全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

主　编　徐　强
主　审　陆宜清
副主编　白秀琴　霍本瑶　吕保献

高等教育出版社
Higher Education Press

全国高职高专教育"十一五"规划教材

高等数学

主　编　徐　强

主　审　陆宜清

副主编　白秀琴　霍本瑶　吕保献

编　委　沈志勇　刘义山　聂天霞　庞帮艳

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部新制定的“高职高专教育数学课程教学基本要求”，结合基于工作过程导向的课程改革思路和编者多年教学经验而编写的。

本书的主要内容有函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，无穷级数，数学软件包 Matlab 等。书后附有初等数学常用公式，还有习题答案等供读者参考。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校以及本科院校的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校理工类专业的一学期高等数学课程的教材，也可作为相关技术人员和其他大专类学生的学习参考书和教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/徐强主编. —北京：高等教育出版社，2009.7

ISBN 978-7-04-027243-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 徐… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 095301 号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 丁鹤龄 **封面设计** 张志奇 **责任绘图** 尹文军

版式设计 马敬茹 **责任校对** 姜国萍 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京印刷集团有限责任公司印刷二厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2009年7月第1版
印　　张	17.5	**印　　次**	2009年7月第1次印刷
字　　数	420 000	**定　　价**	19.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　27243-00

前　言

高等数学课程是高等职业教育、高等专科教育、成人高等教育中理工类专业的一门必修的重要基础课和工具课。它对培养学生的理性思维、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。为了贯彻落实教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》(教高[2006]16号)文件精神,适应高等职业教育以服务为宗旨,以就业为导向,深化校企合作,工学结合和顶岗实习的需要,根据示范性高职院校建设和基于工作过程导向的课程改革的需求,真正落实高素质技能型专门人才的培养目标,结合高等职业教育数学教学的特点和专业技能课程对数学的要求,我们组织编写了这本教材。

本教材遵循高职高专教育的教学规律,本着重能力、重素质、求创新的总体思路,强化概念,淡化计算,注重应用,充分体现了"以应用为目的,以必需、够用为度"的原则,编写过程体现了严谨性与量力性相结合的特点,侧重了对学生数学思维能力的培养,注意其中问题的提出、引入,具有结构严谨,逻辑清晰,叙述得当,题量适中,便于自学等特点,全书通俗易懂,具有科普特色。

本教材在尽量保持数学的系统性、逻辑性与科学性的同时,适度淡化理论,强调直观,减少论证。对难度较大的部分基础理论和结论,考虑到量力性原则,一般不做论证和推导,只叙述定理,仅作简单说明,尽量用几何图形、数表、案例说明其实际背景和应用价值,由此加深对基本理论和概念的理解;对与专业联系较多的基本知识、基本理论和基本运算技能给予了重点加强;注重基本运算技能的训练,但不过分追求复杂的计算和变换的技巧,复杂的运算注意使用数学软件;注重贯彻循序渐进原则和启发式教学原则。

本教材内容结合专业,为突出培养专业人才的能力,服务专业课教学,体现数学的工具性,无论从概念、定理等的引入角度,还是在概念、定理的应用方面都编入了大量贴近生活和具有理工类专业背景的引例、案例和习题,强化数学的应用性,特别适合高职高专理工类各专业使用。

本书的主要内容有函数、极限与连续,导数与微分,导数应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,无穷级数,数学软件包Matlab等。书后附有初等数学常用公式,习题答案与提示等供读者参考。

本书由陆宜清教授担任主审,她对本书的框架和内容编写提出了非常好的建议,在此表示感谢.本书在编写过程中,自始至终得到了王冰和邓雁城两位编辑的大力支持和帮助,他们为本书的成稿付出了辛勤的劳动,并提出诸多好的建议,在此一并致以诚挚的谢意。

限于编者的水平,书中一定存在缺点和不足之处,敬请读者提出宝贵意见并批评指正。

编者

2009年5月

目　　录

绪　论

如果将整个数学比作一棵大树，那么初等数学是树的根，名目繁多的数学分支是树枝，而树干的主要部分就是微积分，微积分堪称是人类智慧最伟大的成就之一．高职高专高等数学课程的最基本、最重要的内容就是微积分．

