

面向计算机科学与技术专业规范系列教材



离散数学

董晓蕾 曹珍富 编著



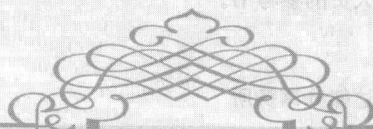
Discrete Mathematics



机械工业出版社
China Machine Press

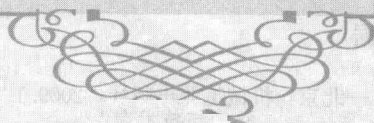
0158
397

面向计算机科学与技术专业规范系列教材



离散数学

董晓蕾 曹珍富 编著



Discrete Mathematics



机械工业出版社
China Machine Press

全书共 14 章,第 1~2 章为数理逻辑,第 3~5 章为集合论,第 6~8 章为代数系统,第 9~10 章为组合分析与算法数论,第 11~14 章为图论。每部分内容尽量由浅入深,同时都尽量安排了“应用”,试图让读者懂得“学以致用”。其中有些应用对科技进步产生重要作用,有些应用在科学理论上意义重大。

本书内容丰富翔实,条理清晰,可作为高等院校计算机、电类及相关专业“离散数学”课程的教材,也可作为相关科研人员的参考书。

版权所有,侵权必究。

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/董晓蕾等编著. —北京:机械工业出版社,2009.1
(面向计算机科学与技术专业规范系列教材)

ISBN 978-7-111-23571-2

I. 离… II. 董… III. 离散数学—高等学校—教材 IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 085005 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:王春华

北京牛山世兴印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

2009 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·20.25 印张

标准书号:ISBN 978-7-111-23571-2

定价:35.00 元

凡购本书,如有倒页、脱页、缺页,由本社发行部调换
本社购书热线:(010)68326294

出版者的话

机械工业出版社华章公司是国内重要的教育出版公司，培生教育集团(拥有 Addison Wesley、Prentice Hall 等品牌)是全球知名的教育出版集团，双方在过去长达十余年的合作中秉承“全球采集内容，服务教育事业”的理念，遴选、移译了国外大量的在计算机科学界享誉盛名的专家名著与名校教材，其中包括 Donald E. Knuth、Alfred V. Aho、Jeffrey D. Ullman、John E. Hopcroft、Dennis Ritchie 等大师名家的经典作品(收录在大理石封面的“计算机科学丛书”中)，这些作品对国内计算机教育及科研事业的发展起到了积极的促进作用。

随着国内计算机科学与技术专业学科建设的不断完善、教学研究的蓬勃发展，以及教材改革的逐渐深化，计算机科学与技术专业的优秀课程及教材不仅仅是“引进来”(版权引进)，而且需要“走出去”(版权输出)了。

近几年以来，教育部计算机科学与技术专业教学指导分委员会根据我国计算机专业教育的现状以及社会对人才的需求，发布了《高等学校计算机科学与技术专业发展战略研究报告暨专业规范(试行)》(以下简称《规范》)。为配合《规范》的实施推广，同时为落实中央“提高高等教育质量”的最新指导思想，在教育部计算机科学与技术专业教学指导分委员会的指导下，在国内知名高校众多教授的帮助下，我们出版了这套“面向计算机科学与技术专业规范系列教材”。

本套教材的作者在长达数十年的科研和教学经历中积累了大量的知识和经验，也奠定了他们在学术和教学领域的地位，教材的内容体现了他们的教学思想和教学理念，本套教材也是传承他们优秀教学成果的最好载体，是中国版的专家名著和名校教材，相信它们的出版对提高计算机科学与技术专业的教育水平和教学质量能够起到积极的作用。

华章与培生作为专业的出版团队，愿与高等院校的老师共同携手，在这套教材的出版上引进国际先进教材出版经验，在教学配套资源的建设上做出新的尝试，为促进中国计算机科学与技术专业教育事业的发展，为增进中国与世界文化的交流而努力。



