21世纪高等院校精品课程规划教材

离散数学

Discrete Mathematics

主　编　朱广萍

副主编　柳益君　薛小锋

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

21世纪高等院校精品课程规划教材

离散数学

主 编 朱广萍

副主编 柳益君 薛小锋

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书分4篇，共10章。第1篇是数理逻辑，内容包括命题逻辑和谓词逻辑；第2篇是集合论，内容包括集合、关系、函数、集合的基数；第3篇是代数系统，内容包括代数系统的基本概念和性质、群、环、域、格与布尔代数；第4篇是图论，内容包括图的基本概念和性质、几类重要的图（树、哈密尔顿图、欧拉图、平面图等）。第10章给出了离散数学在计算机类专业课程中的应用。

书中4部分各自成篇，在每篇开始处都有知识背景的介绍，讲解上可以根据情况调整先后顺序。全书编写力求语言简练、通俗易懂，精简了繁杂的理论证明，只给出方法性较强的定理的证明，强化了逻辑推理及应用内容，各章都配有典型例子和适量的习题，便于读者理解和掌握内容。附录给出了本书中常见的符号及其说明。

本书可作为高校计算机及相关专业的教材，也可供技术人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/朱广萍主编. —北京：北京理工大学出版社，2009. 2
ISBN 978－7－5640－1660－9

Ⅰ. 离…　Ⅱ. 朱…　Ⅲ. 离散数学-高等学校-教材　Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 009879 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http：// www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京圣瑞伦印刷厂
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／12. 25
字　　数／284 千字
版　　次／2009 年 2 月第 1 版　　2009 年 2 月第 1 次印刷
印　　数／1～5000 册　　　责任校对／申玉琴
定　　价／25. 00 元　　　责任印制／周瑞红

前　　言

离散数学是计算机专业基础理论的专业核心课程之一。

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机学科的重要基础理论课程。本课程主要研究离散对象的结构及相互关系，充分描述了计算机科学离散性的特点，对提高学生的抽象思维与逻辑推理能力有重要作用。

本教材是作者在十几年教授本课程的基础上，参考国内外数十种教材，结合自身的教学经验，面向普通高校计算机及其相关专业的学生编写的，本着“精简理论、强调应用”的原则，力求简洁、易懂。本教材选材精心、重点突出、内容严谨、注重概念的描述及解题的思想和方法分析，使学生能够在较短的时间内掌握本课程的基本概念、基本理论和基本方法，并得到对离散量处理的数学思维方式的训练及逻辑推理与抽象思维能力的训练。本书介绍的离散数学基本内容，为数据结构、数据库、操作系统、编译原理、人工智能、机器定理证明等计算机及信息类专业的后续课程做好必要的知识准备，为从事计算机的应用提供坚实的理论基础。

本教材对于定理的证明只给出比较典型的、有方法论意义的，目的在于启发思想，对于平凡的，或较难的含有特殊技巧的，但并不带有普遍意义的证明一概略去。但是，提供它的背景，以及它的适用范围，使读者对这些定理的内涵有更深的理解。

要学会给数学概念下定义，离散数学的特点之一就在于解决问题的多样性，不但同一个问题有各种不同的解法，而且同一概念有各种不同的描述方法，有各种不同的定义方法。本书在不同的地方给出不同的定义供读者参考。希望起到举一反三的作用。

学数学就要做数学，希望学生多做练习（包括书后作业、未证明的定理及其他参考书上的习题）。书末的自测题供学生自我检查学习情况。

本书的第 1 篇、第 2 篇由朱广萍编写，第 3 篇及第 10 章由柳益君编写，第 4 篇由薛小锋编写。在本书的编写中承蒙江苏技术师范学院王讲书教授、徐亚平老师的指导和审理工作，还曾得到同行的关心和帮助，借本书出版的机会，向他们表示诚挚的谢意。