一、什么是微积分

从微积分成为一门学科来说，是在17世纪，但是，微分和积分的思想早在古代就已经产生了．公元前3世纪，古希腊的数学家、力学家阿基米德（公元前287—公元前212）的著作《圆的测量》和《论球与圆柱》中就已含有微积分的萌芽，他在研究解决抛物线下的弓形面积、球和球冠面积、螺线下的面积和旋转双曲线的体积的问题中就隐含着近代积分的思想．作为微积分的基础极限理论来说，早在我国的古代就有非常详尽的论述．比如战国时期的思想家、哲学家庄周（约前369—前286年）所著的《庄子》一书中的"天下篇"中，著有"一尺之棰，日取其半，万世不竭"．三国后期的数学家，中国古典数学理论的奠基者之一刘徽在他的割圆术中提出"割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣"．德国天文学家刻卜勒（1571—1630年）在1615年《测量酒桶体积的新科学》一书中，就把曲线看成边数无限增大的直线形．意大利数学家卡瓦列利（1598—1647年）在1635年出版的《连续不可分几何》，就把曲线看成无限多条线段（不可分量）拼成的．这些都为后来的微积分的诞生作了思想准备．

由于16世纪以后欧洲封建社会日趋没落，取而代之的是资本主义的兴起，为科学技术的发展开创了美好前景．到了17世纪，有许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述问题做了大量的研究工作．法国数学家笛卡儿（1596—1650年）1637年发表了《科学中的正确运用理性和追求真理的方法论》（简称《方法论》），从而确立了解析几何，表明了几何问题不仅可以归结成为代数形式，而且可以通过代数变换来发现几何性质，证明几何性质．他不仅用坐标表示点的位置，而且把点的坐标运用到曲线上．他认为点移动成线，所以方程不仅可表示已知数与未知数之间的关系，表示变量与变量之间的关系，还可以表示曲线，于是方程与曲线之间建立起对应关系．此外，笛卡儿打破了表示体积面积及长度的量之间不可相加减的束缚．于是几何图形各种量之间可以化为代数量之间的关系，使得几何与代数在数量上统一了起来．笛卡儿就这样把相互对立着的"数"与"形"统一起来，从而实现了数学史的一次飞跃，而且更重要的是它为微积分的成熟提供了必要的条件，从而开拓了变量数学的广阔空间．

17世纪生产力的发展推动了自然科学和技术的发展，不但已有的数学成果得到进一步巩固、充实和扩大，而且由于实践的需要，开始研究运动着的物体和变化的量，这样就获得了变量的概念，研究变化着的量的一般性和它们之间的依赖关系．到了17世纪下半叶，在前人创造性研究的基础上，英国大数学家、物理学家牛顿（1642—1727年）是从物理学的角度研究微积分的，他为了解决运动问题，创立了一种和物理概念直接联系的数学理论，即牛顿称之为"流数术"的理论，

这实际上就是微积分理论.牛顿的有关"流数术"的主要著作是《求曲边形面积》、《运用无穷多项方程的计算法》和《流数术和无穷极数》.牛顿指出,"流数术"基本上包括三类问题.

(1) 已知流量之间的关系,求它们的流数的关系,这相当于微分学.

(2) 已知表示流数之间的关系的方程,求相应的流量间的关系.这相当于积分学,牛顿意义下的积分法不仅包括求原函数,还包括解微分方程.

(3) "流数术"应用范围包括计算曲线的极大值、极小值,求曲线的切线和曲率,求曲线长度及计算曲边形面积等.

牛顿已完全清楚上述(1)与(2)两类问题中运算是互逆的运算,于是建立起微分学和积分学之间的联系.牛顿在1665年5月20日的一份手稿中提到"流数术",因而有人把这一天作为诞生微积分的标志.

而德国数学家莱布尼茨(1646年—1716年)则是从几何方面研究微积分的,在牛顿和莱布尼茨之前至少有数十位数学家研究过相关问题,他们为微积分的诞生作了开创性贡献.但是他们这些工作是零碎的,不连贯的,缺乏统一性.莱布尼茨创立微积分的途径与方法与牛顿是不同的.莱布尼茨是经过研究曲线的切线和曲线包围的面积,运用分析学方法引进微积分概念、得出运算法则的.牛顿在微积分的应用上更多地结合了运动学,造诣较莱布尼茨高一筹,但莱布尼茨的表达形式采用数学符号却又远远优于牛顿一筹,既简洁又准确地揭示出微积分的实质,强有力地促进了高等数学的发展.莱布尼茨创造的微积分符号,正像印度——阿拉伯数码促进了算术与代数发展一样,促进了微积分学的发展.莱布尼茨是数学史上最杰出的符号创造者之一.莱布尼茨所采用的符号现今仍在使用.莱布尼茨比别人更早更明确地认识到,好的符号能大大节省思维劳动,运用符号的技巧是数学成功的关键之一,他创造的优美、简洁的微积分符号,为微积分的普及和应用做出了巨大的贡献.