华章教育 培生教育集团

序 言

近 20 年里, 计算机学科有了很大的发展, 人们普遍认为, “计算机科学”这个名字已经难以涵盖该学科的内容, 因此, 改称其为计算学科(Computing Discipline)。在我国本科教育中, 1996 年以前曾经有计算机软件专业和计算机及应用专业, 之后被合并为计算机科学与技术专业。2004 年以来, 教育部计算机科学与技术专业教学指导分委员会根据我国计算机专业教育和计算学科的现状, 为更好地满足社会对计算机专业人才的需求, 发布了《高等学校计算机科学与技术专业发展战略研究报告暨专业规范(试行)》(以下简称《规范》), 提出在计算机科学与技术专业名称之下, 构建计算机科学、计算机工程、软件工程和信息技术四大专业方向。《规范》中四大专业方向的分类, 在于鼓励办学单位根据自己的情况设定不同的培养方案, 以培养更具针对性和特色的计算机专业人才。

为配合《规范》的实施, 落实中央“提高高等教育质量”的精神, 我们规划了“面向计算机科学与技术专业规范系列教材”。本系列教材面向全新的计算学科, 针对我国高等院校逐步向新的计算机科学与技术专业课程体系过渡的趋势编写, 在知识选择、内容组织和教学方法等方面满足《规范》的要求, 并与国际接轨。本套教材具有以下几个特点:

(1) **体现《规范》的基本思想, 满足其课程要求。**为使教材符合我国高等院校的教学实际, 编委会根据《规范》的要求规划本套教材, 广泛征集在国内知名高校中从事一线教学和科研工作、经验丰富的优秀教师承担编写任务。

(2) **围绕“提高教育质量”的宗旨开发教材。**为了确保“精品”, 本系列教材的出版不走盲目扩大的路子, 每本教材的选题都将由编委会集体论证, 并由一名编委担任责任编委, 最大程度地保证这套教材的编写水准和出版质量。

(3) **教材内容的组织科学、合理, 体系得当。**本套教材的编写注重研究学科的新发展和新成果, 能够根据不同类型人才培养需求, 合理地进行内容取舍、组织和叙述, 还精心设计了配套的实验体系和练习体系。

(4) **教材风格鲜明。**本套教材按 4 个专业方向统一规划, 分批组织, 陆续出版。教材的编写体现了现代教育理念, 探讨先进的教学方法。

(5) **开展教材立体化建设。**根据需要配合主教材的建设适时开发实验教材、教师参考书、学生参考书、电子参考资料等教辅资源, 为教学实现多方位服务。

我们衷心希望本系列教材能够为我国高等院校计算机科学与技术等专业的教学作出贡献, 欢迎广大读者广为选用。

“面向计算机科学与技术专业规范系列教材”编委会

面向计算机科学与技术专业规范系列教材

编委会

主任委员： 蒋宗礼

副主任委员： 王志英 钱乐秋

委员：（以姓氏拼音为序）

陈道蓄	陈 明
傅育熙	何炎祥
黄刘生	贾云得
姜守旭	李仁发
李晓明	刘 辰
马殿富	齐 勇
孙吉贵	孙茂松
吴功宜	吴 跃
谢长生	于 戈
张 钢	周兴社

秘书组： 温莉芳 刘立卿 姚 蕾

本书责任编辑： 傅育熙



前 言

顾名思义,离散数学是研究离散对象及其相互间关系的一个数学分支,它的基本内容已出现在现代科学技术的各个领域。例如,计算机科学、程序设计、计算机网络、信息论与编码、通信理论、现代密码学、数字信号处理和形式语言等都与离散数学密切相关。正因为如此,离散数学在国际上已受到高度重视,在我国也已成为理工科高等院校各专业的重要基础课,尤其是计算机和应用数学专业。

离散数学的内容非常广泛,它至少包含了数理逻辑、集合论、代数学、组合数学、数论、图论、计算理论和复杂性理论、复杂网络以及协同网络计算等内容。这些内容里面又细分了许多个分支学科,包含了当前国际前沿的数学和科学技术理论研究课题。在已出版的众多离散数学教科书及其习题解答中,大部分都是介绍那些应用广泛且易理解、可接受的基本知识和方法。我们也出版了一本《离散数学学习指导》,该书的写作风格类似于国外流行的 Schaum's Outline Series 教材,在内容上则增加了“密码学”或“信息安全理论”的数学基础内容,使离散数学的基本内容有了一些扩展。而本书是在《离散数学学习指导》的基础上编写的一本适应面广、内容适中的离散数学教材。

