一般保留π.

(2)弧度化角度只需乘以$\frac{180°}{\pi}$.

二、弧度制下角的表示与运算

在表示角的集合时，一定要使用统一单位（统一制度），只能用角度制或弧度制中的一种，不可混用，有关运算常常结合数轴，用数形结合法解决.

【例 2】集合$A=\{x|k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，集合$B=\{x|6+x-x^2\geqslant 0\}$，求$A\cap B$.

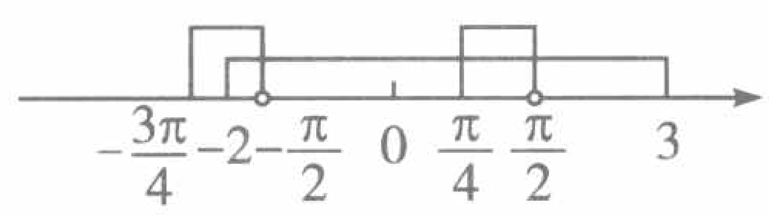
解：因为$6+x-x^2\geqslant 0$，即$x^2-x-6\leqslant 0$，

可得$-2\leqslant x\leqslant 3$. 对$k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

取$k=0$，有$\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$，

取$k=-1$，有$-\frac{3\pi}{4}\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$，

当k取其他值时，$[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2})(k\in\mathbf{Z})$与$[-2,3]$没有公共元素.



故由上图可得$A\cap B=\{x|-2\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}\}$.

点拨提示：(1)借助数轴，寻找公共部分，既简洁又直观.

(2)理解取适当的k值，寻找可能与B相交的部分. 本题中，其他整数k的值相应的角x与B集合中的元素相差甚远，则不必考虑.

三、弧长公式和扇形面积公式的应用

在弧度制下的弧长公式、扇形面积公式有诸多优越性，但是如果已知的角是以“度”为单位，则使用上述公式时必须先化成弧度数后再计算，从而避免计算过程及结果出错.

【例 3】(1)已知扇形OAB的圆心角α为$60°$，半径为 6，求扇形弧长及所含弓形的面积.

(2)已知扇形周长为 20 cm，当扇形的中心角为多大时它有最大面积？

思路分析：(1)将圆心角用弧度制表示后，利用弧长公式和扇形面积公式即可获解. 对于(2)，只需建立扇形面积S的函数，然后确定S最大时的条件.

解：(1)$\because 60°=\frac{\pi}{3}$，$r=6$，$\therefore l=\overset{\frown}{AB}=\frac{\pi}{3}\cdot 6=2\pi$.

$\because S_{扇}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 6=6\pi$，

$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}r^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$，

$\therefore S_{弓形}=S_{扇}-S_{\triangle OAB}=6\pi-9\sqrt{3}$.

(2)设扇形的中心角为α，半径为r，弧长为l，则由扇形的周长为 20，得$l=20-2r$.

$\therefore S_{扇}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}(20-2r)r=10r-r^2=-(r-5)^2+25$，其中由$l>0$，可推知$0<r<10$，当$r=5$ cm 时面积S取最大值. 此时$\alpha=\frac{l}{r}=\frac{10}{5}=$

1-2 钟表的时针 1 小时转过________弧度，2 小时、2.5 小时分别转过________、________弧度.

2-1 已知$A=\{\alpha|(2k+1)\pi<\alpha<(2k+2)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta|-4<\beta<4\}$，求$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$.

2-2 判断$\alpha=\frac{k\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$的终边在第几象限.

3-1 一条弦的长度等于半径r，求：

(1)这条弦所对的劣弧长；

(2)这条弦和劣弧所组成的弓形的面积.

3-2 已知一扇形的中心角为α，所在圆的半径为R. 若扇形的周长是一定值$C(C>0)$，则是否存在一个α角，使该扇形的面积有最大值？若有，求出α角；若没有，请说明理由.

2 弧度.

答:(1)扇形弧长为 2π,所含弓形面积为$6\pi-9\sqrt{3}$.