微积分学的创建,使数学从常量数学彻底跨入了变量数学,开创了数学发展的新纪元,以往用初等数学须很高技巧或根本无法解决的大量问题,都可以用微积分提供的数学模型,快刀斩乱麻般地得到解决,极大地推动了科技的发展.高等数学的经典内容有函数、极限、导数与微分、不定积分与定积分、微分方程和无穷级数,其中极限是其基本理论基础.

二、为什么要学习《高等数学》

大学的学习阶段应全面提高自己的文化素质,为你终生学习,不断创新的人生打下一个牢固的基础.数学作为人类智慧的结晶,它首先是一种重要的文化,它的本质特征决定了对学生至少有以下三个方面的作用:

(1) 是专业课必不可少的知识工具——工具性;

(2) 是培养理性思维能力和科学思想方法最好的知识载体;

(3) 是提高科学审美意识的重要途径.

在这三个方面的作用中,我们认为培养理性思维能力和科学思想方法,接受美感熏陶是更为重要的、素质性的作用.因为在本质上数学代表了一种理性主义的探索精神,德国数学家康托说过:"数学的本质是自由".这种本质精神使得它在培养人的素质,开发人的创造力方面具有非凡的、不可替代的作用.用爱因斯坦的话说:"创造性原则寓于数学之中".历史表明科学上的重大发现和理论上的重大飞跃往往伴随着科学思想方法上的重大突破.科学思想方法与知识的关系

就像是“鱼”和“渔”. 归纳是数学大厦中的主干,是人类赖以发现世界的最本质、最重要的思维方法. 再如演绎,即用逻辑从已知事物推知新事实的逻辑性思维,也是科学发现的一种重要方法,如海王星、黑洞、正电子、电磁波等不胜枚举的重大发现. 数学美的基本特征为:简洁性、统一性、对称性、整齐性、奇异性和思辨性,数学的美感对于创造性思维方式的培养具有重要作用.

总之,通过数学的学习可以挖掘人们十大能力:归纳总结的能力/演绎推理的能力/提出问题、分析问题、解决问题的能力/抽象的能力/联想的能力/学习新知识的能力/创新的能力/准确计算的能力/口头和书面表达的能力/灵活应用数学软件的能力.

它还能培养人的五大素养:主动探索并善于抓住问题中的背景和本质的素养;善于对现实世界中的现象和过程进行合理的简化与量化,建立数学模型的素养;以数学方式理性思维,从多角度探寻解决问题的道路的素养;具有良好的科学态度和创新精神,能合理提出数学猜想、数学概念的素养;熟练运用准确、严格、简练的数学语言表达自己的数学思想的素养.

在社会发展到数学文化已成为现代科技文化核心的今天,数学文化的形式化语言,理性主义观念,抽象和逻辑的思维方式,已成为现代社会成员必备的素质,这种素质的高低直接关系到社会成员对事物的洞察、理解与判断能力,是具有长期效应的. 学习高等数学,就可以在掌握数学知识的同时,使自己的心理和智能受到引导和启迪,一个人若是在文化素养中缺少了数学素质就是文化缺钙,无论在什么岗位上,数学文化修养已不是种时髦,而是一种工作、学习和人际交往中的一种实在需要了. 虽然所学的数学知识在毕业进入社会后大多没有什么应用机会,通常在出校门后不到一两年很快就忘掉了,但无论你从事什么业务工作,唯有深深地铭刻于头脑中的数学精神、数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点等(若培养了这方面的素质的话),却在随时随地地发生作用,使你受益终生.