全书共五篇,依次为数理逻辑、集合论、代数系统、组合分析与算法数论、图论,分成 14 章:命题逻辑,谓词逻辑,集合,关系,函数,半群、语言和自动机,群、环和域,格与布尔代数,组合分析,算法数论,无向图,平面图与图着色,有向图,树。各章都尽量安排了“应用”,试图让学生学以致用。其中,有些应用是对科技进步产生重要作用的,例如,自动定理证明、数字电路、语言与有限自动机、基于身份的密码设计等;有些应用在科学理论上意义重大,例如,超越数无穷的集合论证等。另外,第 10 章(算法数论)还引进了最新的研究成果,特别是近几年才产生的“双线性配对与基于身份的密码”,供读者选学。

本书可作为高等院校计算机及相关专业“离散数学”课程的教材或教学参考书,供两个学期使用。其中,第一篇、第二篇和第五篇的有关内容可作为通常一学期的“离散数学”课程教学内容;第三篇和第四篇的有关内容可作为独立的一学期的“离散数学”课程教学内容,也可作为一学期“密码学”或“信息安全理论”的数学基础课程教学内容。应该指出的是,本书有些内容非常深刻,是近年来的最新研究成果介绍,教师在讲授时应有所选择,读者在学习中也应有所区别。

本书在编写过程中参考了许多已经出版的同类书籍,例如,第一篇、第二篇参考了文献[1-13],第三篇参考了文献[14-17],第四篇参考了文献[18-30],第五篇参考了文献[31-36]。在此对这些书的作者表示由衷的感谢!

我们在编写本书时虽然花费了很多时间,且又有《离散数学学习指导》作为蓝本,但由于水平所限,书中难免存在疏漏。希望读者发现问题随时与我们联系(E-mail: dmjc@cs. sjtu. edu. cn),我们会在重印或再版时加以改正。

最后,我们感谢傅育熙教授在百忙之中的审稿,感谢机械工业出版社华章分社的编辑的细心编辑加工,使本书增色不少。

作 者

2008 年 5 月于上海

本书可作为两个学期的《离散数学》教材，也可作为一个学期《离散数学》、另一个学期《密码学数学基础》或《信息安全数学基础》教材，适应面较广。其中大多数定理和推论都给出了证明，也有少量的定理或推论没有证明。没有证明的部分有的可以留作习题，也有个别定理的证明超出了本书的范围(这些在书中一般都已注明)。下面是本书的具体教学建议。

(1)本书的第一篇、第二篇和第五篇的有关内容可作为通常一学期的《离散数学》课程教学内容。这样选择至少有两个可虑：首先，“数理逻辑”、“集合论”和“图论”既是离散数学的基本内容，也是学习计算机学科其他课程所必需的基础；其次，这些内容可以独立成篇，“教”和“学”都很容易接受。

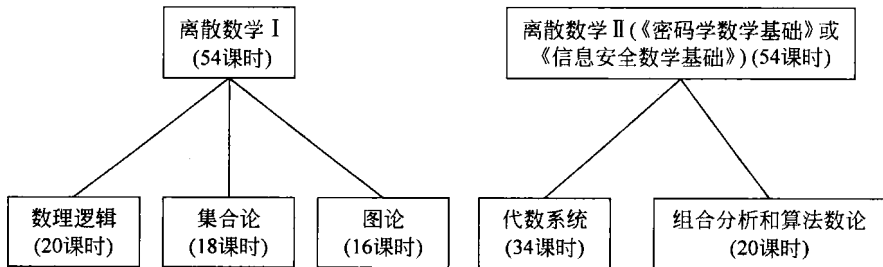
在这部分教学中，我们建议整个课时数为 54。具体课时分配方案是：“数理逻辑”部分 20 课时、“集合论”部分 18 课时、“图论”部分 16 课时。其中，“数理逻辑”部分的“命题逻辑推理的机械化方法”、“集合论”部分的“二元运算”可以不讲。