(2)当扇形中心角为 2 弧度时,扇形面积最大,最大面积为$25\ cm^2$.

点拨提示:涉及到最大、最小问题,先建立函数关系,再通过求函数最值的方法或者其他方法确定取最值的条件和相应的最值.这一体现函数思想的数学模型,是解决最值问题的基本思想方法.

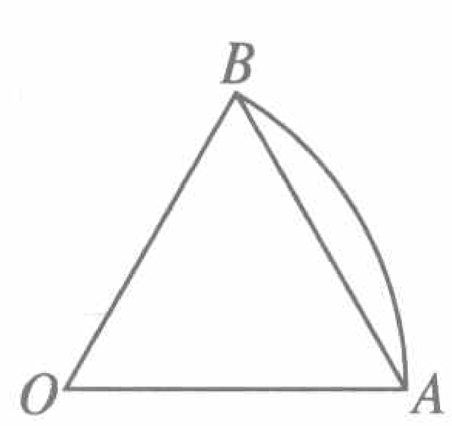
思悟升华

1. 弧度制与角度制的度量单位不能混用,一个式子中,只能用弧度制单位或者角度制单位.
2. 对于区间角的集合的书写,首先要看其区间是否跨越 x 轴的正半轴,若区间跨越 x 轴的正半轴,则前面的角用负角来表示;若区间不跨越 x 轴的正半轴,则无须这样书写.
3. 把弧长公式、扇形面积公式结合起来,统一成 α,r 的方程组是方程思想的运用,也是解决此类问题的常用方法.

演练·提升

夯基达标

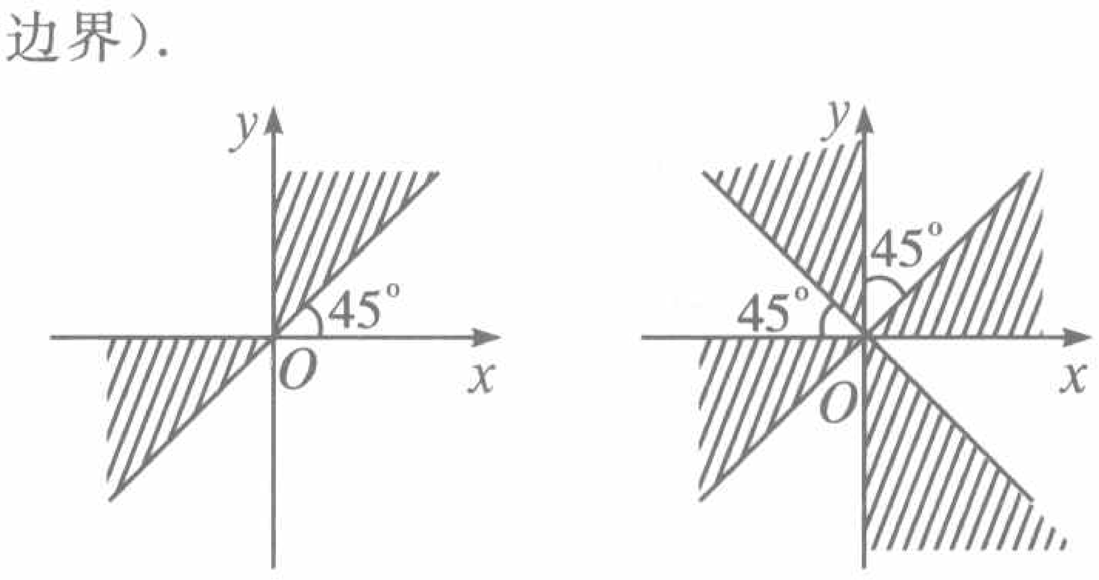
1. 终边在 y 轴上的角的集合是 ……………………（　　）
   A. $\{\alpha|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
   B. $\{\alpha|\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$
   C. $\{\alpha|\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
   D. $\{\alpha|\alpha=k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
2. 若 2 弧度的圆心角所对的弧长为 4 cm,则这个圆心角所夹的扇形的面积是 ……………………（　　）
   A. $4\ cm^2$　B. $2\ cm^2$　C. $4\pi\ cm^2$　D. $2\pi\ cm^2$
3. 圆的半径变为原来的 2 倍,而弧长也增加到原来的2倍,则 ……………………（　　）
   A. 扇形的面积不变
   B. 扇形的圆心角不变
   C. 扇形的面积增大到原来的 2 倍
   D. 扇形的圆心角增大到原来的 2 倍
4. 将角$-\frac{19\pi}{3}$表示成 $\alpha+2k\pi(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$ 的形式是________.
5. 如右图,扇形 OAB 中,$OA=OB=AB=1$,则扇形的面积 S 为________.