三、如何学好高等数学

高职高等数学的授课方式虽然仍是以课堂讲解为主,但讲解是以数学知识为主线,注重讲解发现该知识的原始过程和发现该知识时所用的科学思想方法以及该知识的应用,在追随科学创造和发现知识的足迹的过程中,潜移默化地去提升素质. 与中学数学教学的一个很大的不同点就是每堂课的信息量增长了很多——是中学的几倍甚至是十几倍. 要想学好高等数学,应将强烈的自我学习、自主学习的意念和能力与学习过程紧密配合,并在学习过程中做到:

(1) 基本概念要清楚,要读懂,要理解透彻、叙述准确,不能似是而非、一知半解. 数学的推理完全靠基本概念,基本概念不清楚,很多内容就学不懂,无法掌握和运用. 概念可通过复习与做习题的过程中逐步深入、反复思考、彻底读懂.

(2) 基本理论是数学推理论证的核心,是由一些概念、性质与定理组成的,有些定理并不要求同学们都会证明,但定理的条件和结论一定要清楚,要熟悉定理并学会使用定理.

(3) 掌握数学概念和理论并学会运用主要靠做题,在读懂了内容后要做题,而且要做一定数量的题,才能不断加深对内容的理解,提高解题能力,熟才能生巧,捷径是没有的,“不做题等于没学数学”这是大家公认的事实. 在解题过程中要不断总结思路和方法,掌握解题规律性,通过做题提高分析问题、解决问题的能力,也就是逐步提高数学素养.

(4) 要学好数学就要认真对待学习的各个环节. 首先是听课,听课要精神集中,如能预习效果会更好,要抓住教师讲课中对问题的分析,做好笔记,学会自己动手,边听边记,特别要记下没

有听懂的部分.第二个环节是复习整理笔记及做题,课下结合教材和笔记进行复习,要对笔记按自己的思路进行整理.在复习好并掌握了内容后再做习题,切忌边翻书边看例题,照猫画虎式地完成练习册上的习题,这样做是收不到任何效果的.要用做题来检验自己的学习,是真懂了还是没完全懂.第三是每学完一章,自己要做总结.总结包括一章中的基本概念,核心内容;本章解决了什么问题,是怎样解决的;依靠哪些重要理论和结论,解决问题的思路是什么?理出条理,归纳出要点与核心内容以及自己对问题的理解和体会.最后是全课程的总结.在考试前要做总结,这个总结将全书内容加以整理概括,分析所学的内容,掌握各章之间的联系.这个总结很重要,是对全课程核心内容、重要理论与方法的综合整理.在总结的基础上,自己对全书内容要有更深一层的了解,要对一些稍有难度的题加以分析解决以检验自己对全部内容的掌握.

(5)掌握一种数学软件如:MATLAB或Mathematic.计算机的引入,为数学的思想与方法注入了更多、更广泛的内容,激活了数值计算与数据处理的朴素数学思想与数学方法.同时,计算机的引入,也使学生摆脱了繁重的数学演算,摆脱了数值计算的乏味重复,促进了数学与其专业课教学之间的互融,从而可以使大家有时间去做更多的探索、去掌握更多的数学思想与数学方法.

若能把握住以上五个环节,真正做到认真学习,不放过每个疑难点,一定会学好、用好高等数学.

第一章　函数、极限与连续

在对真理的漫漫摸索中，那种感觉到但无法表达的心情，那种强烈的渴望，那种自信和疑虑的交替状态，直到最后的豁然开朗，这种感觉只有亲自经历的人才能知道.

——爱因斯坦

函数是高等数学研究的基本对象，反映了变量之间的相互关系；极限是高等数学中最重要的概念之一，用以描述变量在一定的变化过程中的终极状态；极限的思想和方法是高等数学中最重要的一种思想方法，极限理论犹如一条红线贯穿于整个高等数学的内容中；连续是函数的一个重要性态. 本章介绍函数的概念及其性质、极限的概念及其运算以及函数的连续性. 函数极限与连续概念的理解与掌握要建立在直观观察的基础之上，练习是掌握极限运算方法的重要途径，注意归纳总结函数极限讨论的方法和技巧.

第一节　函数的概念

一、函数的概念与性质

1. 函数的概念

工程技术、生产实践、自然现象以及人们的日常生活中遇到的变量往往不止一个，并且这些变量不是孤立变化的，而是存在着某种相互依赖的关系，且服从着一定的变化规律. 为了揭示这些变量之间的联系以及它们之间所服从的规律，我们先来考察下面几个例子.（以两个变量为例）.