(2)第三篇和第四篇的有关内容可独立作为另一个学期的《离散数学》课程教学内容，也可作为一学期《密码学数学基础》或《信息安全数学基础》的教学内容。这部分内容主要是“代数系统”、“组合分析和算法数论”，它们既是《离散数学》的内容，也是“密码学”或“信息安全理论”的数学基础课程教学内容。

这部分建议课时数也为 54。具体课时分配方案有两种：第一种是不可考虑与其他教学内容冲突，建议：“代数系统”部分最多可安排 34 课时、“组合分析和算法数论”部分 20 课时。第二种课时分配方案是需要考虑与其他内容可能存在的冲突。如果“形式语言与自动机”能够独立开课，那么这时建议“半群、语言和自动机”部分删除“语言和自动机”内容。这样可安排“代数系统”部分 30 课时、“组合分析和算法数论”部分 24 课时。

上述分配方案中，“算法数论”部分的“有限域上的椭圆曲线算术和 ECC”、“配对和基于身份的公钥密码体制”可供选择作为激发学生学习兴趣的内容，而不要求在正常教学范围。同时，有些内容可以留作“大作业”，例如“原根计算”和对有关密码方案安全性的讨论等。

上述内容分配和课时分配建议可以用两张图来说明：



应该指出，上述教学建议仅供使用本教材的同仁参考。我们也会在实践中进一步完善本书的内容。希望使用本教材的同仁随时提出意见，在这里提前谢谢大家！



目 录

出版者的话

序言

前言

教学建议

第一篇 数理逻辑

第 1 章 命题逻辑	3
1.1 命题与联结词	3
1.1.1 命题基本概念	3
1.1.2 命题联结词	4
1.1.3 复合命题	6
1.2 命题公式	9
1.2.1 定义	9
1.2.2 赋值	10
1.2.3 真值表技术	11
1.3 等值演算	14
1.3.1 基本等值式	14
1.3.2 等值演算过程	15
1.3.3 对偶公式和内否公式	17
1.4 命题公式的范式	20
1.4.1 析取范式和合取范式	20
1.4.2 主范式	21
1.5 联结词的功能完全集	25
1.5.1 真值函数	25
1.5.2 功能完全集	26
1.6 永真蕴涵式	29
1.6.1 基本永真蕴涵式	29
1.6.2 证明永真蕴涵式的方法	31
1.7 命题逻辑推理	34
1.8 命题逻辑归结推理法	37
1.9 命题逻辑推理的机械化方法	39
第 2 章 谓词逻辑	45
2.1 谓词逻辑的基本概念	45

2.1.1 谓词的概念	45
2.1.2 量词的概念	46
2.2 谓词逻辑公式	49
2.2.1 合式公式	49
2.2.2 约束变元和自由变元	50
2.2.3 赋值	51
2.2.4 换名规则和替换规则	53
2.3 谓词逻辑的等值演算与前束范式	55
2.3.1 基本等值式	55
2.3.2 前束范式	57
2.4 Skolem 标准型	59
2.4.1 $\exists$ 前束范式	59
2.4.2 无 $\exists$ 前束范式	61
2.5 谓词逻辑的推理理论	63
2.5.1 基本永真蕴涵式	63
2.5.2 推理规则	63
2.5.3 推理实例	64
2.6 谓词逻辑的归结推理法	69
2.6.1 归结证明过程	69
2.6.2 归结证明实例	70

第二篇 集合论

第 3 章 集合	75
3.1 集合的定义	75
3.2 集合的基本运算	79
3.3 有限集合的计数	88
3.4 集合表达式的相等与包含	92
3.5 集合的特征函数	96
第 4 章 关系	99
4.1 二元关系	99
4.2 二元关系的表示及按性质分类	101

4.2.1	二元关系的关系矩阵和 关系图表示	101
4.2.2	二元关系的按性质 分类	103
4.3	二元关系的运算	107
4.4	二元关系的合成	111
4.5	关系的闭包	116
4.6	等价关系和偏序关系	120
4.6.1	等价关系	121
4.6.2	偏序关系	123
第5章	函数	128
5.1	函数的基本概念	128
5.2	函数的性质	129
5.3	函数的复合与反函数	133
5.4	可逆函数集与置换	136
5.5	二元运算	138
5.6	基数	141