本书主要内容曾在江苏技术师范学院做过多次讲授，但限于作者的水平，书中难免存在一些错误和疏漏。希望使用本书的教师和读者不吝指正。

编者
2008 年 10 月

目　　录

第1篇　数理逻辑

第2篇　集　合　论

第 3 篇 代数系统

第 4 篇 图 论

第1篇　数理逻辑

逻辑学是一门研究思维形式及思维规律的科学。逻辑规律就是客观事物在人的主观意识中的反映。由于研究的对象和方法各有侧重，又分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑。

数理逻辑（mathematical logic）又名符号逻辑，是用数学方法研究推理中前提和结论之间的形式关系的科学。

1. 数理逻辑的特点

数理逻辑主要有以下两个特点。

（1）强调的是研究"过程"。

作为任何一个推理，均包含两个方面，即推理的内容和推理过程（或称推理形式）。

例如：① 所有的人都有两只眼睛，张三是人，张三有两只眼睛。

② 所有的金属都有光泽，铁是金属，铁具有光泽。

从以上两例我们可以看出，第一例的推理内容属生物学，第二例的推理内容属物理学，而二者的推理形式却是一样，这正是我们熟悉的三段论式。对推理内容，存在专门的学科去研究，而数理逻辑是研究共性的推理形式的，不关心推理的内容。如果我们把上两例的内容抽象掉，而只保留过程，于是可表示如下：

$$M\text{有}N，P\text{是}M，P\text{有}N \xrightarrow{\text{进一步抽象}} M\mathrm{R}N，P\mathrm{S}M，P\mathrm{R}N。$$

我们看到，这样处理，抓住了推理形式的规律。特别是用符号代替了推理内容的抽象，使单纯研究过程显得简洁明了，这一点正是数理逻辑与传统逻辑的重要区别之一。

（2）用数学方法（即建立符号逻辑）。

引入符号，不仅简化了推理的表达方式，更重要的是为进行数学运算创造了条件。

为了表述任何成套的规则或理论，都需要使用一种描述语言。自然语言都具有二义性，如"父在母先亡"等。我们为需要而建立的语言系统称为形式语言，或客观语言。而这种语言的建立，也必须以符号作为基础。由于自然语言难以把推理的形式与内容分开，又由于自然语言存在二义性等特点，使传统的逻辑研究显得繁杂，不易被研究自然科学的人所接受，好像是文人们在玩弄文字游戏。数理逻辑在将传统的形式逻辑符号化的基础上，使用无二义性的数学语言进行逻辑学的研究，而符号的引入起到了关键性的作用，故数理逻辑又名符号逻辑。

传统的形式逻辑早在公元前三、四百年之间就已成说。在我国春秋战国时期，孔子、墨子、公孙龙、荀子都做过研究，而以墨子的贡献最大。目前世界上普遍认定古希腊的亚里士多德（公元前384—322年）为形式逻辑的奠基人，他是哲学家，也是数学家，被誉为西方的孔子。他的逻辑学和黑格尔的美学到现在仍是文学艺术界的两大支柱。亚里士多德的逻辑学统治世界几千年，直到符号逻辑的产生。

2. 数理逻辑产生的主要原因

（1）传统逻辑的不足。

主要有三点不足：

① 语句仅限于主宾结构，或更准确地说，仅限于主系表结构。如“A 是 B”的形式。然而，主语和宾语是可以进一步加以刻画的。对主语加以量分（全称表示“凡是”，特称表示“存在”），对宾语加以质分（B，非 B），再组合起来，就应有四种不同的结构：

全称肯定——凡 A 都是 B；全称否定——凡 A 都不是 B；

特称肯定——存在 A 是 B；特称否定——存在 A 不是 B。

② 推理规则仅限于三段论式。如“1 大于 0”，“2 大于 1”，所以“2 大于 0”这样的推理中，每一句都不是上述四种语句结构之一，并且这三句也并未构成三段论式。