6. 已知四边形的四个内角之比是 1∶3∶5∶6,分别用角度和弧度将这些内角的大小表示出来.

能力提升

7. 已知集合 $M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x|x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$,则 M、N 间的关系为 ……………………（　　）
   A. $M=N$　B. $M\supsetneqq N$　C. $M\subsetneqq N$　D. $M\subseteq N$
8. 若 α 是第二象限角,则 $\pi-\alpha$ 在 ……………………（　　）
   A. 第一象限　B. 第二象限
   C. 第三象限　D. 第四象限
9. 若 $\alpha=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,则 α 是第________象限的角.
10. 用弧度制写出角的终边在下图中阴影区域内角的集合(包括边界).

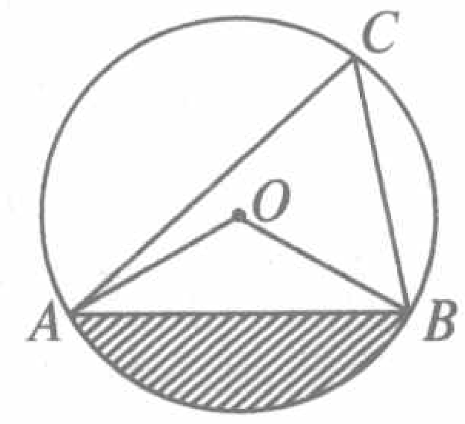


A　　B

11. 半径为 12 cm 的轮子，每 3 分钟转 1 000 圈. 试求：
(1)它的平均角速度(1 秒钟转过的弧度数)；
(2)轮沿上一点 1 秒经过的距离；
(3)轮沿上一点转过 1 000°所经过的距离.

拓展探究

12. 如右图，弦 $AB=a$，圆周角$\angle ACB=60°$，(1)求$\overset{\frown}{AB}$的弧长；
(2)求阴影部分的面积.



4.3 任意角的三角函数

预习 导引

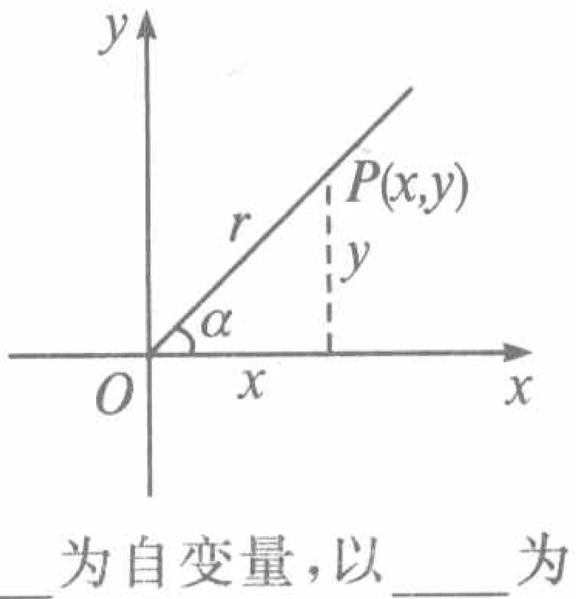
激趣诱思

由特殊到一般的推广和拓展是数学的重要思想，也是数学历史发展的重要特点，初中学习的锐角三角函数为我们解直角三角形提供了很大的方便，解一般的三角形将涉及到直角和钝角三角函数，只用锐角三角函数就不能解决，既然我们把角推广到了任意角，那么三角函数的推广，就成为数学必然的发展.