第三篇 代数系统

第6章	半群、语言和自动机	147
6.1	半群与语言	147
6.2	语言和文法	150
6.3	有限状态机	154
6.4	有限状态自动机	155
6.5	语言与自动机的关系	159
第7章	群、环和域	163
7.1	群的基本概念	163
7.2	子群	165
7.3	群的同态与同构	167
7.4	子群的陪集	169
7.5	对称群、置换群、正规性与 商群	171
7.6	群在集合上的作用	174
7.7	同态基本定理与同构定理	177
7.8	环的基本概念	178
7.9	子环、理想与商环	181
7.10	交换环中的因子分解	183
7.11	多项式环	186

7.12	多项式环的因子分解	187
7.13	域的基本概念	189
7.14	分裂域	191
7.15	有限域	193
第8章	格与布尔代数	196
8.1	格的概念	196
8.2	分配格	199
8.3	有补格	201
8.4	布尔代数	202
8.5	布尔表达式	204
8.6	数字电路与最小化	205

第四篇 组合分析与算法数论

第9章	组合分析	211
9.1	计数	211
9.2	排列与组合	213
9.3	递推序列	216
9.4	抽屉原理	222
9.5	生成函数	226
第10章	算法数论	232
10.1	整数论	232
10.2	与整数有关的典型算法	240
10.3	素性测试、因数分解与公钥 密码学	245
10.3.1	素性测试	245
10.3.2	因数分解	248
10.3.3	公钥密码	252
10.4	有限域上的椭圆曲线算术和 ECC	255
10.5*	配对和基于身份的公钥密码 体制	259
10.5.1	双线性配对	260
10.5.2	基于身份的密码	263

第五篇 图论

第11章	无向图	267
11.1	无向图的基本概念	267

11.2 无向图的表示	271	12.4 图着色	293
11.3 无向图的连通性	273	第 13 章 有向图	296
11.4 欧拉图与哈密顿图	277	13.1 有向图的基本概念	296
11.4.1 欧拉图	277	13.2 有向图的连通性	298
11.4.2 哈密顿图	279	第 14 章 树	302
11.5 最短通道问题	282	14.1 基本定义和性质	302
第 12 章 平面图与图着色	287	14.2 生成树与最小生成树	304
12.1 平面图的基本概念	287	14.3 有根树	307
12.2 欧拉公式和极大平面图	288	14.4 二叉树和哈夫曼树	310
12.3 平面图的对偶图	292	参考文献	313

第一篇
PART ONE

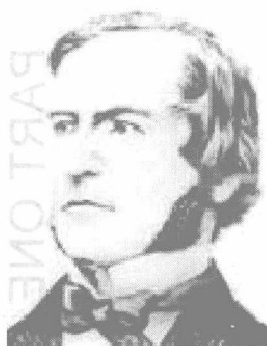
数理逻辑

数理逻辑是用数学方法研究推理过程的规律，特别是研究数学证明的科学。这里所说的数学方法就是引进一整套形式符号系统。因为引进了符号系统，所以数理逻辑也称为符号逻辑。

数理逻辑的创始人是德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646—1716)。由于他很欣赏数学的精确和严格，因此他对形式逻辑总也不满意。他指出新的逻辑学应有两点要求：一是直观，像几何那样通过画图来进行证明，使得思维推理过程有规律可循；二是像代数那样，利用公式进行推演，使得整个推理过程快速、方便、简明、确切。由于当时的社会条件，他的想法并没有实现。但是他的思想却是现代数理逻辑部分内容的萌芽。



德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646—1716)



英国数学家布尔(G. Boole, 1815—1864)

1847年，英国数学家布尔发表了《逻辑的数学分析》，建立了“布尔代数”，并创造了一套符号系统，利用符号来表示逻辑中的各种概念。布尔建立了一系列的运算法则，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础。