引例 1.1【生产成本】　已知一企业每天最多生产某种产品 280 件，固定成本支出为 1 200 元，生产单位产品所花费的可变成本为 4 元，每日的产量为 x. 假设每天的生产总成本为 C 元，则

$$C = 1\ 200 + 4x.$$

当产量 x 在数集 $\{1,2,3,\cdots,280\}$ 上任意取一个值时，按照上式，生产总成本 C 就有一个确定的数值与 x 对应.

引例 1.2【列车票价】　空调普快列车的票价和里程之间的关系，如表 1.1 所示（截取其中的一部分）.

表 1.1　空调普快列车票价表

里程	…	81－90	91－100	101－110	111－120	121－130	131－140	141－150	…
票价	…	12	13	14	16	17	18	20	…

从上表可以看出里程和票价之间有着确定的对应关系.每给出一个里程,通过上表都可以找到唯一的一个票价与其对应,这一表格反映了空调普快列车票价与里程之间的关系.

引例 1.3【气温与时间】　某气象观测站的气温自动记录仪,记录了气温 T 与时间 t 之间在某一昼夜的变化曲线,如图 1.1 所示.

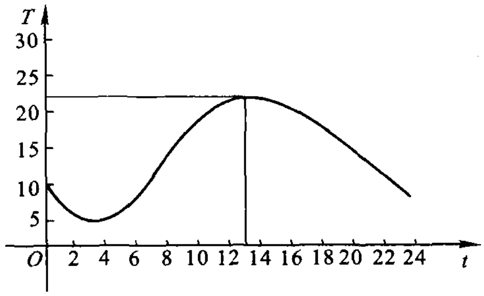

图 1.1

由图 1.1 可知,对于一昼夜内的每一时刻 t,都有唯一确定的温度 T 与之对应,这个图像反映了一昼夜中温度与时刻变化之间的关系.

以上几个例子虽然涉及的问题各不相同,但它们都表达了两个变量之间的一种对应关系,当一个变量在它的变化范围内任取一个确定的值时,另一个变量按照一定法则就有一个确定的值与之对应.把这种变量之间确定的依赖关系抽象出来,就是函数的概念.

定义 1.1　设 x 和 y 是某一变化过程中的两个变量,D 是一给定的数集.如果对于 D 中的每一个 x,按照某种对应法则 f,都有唯一确定的数值 y 与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$. x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为函数的**定义域**.

当 x 在 D 中取某一定值 x_0 时,与其对应的 y 值,称为函数在点 x_0 的**函数值**,记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$,当 x 取遍 D 中的所有值时,与之对应的所有函数值的全体组成的集合称为函数的**值域**.

根据函数的定义,引例 1.1 中生产成本是产量的函数,引例 1.2 中列车票价是里程的函数,引例 1.3 中气温是时间的函数.

对于函数的概念应注意以下几点:

(1) 函数的概念中包含三个要素,即定义域、值域和对应法则,但是确定函数的关键要素是定义域和对应法则.因此,对于两个函数来说,当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时,这两个函数才是同一个函数,与自变量及因变量用什么字母表示没有关系.

(2) 关于函数定义域的确定可分为两种情况,对于实际问题,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的,如引例 1.1、引例 1.2、引例 1.3 .未标明实际意义的函数,其定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围,例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1,1]$.

(3) 我们给出的函数只有一个自变量,因此称为一元函数,并且对于自变量 x 在定义域内的每一个值,因变量 y 有唯一确定的值与其对应,这样的函数称为**单值函数**.在以后的讨论中,在没有特别说明的情况下,我们讨论的函数均为一元单值函数.

(4) 函数的表示方法常用的有三种,即:解析法(引例 1.1)、列表法(引例 1.2)和图像法(引例 1.3).

例 1.1　求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$;　　　(2) $y=\sqrt{3-x}+\log_2(x-1)$.

解　(1) 要使原式有意义,分母不能为零.

令 $x^2-x-2=0$,得 $x_1=-1,x_2=2$,所以函数的定义域为:

$$D=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty).$$

(2) 要使原式有意义,x 的变化必须满足

$$\begin{cases} 3-x\geqslant 0, \\ x-1>0. \end{cases}$$

解之得:$1<x\leqslant 3$,所以函数的定义域为 $D=(1,3]$.

例 1.2　下列各对函数是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}, g(x)=\cos x$;

(3) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}, g(x)=|x-1|$.

解　(1) 不相同,因为函数的定义域不同.

(2) 不相同,因为函数的对应法则不同.

(3) 相同,因为函数的定义域和对应法则均相同.