③ 传统逻辑中没有对量词的研究。由于传统逻辑只限于主宾结构，故使量词的复杂性无法体现出来，因而也无须对量词进行研究了。

（2）数学发展的需要。

数学的发展经历了三次大的危机，第一次是有理数的危机导致无理数的发现，第二次是微积分基础的争论，即关于无穷小的争论，第三次是集合论中出现了悖论。

作为第一次危机的直接结果之一，产生了“欧几里德”几何学，它建立在五个公设之上。人们开始注意这五个公设是否互相独立。同时，人们还关心系统的相容性（即不矛盾性），而这些的严格证明都需要从逻辑学的角度加以研究。

特别是由于对第五公设的怀疑，许多人把第五公设否定后得到一公设，加之于前四个公设上又建立了一个系统。这方面贡献突出的是罗巴切夫斯基，他首先证明了第五公设是独立的，接着他建立了一种非欧几何，叫罗氏几何。然后，就是要证明第五公设与前四个公设的相容性。罗巴切夫斯基指出非欧几何学的所有定理，欧氏几何学中都有，如果欧氏几何学是不矛盾的，那么非欧几何学也是不矛盾的。这只不过是相对相容性的证明，那么怎样证明欧氏几何是相容的呢？于是人们试图用解析几何的办法，把几何问题同构于代数问题加以证明。对代数系统相容性的研究导致了对实数代数、有理数代数、自然数代数，直至集合论的相容性的研究。

第二次危机之后，使微积分建立在极限理论之上。而极限理论中，有一条性质，“单调有界的数列必有极限”，它是一切性质的基础，可它是由何而来的呢？最后问题也归到实数论、自然数论，直至集合论上了。

近代数学一直强烈地要求证明集合论中无矛盾，因而集合论的相容性占据中心、关键性的位置，是整个数学相容性的支柱，结果集合论中又出现了悖论（paradox）。尽管如此，人们长期追求证明数学相容性的过程，极大地促进了数理逻辑的建立和发展。

现在公认的创始者是德国的数学家兼哲学家莱布尼兹（1646—1710 年），他是世界上最大的符号发明家，符号逻辑的思想就是由他提出的。尽管他生前仅提出了一个巨大的计划和设想，但至今的数理逻辑基本上是按他指的方向发展的。数理逻辑的最后完备是由英国数学家布尔（1815—1864 年）完成的。