19世纪末20世纪初，数理逻辑有了比较大的发展。1884年，德国数学家弗雷格(Gottlob Frege, 1848—1925)出版了《数论的基础》一书，在书中引入量词的符号，使得数理逻辑的符号系统完备化。从而逐步形成了现代数理逻辑最基本的理论基础，使数理逻辑成为一门独立的学科。

现代数理逻辑除了继续研究数学基础课题外，还扩展到了现代科学技术当中，特别是计算机科学当中。在程序语言、自动机理论、逻辑网络、机器翻译与机器证明等方面都有不可缺少的应用。

本篇主要介绍数理逻辑的基本内容——命题逻辑和谓词逻辑，试图让读者了解到其中的基本知识、基本思想，并希望读者能从中学到解决问题的方法。

命题逻辑

本章介绍命题逻辑的基本知识、基本思想和方法。命题逻辑又称命题演算，是以命题为研究对象、以推理中前提和结论之间的形式关系为研究目的的逻辑学科，包括命题与联结词、命题公式(特别是真值表技术)、等值演算、命题公式的范式、联结词的功能完全集、永真蕴涵式、命题逻辑的推理理论、命题逻辑推理的机械化方法等。

1.1 命题与联结词

1.1.1 命题基本概念

命题对于命题逻辑来说是一个原始的概念，因此不能在命题逻辑的范围内给出它的精确定义，只能描述它的性质。

【定义 1.1】 在经典命题逻辑中，把能判断真假但不能既真又假的陈述句的内容称为命题。

命题必须为陈述句的内容，而不是陈述语句。有关语句的介绍可见第 6 章。

为了说明命题是陈述句的内容，通常在陈述语句外面加引号来表示命题。例如，陈述语句：3 是素数。构成的命题是“3 是素数”，即 3 是素数是语句(不是命题)，“3 是素数”是命题。

命题必须具有真假值。疑问句、祈使句、感叹句的内容没有真假之分，所以它们不是命题。例如，“北京是中国的首都”是命题；“关门！”，“你上哪里？”这种命令和问话语句其内容不能判断真假，所以不是命题；“太阳系外有外星人”，目前人类尚无法确定其真假，但从事物的本质而论，该语句的内容是可分辨真假的，所以它也是命题。

注意 能判断真假，并不意味着现在就能确定其是真还是假，只要它具有唯一确定的真假值即可。这方面的例子很多，如数论中的哥德巴赫猜想：“任何大于等于 4 的偶数可表示成两个素数之和”，到目前为止，人类还不能证明它是真的还是假的，但它只能要么是真的、要么是假的，所以是命题。

【例 1.1】 指出下列语句所表述的内容哪些为命题？哪些不是命题？

- (1) 太阳从东方升起。
- (2) 2008 年 8 月 8 日天空万里无云。
- (3) 2 加 3 等于 10。
- (4) $x+y>6$ 。
- (5) 命题是假的。
- (6) 太阳从西边出来吗？
- (7) 但愿你是对的。

(8)请将这个定理证明一下!

(9)哥德巴赫猜想是正确的。

(10)大海多么宽广啊!

(11)这牡丹花好漂亮啊!

(12)白玉兰花是香的。

【解】 (1)、(2)、(3)、(9)和(12)表述的内容是命题。(6)、(7)、(8)、(10)和(11)表述的内容不能判断真假,所以不是命题。(4)、(5)表述的内容不可能判断其为真或为假,所以也不是命题。

【定义 1.2】 命题只能为真或假,把这种真假的结果称为命题的**真值**。如果命题的真值为真,则该命题称为**真命题**,其真值记为 1(或记为 **T**);如果命题的真值为假,则该命题称为**假命题**,其真值记为 0(或记为 **F**)。

如命题“太阳从东方升起”是真命题,其真值为 1;而命题“太阳从西边出来”就是假命题,其真值为 0。

【定义 1.3】 有确定真值的命题称为**命题常量**。

命题常量就像初等数学中的常量一样,例如“3 是素数”、“太阳从西边出来”都是命题常量。

【定义 1.4】 引入符号来表示任意的命题常量,这个符号称为**命题变量**或**命题符号**。命题变量不具有真值,只有指派一个确定的命题常量后,才具有指派的真值。