任意角的三角函数是把角放在直角坐标系下利用坐标定义的，这种定义对锐角三角函数仍能成立，要理解这种特殊与一般的关系.

新知预习

1. 定义：设 α 是一个任意大小的角，角 α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y)，它与原点的距离是 $r(r>0)$，则角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别是 $\sin\alpha=$____，$\cos\alpha=$____，$\tan\alpha=$____，$\cot\alpha=$____，$\sec\alpha=$____，$\csc\alpha=$____(如下图).



这些都是以____为自变量，以____为函数值的函数，叫做三角函数.

2. 三角函数的定义域：$\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的定义域为________；$\tan\alpha$、$\sec\alpha$ 的定义域为________；$\cot\alpha$、$\csc\alpha$ 的定义域为________.

3. 三角函数值的符号可利用象限记忆. 规律是“一全正，二正弦，三两切，四余弦”，可解释为：第一象限三角函数

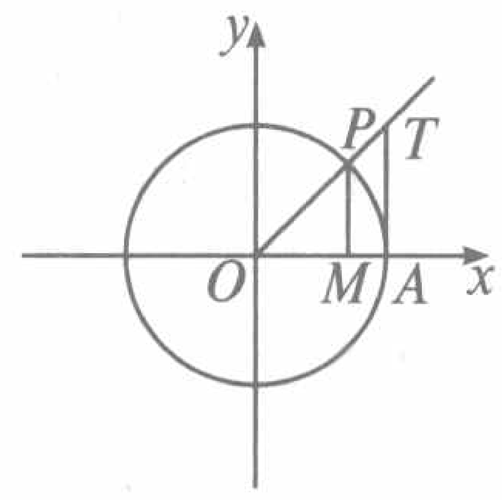
值均为______，第二象限正弦函数为______，第三象限正切、余切函数为______，第四象限余弦函数为______.

4. 三角函数线(如右图)：

有向线段____叫做角 α 的______；

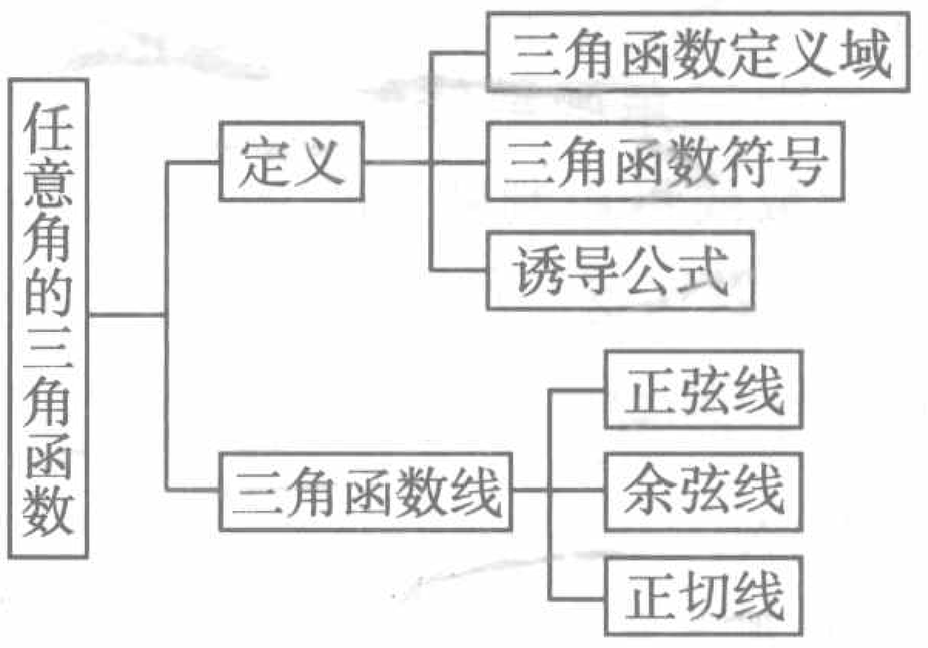
有向线段____叫做角 α 的______；

有向线段____叫做角 α 的______.