3. 数理逻辑的主要内容

目前数理逻辑的主要内容有四个方面。

（1）证明论：主要研究判定问题。

（2）模型论：研究数学系统与形式系统之间的关系。

（3）递归论（能行性理论）：研究算法及图灵机。

（4）公理化集合论。

由于近代出现了计算机，数理逻辑开始大量地应用于程序语言设计、开关电路的分析与设计、自动机理论、机器翻译和机器证明，以及人工智能的研究。

学习数理逻辑，不仅仅是为获取知识，更重要的是要培养自己的逻辑思维能力。若思维的逻辑性加强了，它会在各方面给你带来益处。

本篇仅介绍计算机科学领域中所必需的数理逻辑基础知识：命题逻辑（proposition logic）和谓词逻辑（predicate logic）。

第1章

命 题 逻 辑

内容提要

命题及命题联结词、命题公式的基本概念，真值表、基本等价式及永真蕴涵式，命题演算的推理理论中常用的直接证明、附加前提证明、归谬法证明等方法。

教学目标

（1）熟练掌握命题、联结词、复合命题、命题公式及其解释的概念。

（2）熟练掌握常用的基本等价式及其应用。

（3）熟练掌握（主）析/合取范式的求法及其应用。

（4）熟练掌握常用的永真蕴涵式及其在逻辑推理中的应用。

（5）掌握形式演绎的方法。

命题逻辑是数理逻辑的基础，它以命题为研究对象，研究基于命题的符号逻辑体系及推理规律，它也可称为命题演算。

1.1 命题及其表示法

1.1.1 命题的概念

形式逻辑是研究思维外延的科学，一般而言思维是以语言作为其外延形式存在，因此命题逻辑是从基本语句研究开始。

定义 1.1.1 能够判断真假的陈述句称作命题。

命题的真值：判断的结果。

真值的取值：真与假。

真命题：真值为真的命题。

假命题：真值为假的命题。

注意：感叹句、祈使句、疑问句都不是命题。

既不能为真也不能为假的陈述句称为悖论。陈述句中的悖论以及判断结果不唯一确定的都不是命题。

例 1.1.1　判断下列句子中哪些是命题。

（1）北京是中国的首都。

（2）雪是黑色的。

（3）$3\times4=12$。

（4）请把门关上！

（5）x 是有理数。

（6）地球外的星球上也有人。

（7）明天有课吗？

（8）本语句是假的。

（9）小明和小林都是三好生。

（10）小明和小林是好朋友。

解：（1）（2）（3）（6）（9）（10）是命题，（4）（5）（7）（8）不是命题，（8）是悖论。

判断一个语句是否为命题，应该分两步：首先看是否为陈述句，其次判断它的真值是否唯一。

注意："能判断真假"并不同于"已知真假"。

例如，"别的星球上有生物"这句话是命题。目前无法确定真假，但本质上是有真假值的。

"$1+110=110$"这句话不是命题。需根据上下文才能断定真假。

1.1.2　命题的表示

通常使用小写英文字母 $p, q, r, \cdots, p_i, q_i, r_i\ (i\geqslant1)\cdots$ 表示简单命题；用"1"表示真命题，用"0"表示假命题。

例如，令

p：$\sqrt{2}$ 是有理数，则 p 的真值为 0。

q：$2+5=7$，则 q 的真值为 1。

1.1.3　命题的分类

简单命题（原子命题）：不能分解成更简单命题的命题。

复合命题：由简单命题与联结词按一定规则复合而成的命题。

例 1.1.2　先将命题下面陈述句中出现的原子命题符号化，并指出它们的真值，然后再写出这些陈述。

（1）$\sqrt{2}$ 是有理数是不对的。

（2）2 既是素数又是偶数。

（3）2 或 4 是素数。

（4）如果 2 是素数，则 3 也是素数。

（5）如果 2 是素数，当且仅当 3 也是素数。

解：在（1）中"$\sqrt{2}$ 是有理数"是原子命题；（2）～（5）中各有两个原子命题，它们分别是"2 是素数"和"2 是偶数"，"2 是素数"和"4 是素数"，"2 是素数"和"3 是素数"，"2 是素数"和"3 是素数"。共有 5 个原子命题，将它们分别符号化为

p：$\sqrt{2}$是有理数。

q：2 是素数。

r：2 是偶数。

s：3 是素数。

t：4 是素数。

p,t 的真值为 0，其余的真值为 1。将原子命题的符号代入，上述各陈述句可表示为

（1）非 p。

（2）既 q 又 r（或 q 且 r）。

（3）q 或 t。

（4）如果 q，则 s。

（5）q 当且仅当 s。

这 5 个命题都是复合命题，上述的表述形式不能令人满意。数理逻辑研究方法的主要特征是将论述或推理中的各种要素都符号化，即构造各种符号语言来代替自然语言，我们称完全由符号所构成的语言为形式语言。为了达到这个目的，就要求进一步抽象化，即将联结词也符号化。在例 1.1.2 中出现的联结词有 5 个：非、且、或、如果…，则…、当且仅当，这些联结词是自然语言中常用的联结词。但自然语言中出现的联结词又具有二义性，因而在数理逻辑中必须给出联结词的严格定义，并且将它们符号化。

1.2 命题联结词

在日常语言中，由一些简单的陈述句，通过“联结词”可组成较为复杂的语句称为复合句。在命题逻辑中，由原子命题通过“联结词”可构成复合命题。原子命题与复合命题均称为命题。由一些命题通过“联结词”构成的仍是命题。

在日常语言中联结词可以是“不”、“并且”、“或者”、“若……，则……”、“当且仅当”等。在命题逻辑中也有类似于日常语言中的联结词，称为命题联结词，但它们的含义有所不同。

常用的联结词有 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$五种。下面分别讲述。

1. 否定式与否定联结词“$\neg$”