通常用 a, b, c 等小写英文字母或带下标来表示命题常量或者变量。如果命题符号 a 代表命题常量,则意味着它是某个具体命题的符号化;如果 a 代表命题变量,则意味着它可指派任何具体命题。如果没有特别指明,通常所说的命题符号都是命题变量,即可指派任何命题。

1.1.2 命题联结词

【定义 1.5】 将联结命题与命题的字词称为**命题联结词**。基本的命题联结词包括:否定(非)、合取(与)、析取(或)、蕴涵(条件)和等价(双条件)。

(1)设 a 是任意命题,命题“非 a ”称为 a 的否定(非),记为 $\neg a$,其中符号 $\neg$ 称为否定联结词。

【例 1.2】 设 a :“今天是星期三”,求 a 的否定命题 $\neg a$ 的自然语言表示。

【解】 a 的否定 $\neg a$ 是一个命题,且 $\neg a$ 的自然语言表示为

$\neg a$:“今天不是星期三”

注意 $\neg a$ 不能理解为“今天是星期四”。因为“今天是星期三”的否定,并不一定必是星期四,还可能是星期五,星期六,等等。

(2)设 a 和 b 是任意命题,命题“ a 且 b ”称为 a 和 b 的合取(与),记为 $a \wedge b$;其中符号 $\wedge$ 称为合取联结词。

【例 1.3】 设两个命题 a 和 b 如下:

a :“房间内有 5 张桌子”

b :“房间内有 10 把椅子”

求 $a \wedge b$ 的自然语言表示。

【解】 $a \wedge b$ 是一个命题,且 $a \wedge b$ 的自然语言表示为

$a \wedge b$:“房间内有 5 张桌子和 10 把椅子”

(3)设 a 和 b 是任意命题,命题“ a 或 b ”称为 a 和 b 的析取(或),记为 $a \vee b$,其中符号 $\vee$ 称为析取联结词。

【例 1.4】 设两个命题 a 和 b 如下:

a :“今天刮风”

b :“今天下雨”

求 $a \vee b$ 的自然语言表示。

【解】 $a \vee b$ 是一个命题，且 $a \vee b$ 的自然语言表示为

$a \vee b$:“今天刮风或者下雨”

(4) 设 a 和 b 是任意命题，命题“如果 a 那么 b ”称为 a 蕴涵 b ，记为 $a \rightarrow b$ ，其中符号 $\rightarrow$ 称为蕴涵联结词。

$a \rightarrow b$ 的逻辑关系是： $a \rightarrow b$ 为假当且仅当 a 为真，而 b 为假。 a 称为蕴涵前件， b 称为蕴涵后件。

【例 1.5】 设两个命题 a 和 b 如下：

a :“ $1+1=3$ ”

b :“太阳从西边出来”

求 $a \rightarrow b$ 的自然语言表示。

【解】 $a \rightarrow b$ 是一个命题，且 $a \rightarrow b$ 的自然语言表示为

$a \rightarrow b$:“如果 $1+1=3$ ，那么太阳从西边出来”

从蕴涵联结词的定义看，由于“ $1+1=3$ ”是假命题或者说 a 的真值为 0，不管 b 取真还是取假都有 $a \rightarrow b$ 的真值为 1，即“如果 $1+1=3$ ，那么太阳从西边出来”是真命题。

(5) 设 a 和 b 是任意命题，命题“ a 当且仅当 b ”称为 a 与 b 等价，记为 $a \leftrightarrow b$ ，其中符号 $\leftrightarrow$ 称为等价联结词。

只有当两个命题 a 、 b 的真值相同时， $a \leftrightarrow b$ 的真值方为 1。而当 a 、 b 的真值不同时， $a \leftrightarrow b$ 的真值为 0。

【例 1.6】 设两个命题 a 和 b 如下：

a :“ $\triangle ABC$ 是等腰三角形”

b :“ $\triangle ABC$ 中有两个角相等”

求 $a \leftrightarrow b$ 的自然语言表示。

【解】 $a \leftrightarrow b$ 的自然语言描述是“ $\triangle ABC$ 是等腰三角形当且仅当 $\triangle ABC$ 中有两个角相等”。