5. 诱导公式一：终边相同的同名三角函数值______，$\sin(\alpha+k\cdot 360°)=$________，$\cos(\alpha+k\cdot 360°)=$________，$\tan(\alpha+k\cdot 360°)=$________，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

知识结构



互动课堂

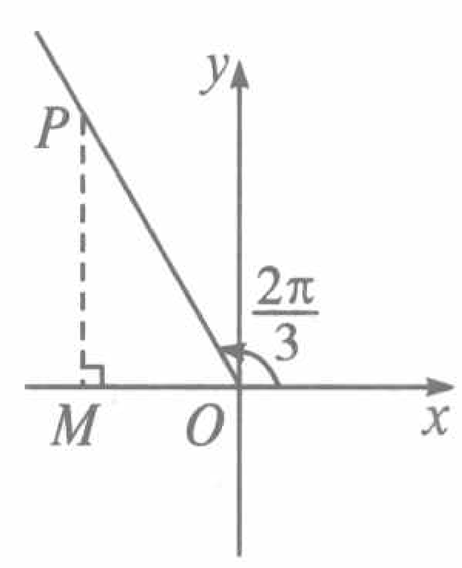
重难点拨

一、任意角的三角函数定义

在定义中不论点 P 在终边上的位置如何，它的各三角函数值都是定值，它们只依赖于 α 的大小，与点 P 在 α 的终边上的位置无关.

【例 1】求角 $\frac{2\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值.

解：如右图，在 $\frac{2\pi}{3}$ 角的终边上取一点 P，使 $OP=1$，作 $PM\perp Ox$，垂足为 M，则 $\angle POM=\frac{\pi}{3}$，在 Rt$\triangle PMO$ 中，$OM=\frac{1}{2}OP=\frac{1}{2}$，$MP=\frac{\sqrt{3}}{2}OP=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



∴ P 点的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\therefore \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2},$$

$$\tan\frac{2\pi}{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}.$$

点拨提示：解题要规范，步骤要完整，这样才能保证答案的准确性. 此类问题，先交代 x、y 的值，再求 r，由三角函数的定义，最后代入求值.

当 α 角终边有两种情况时，要分象限讨论.

二、三角函数值在各象限的符号

根据三角函数的定义得知：正弦和余割的符号取决于纵坐标 y 的符号；余弦和正割的符号取决于横坐标 x 的符号；正切和余切的符号是由纵坐标 y 和横坐标 x 共同确定的.

【例 2】(1)已知 θ 是第二象限角，试确定 $\sin\theta\cdot\cos\theta$ 的符号.

(2)已知 $\sin\theta\cdot\cos\theta<0$，确定 θ 终边所在的象限.

解：(1)∵ θ 是第二象限角，∴ $\sin\theta>0$ 且 $\cos\theta<0$.

∴ $\sin\theta\cdot\cos\theta<0$.

(2)∵ $\sin\theta\cdot\cos\theta<0$，

∴ $\begin{cases}\sin\theta<0,\\ \cos\theta>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\theta>0,\\ \cos\theta<0.\end{cases}$

∴ 角 θ 终边在第四或第二象限.

触类旁通

1-1 已知角 α 的终边经过点 $P(-2,3)$，求 α 的 6 个三角函数值.

1-2 若 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 α 的终边过点 $P(x,2)$，则 α 是第________象限角.

2-1 若 $\sin\theta\cos\theta>0$，则 θ 在 ……（　　）

A. 第一、二象限

B. 第一、三象限

C. 第一、四象限

D. 第二、四象限

2-2 已知 θ 是第二象限角，试确定 $\sin(\cos\theta)\cdot\cos(\sin\theta)$ 的符号.