定义 1.2.1 设 p 为命题，复合命题“非 p”（或“p 的否定”）称为 p 的否定式，记作 $\neg p$，符号 $\neg$ 称作否定联结词，并规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。

表 1.2.1 否定式的真值定义

p	$\neg p$
0	1
1	0

例 1.2.1 设 p：11 是素数；则 $\neg p$：11 不是素数。

否定的意义仅是修改了命题的内容，我们仍把它看作联结词，它是一个一元运算。

2. 合取联结词“$\wedge$”

定义 1.2.2　设 p, q 为二命题，复合命题“p 并且 q”（或“p 与 q”）称为 p 与 q 的合取式，记作 $p\wedge q$，符号 $\wedge$ 称作合取联结词，并规定 $p\wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真。

表 1.2.2　合取式的真值定义

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

合取的概念与自然语言中的“与”意义相似，但并不完全相同。在自然语言中无关联的两命题的“与”是无意义的，但在数理逻辑中是一个新的命题，有逻辑值。合取是一个二元运算。

注意：描述合取式的灵活性与多样性，分清简单命题与复合命题。

例 1.2.2　将下列命题符号化。

（1）王晓既用功又聪明。

（2）王晓不仅聪明，而且用功。

（3）王晓虽然聪明，但不用功。

（4）张辉与王丽都是三好学生。

（5）张辉与王丽是同学。

解：令 p：王晓用功，q：王晓聪明，r：张辉是三好学生，s：王丽是三好学生，t：张辉与王丽是同学。则上述 5 个命题分别表示为

（1）$p\wedge q$。

（2）$p\wedge q$。

（3）$p\wedge\neg q$。

（4）$r\wedge s$。

（5）t。

说明：

（1）～（4）在自然语言中有不同的表达，但是在数理逻辑形式化语言中使用同一种表示。这说明描述合取式的灵活性与多样性。

（5）中“与”联结的是句子的主语成分，因而（5）中句子是简单命题。

3. 析取联结词“$\vee$”

定义 1.2.3　设 p, q 为二命题，复合命题“p 或 q”称作 p 与 q 的析取式，记作 $p\vee q$，$\vee$ 称作析取联结词，并规定 $p\vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假。

注意这里的“或”与自然语言的“或”完全不同，自然语言的“或”具有二义性，有时具有相容性（即，它联结的两个命题可以同时为真），有时具有排斥性（即，只有当一个为真，另一个为假时，才为真），对应的分别称为相容或和排斥或。

表 1.2.3 析取式的真值定义

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例 1.2.3 将下列命题符号化。

(1) 2 或 4 是素数。

(2) 2 或 3 是素数。

(3) 4 或 6 是素数。

(4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨。

(5) 王晓红生于 1975 年或 1976 年。

解：令 p：2 是素数，q：3 是素数，r：4 是素数，s：6 是素数，则（1）（2）（3）均为相容或。

分别符号化为：$p\vee r, p\vee q, r\vee s$。

它们的真值分别为 1，1，0。

而（4）（5）为排斥或。

令 t：小元元拿一个苹果，u：小元元拿一个梨，则（4）符号化为$(t\wedge\neg u)\vee(\neg t\wedge u)$。

令 v：王晓红生于 1975 年，w：王晓红生于 1976 年，则（5）既可符号化为$(v\wedge\neg w)\vee(\neg v\wedge w)$，又可符号化为 $v\vee w$，为什么？

4. 条件联结词“→”

定义 1.2.4 设 p, q 为二命题，复合命题“如果 p，则 q”称作 p 与 q 的蕴涵式或条件式，记作 $p\to q$，并称 p 是蕴涵式的前件，q 为蕴涵式的后件。→称作蕴涵联结词或条件联结词，并规定，$p\to q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假。