显然，就这个例子而言， $a \leftrightarrow b$ 的真值是 1。

上述定义中的非、合取、析取、蕴涵和等价是命题逻辑中的术语，而“非 a ”、“ a 且 b ”、“ a 或 b ”、“如果 a 那么 b ”以及“ a 当且仅当 b ”给出的命题是自然语言中的典型表达方法。

上述五个命题联结词可用表 1-1 来严格定义。在这个表中，左边是 a 、 b 的所有真值排列，右边是对应每一种真值排列的新命题的取值。这种表称为真值表。

表 1-1 五个联结词的真值表

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

这种定义显然是自然语言中联结词的抽象，反映了自然语言中联结词的基本特征。但有三点是要注意的：

(1)在命题逻辑中,允许两个没有任何内在联系的命题之间用联结词联结,得到新的命题。新命题的真值由表 1-1 给出。

(2) $a \vee b$ 的逻辑关系是: $a \vee b$ 为真当且仅当 a 和 b 中至少有一个为真。但自然语言中的“或”既可能具有相容性,也可能具有排斥性。命题逻辑中的“或”(析取)采用了相容性。事实上,在命题逻辑中我们将不相容的“或”称为“异或”,用符号 $a \nabla b$ 来表示。 $a \nabla b$ 为真当且仅当 a 和 b 中一个为真、一个为假。所以异或联结词的真值表如表 1-2 所示。

表 1-2 异或联结词的真值表

a	b	$a \nabla b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(3)现实世界中的“如果……那么……”与这种蕴涵的定义基本一致。例如,命题“如果实数 $m < 1$,那么实数 $m < 3$ ”显然对任何给定的实数 m 都是真命题。所以取 m 分别为 0, 2, 4, 我们得到如下三个真命题:

- “如果 $0 < 1$,则 $0 < 3$ ”(对应 a 和 b 的真值分别为 1, 1)。
- “如果 $2 < 1$,则 $2 < 3$ ”(对应 a 和 b 的真值分别为 0, 1)。
- “如果 $4 < 1$,则 $4 < 3$ ”(对应 a 和 b 的真值分别为 0, 0)。

命题逻辑中的这种蕴涵意味着可从假的前提推出任何命题来。

1.1.3 复合命题

【定义 1.6】 不能表示成含命题联结词的命题称为简单命题或原子命题,否则称为复合命题。复合命题使用命题联结词联结简单命题而得到。

当然,符号化的复合命题在自然语言中有许许多多的表达方法,这也是为什么自然语言有二义性的原因。

【例 1.7】 判断下面语句的内容是否是复合命题?若是,说明是由哪两个命题构成,指出其中的命题联结词,并说明是真命题还是假命题。

- (1)3 大于或等于 3。
- (2)张三和李四是同学。
- (3)1 加 1 等于 2 并且太阳从东方升起。
- (4)如果时间静止不动,你就可以长生不老。
- (5)如果时间流逝不止,你就可以长生不老。
- (6)太阳从西边出来当且仅当 $2 > 1$ 。
- (7)太阳从西边出来当且仅当 $1 > 2$ 。

【解】

(1)是复合命题。由简单命题“3 大于 3”和“3 等于 3”构成。其中的命题联结词是“或”。因为命题“3 大于 3”的真值是 0,命题“3 等于 3”的真值为 1,所以复合命题“3 大于或等于 3”是真命题。

(2)不是复合命题。其中的“和”只是“张三”与“李四”的联结,而不能变成两个命题的联结。

(3)是复合命题。由简单命题“1 加 1 等于 2”和“太阳从东方升起”构成。其中的命题联结词是“并且”。因为命题“1 加 1 等于 2”的真值是 1,命题“太阳从东方升起”的真值为 1,所以复合命题“1 加 1 等于 2 并且太阳从东方升起”是真命题。

(4)是复合命题。由简单命题“时间静止不动”和“你可以长生不老”构成。其中的命题联结词是“如果……(那么)……”。因为命题“时间静止不动”的真值是 0,命题“你可以长生不老”的真值