表 1.2.4 蕴涵式的真值定义

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p\to q$ 的逻辑关系：q 为 p 的必要条件。

在使用“→”联结词时，要特别注意：

“如果 p，则 q”的不同表述法很多，列举如下：

若 p，就 q；

只要 p，就 q；

p 仅当 q；

只有 q 才 p；

除非 q 才 p　或　除非 q，否则非 p。

注意：当 p 为假时，$p \to q$ 为真。此时我们称为"善意的推断"。如，说"如果太阳从西边升起，我就不姓王"。其实，不管我是否姓王，这句话都是对的，因为，太阳不可能从西边升起。也就是说，前件"太阳从西边升起"为假，不论后件"我不姓王"是真是假，这句话都是对的。还有，自然语言中的前后件一般具有某种内在联系，而数理逻辑是研究抽象的推理，前后件可以无任何内在联系也一样有真值。

这里符号化时易出现的错误是不分充分条件与必要条件。

例 1.2.4　设 p：天冷，q：小王穿羽绒服，将下列命题符号化。

（1）只要天冷，小王就穿羽绒服。

（2）因为天冷，所以小王穿羽绒服。

（3）若小王不穿羽绒服，则天不冷。

（4）只有天冷，小王才穿羽绒服。

（5）除非天冷，小王才穿羽绒服。

（6）除非小王穿羽绒服，否则天不冷。

（7）如果天不冷，则小王不穿羽绒服。

（8）小王穿羽绒服仅当天冷的时候。

解：（1）～（8）的符号化形式分别为

（1）$p \to q$。

（2）$p \to q$。

（3）$\neg q \to \neg p$。

（4）$\neg p \to \neg q$。

（5）$\neg p \to \neg q$。

（6）$p \to q$。

（7）$\neg p \to \neg q$。

（8）$p \to q$。

注意：$p \to q$ 与 $\neg q \to \neg p$ 等值（真值相同）。

例 1.2.5　一位父亲对儿子说："如果我去书店，就一定给你买本《儿童画报》。"问：什么情况下父亲食言？

解：可能情况有四种：

（1）父亲去了书店，给儿子买了《儿童画报》。

（2）父亲去了书店，却没给儿子买《儿童画报》。

（3）父亲没去书店，却给儿子买了《儿童画报》。

（4）父亲没去书店，也没给儿子买《儿童画报》。

显然，（1）（4）父亲没有食言，（3）与父亲的许诺没有抵触，当然也没有食言，只有（2）算食言，而这种情况正好对应蕴涵式为假的"前件真后件假"的条件。

说明：蕴涵规定为"善意推断"合乎情理；条件联结词亦是二元运算。

5. 双条件联结词（也称为等价联结词）"$\leftrightarrow$"

定义 1.2.5　设 p,q 为二命题，复合命题"p 当且仅当 q"称作 p 与 q 的等价式，记作 $p \leftrightarrow q$，

$\leftrightarrow$称作双条件联结词（或等价联结词）。并规定 $p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假。

$p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系为 p 与 q 互为充分必要条件。

表 1.2.5 等价式的真值定义

p	q	$p\leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.2.6 将下列复合命题符号化并求其真值。

（1）2+2=4 当且仅当 3+3=6。

（2）2+2=4 当且仅当 3 是偶数。

（3）2+2=4 当且仅当太阳从东方升起。

（4）2+2=4 当且仅当美国位于非洲。

（5）函数 $f(x)$在 x_0 可导的充要条件是它在 x_0 连续。

解：设 p：2+2=4；q：3+3=6；r：3 是偶数；s：太阳从东方升起；t：美国位于非洲；u：函数 $f(x)$ 在 x_0 可导；v：函数 $f(x)$ 在 x_0 连续。

上述命题分别符号化为 $p\leftrightarrow q$；$p\leftrightarrow r$；$p\leftrightarrow s$；$p\leftrightarrow t$；$u\leftrightarrow v$。

上述命题的真值分别为 1，0，1，0，0。

与前面的联结词一样，双条件命题也可以不顾其因果关系，而只根据联结词定义确定真值。双条件联结词也可记为“iff”，它也是二元运算。

以上给出了 5 个联结词：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，组成一个联结词集合$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，其中 $\neg$ 为一元联结词，其余的 4 个都是二元联结词。使用多个联结词可以组成更复杂的复合命题，此外还可以使用圆括号（和），但是必须成对使用。求复杂的复合命题的真值时，要考虑联结词的优先顺序，规定为 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；如果出现的联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算；若遇有括号时，应该先进行括号中的运算。

注意：

（1）本书中使用的括号全为圆括号。

（2）在日常语言中，由于心理的、习惯的、修辞等原因，对同一个联结词可有不同的表示方法。

① 对“并且”有多种不同的表示方式：如“同时”、“和”、“与”、“以及”、“而且”、“不但……而且……”、“既……又……”、“又”、“尽管……仍然……”、“虽然……依旧……”等。

② 对“或者”有多种不同的表示方式：如“或”、“或许”、“可能”等。

③ 对“否定”有多种不同的表示方式：如“非”、“不”、“没有”、“无”、“并非”等。

④ 对“蕴含”有多种不同的表示方式：如“当（若）……则……”、“若……那么……”、“假如……那么……”等。

⑤ 对“等价”有多种不同的表示方式：如“充分必要”、“相同”、“一样”、“等同”等。

例 1.2.7 “尽管他有病但他仍然坚持工作”中的“尽管……仍然……”与“并且”有相同的逻辑含义。

例 1.2.8 “明天我可能看电影也可能逛公园”中的“可能……可能……”与“或者”有相同的逻辑含义。

例 1.2.9 “倘若他病了他就不能参加这次比赛”中的“倘若……就……”与“蕴含”有相同的逻辑含义。

特别要说明的是，蕴含在日常语言中是“前因后果”的关系，但在数理逻辑中可以允许两者无必然的因果关系。如：“若 $2+2=4$ 则美国位于非洲。”在命题逻辑中允许。真假值取决于两个原子命题的真假值。

1.3　命题公式与赋值

上节讨论了简单命题（原子命题）和复合命题以及它们的符号化形式。原子命题是命题逻辑的基本研究单位，其真值是确定的，又称作命题常项或命题常元。对应地，这里有命题变项。取值 1 或 0 的变元称作命题变项或命题变元。可以用命题变项表示可以变化的陈述句。

将命题变元用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串称为合式公式。当使用联结词集$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$时，合式公式定义如下：

1.3.1　命题公式

定义 1.3.1 （1）单个命题常项和单个命题变项是合式公式。

（2）如果 A 是合式公式，则 $\neg A$ 是合式公式。

（3）如果 A，B 是合式公式，则 $A \wedge B$，$A \vee B$，$A \rightarrow B$，$A \leftrightarrow B$ 都是合式公式。

（4）当且仅当能够有限次地应用（1）（2）（3）所得到的符号串是合式公式。

合式公式也称为命题公式，简称公式。

设 A 是公式，B 是 A 中一部分，若 B 也是合式公式，则称 B 为 A 的子公式。

对于定义 1.3.1，要作以下说明：

（1）定义 1.3.1 是按递归定义方式给出的。

（2）定义中引进了 A，B 等符号，用它们表示任意的合式公式，称作元语言符号，而某个具体的公式，如 p，$\neg p \vee q$ 等称作对象语言符号。

（3）为方便起见，$(\neg A)$，$(A \wedge B)$ 等公式单独出现时，外层括号可以省去，写成 $\neg A$，$A \wedge B$ 等。另外，公式中不影响运算次序的括号也可以省去，如公式 $(\neg p \wedge q) \vee r$ 可以写成 $\neg p \wedge q \vee r$。

例如，下面的符号串都是合式公式：

$$(((\neg p) \wedge q) \rightarrow r) \vee s)$$

$$((p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg r \wedge s)),\ (\neg p \vee q) \wedge r$$

以下符号串都不是合式公式：

$$((p \vee q) \leftrightarrow (\wedge q)),\ (\wedge q)$$

下面给出公式层次的定义。

定义 1.3.2 （1）若公式 A 是单个的命题变项，则称 A 为 0 层公式。