案例 1.1【汽车租赁】　一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金 180 元,加每千米收费 12 元.写出租用这种汽车一天的租车费(单位:元)与行车路程(单位:km)之间的函数关系;若某人一天交了 600 元租车费,问他行驶了多少千米?

解　设一天的租车费用为 y 元,行程为 $x$km,则 $y=180+12x$.

令 $y=600$,解得 $x=35$,即若某人一天交了 600 元租车费,则他行驶了 35 km.

2. 反函数

引例 1.4　已知圆的半径为 r,则其面积 $A=\pi r^2$,此时,A 是 r 的函数.若已知圆的面积 A,求它的半径 r,显然有 $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$,这时面积 A 是自变量,r 是 A 的函数.这里称函数 $r=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$ 为函数 $A=\pi r^2$ 的反函数.

定义 1.2　已知函数 $y=f(x)$,定义域为 D,值域为 M;若对于每一个 $y\in M$,通过 $y=f(x)$ 总有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应,则称由此所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**.同时把 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由于习惯用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此常常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$. $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数,例如 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 与 $y=x^3-1$ 互为反函数.

注意　(1) 并不是所有的函数都有反函数,只有定义 1.5 提到的严格单调的函数才存在反函数.

例如,$y=x^2$ 在定义域内不存在反函数,因为对于任意 $y\in[0,+\infty)$,与之对应的有两个自变量的值.但如果限定自变量的变化范围为 $x\in[0,+\infty)$,则存在反函数 $y=\sqrt{x}$.

(2) 根据反函数的定义,直接函数的定义域是反函数的值域,其值域是反函数的定义域.

(3) 直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.3　求下列函数的反函数:

(1) $y=1+\ln(x+2)$;　　　(2) $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$.

解　(1) 因为 $x=e^{y-1}-2$,所以其反函数为

$$y=e^{x-1}-2,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

（2）因为 $x=\dfrac{2y+3}{y-2}$，所以其反函数为

$$y=\frac{2x+3}{x-2},\quad x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty).$$

3. 分段函数

引例 1.5【个人所得税】 当个人的月收入超出一定金额时，应向国家交纳个人所得税，收入越高，征收的个人所得税的比例也越高. 自 2008 年 3 月 1 日起个人收入超过 2 000 元的部分为应纳税所得额（表 1.2 仅保留了原表中的前三级税率）.

表 1.2 个人所得税税率表（工资、薪金所得适用）

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元至 2 000 元的部分	10
3	超过 2 000 元至 5 000 元的部分	15

个人所得税一般在工资中直接扣除，若某单位所有员工的月收入都不超过 4 600 元，则月收入 x 与纳税金额 y 之间的函数关系为：

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2\,000,\\ 0.05\times(x-2\,000), & 2\,000<x\leqslant 2\,500,\\ 0.1\times(x-2\,500)+25, & 2\,500<x\leqslant 4\,000,\\ 0.15\times(x-4\,000)+175, & 4\,000<x\leqslant 4\,600.\end{cases}$$

该函数的定义域为 $[0,4\,600]$，若某人的月收入为 3 000 元，则利用公式 $y=0.1\times(x-2\,500)+25$ 可求得其交纳所得税额为

$$y\big|_{x=3\,000}=0.1\times500+25=75(\text{元}).$$

在函数的定义域内任给 x 一个确定的值，通过上述关系可以找到唯一确定的 y 值与之对应，因此 y 是 x 的函数.

定义 1.3 若一个函数在自变量的不同变化范围内，对应法则不同，这样的函数叫做**分段函数**.

案例 1.2【矩形波】 写出如图 1.2 所示的矩形波函数 $f(x)$ 在一个周期 $[-\pi,\pi]$ 上的函数表达式.

解
$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi,\\ -1, & x=\pi.\end{cases}$$

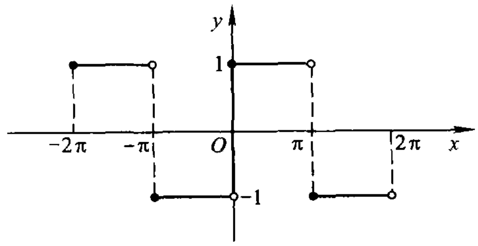

图 1.2

4. 函数的性质

（1）有界性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个常数 $M>0$，使得对于每一个 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**，否则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**. M 称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的上界，$-M$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的下界.

例如,$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的;$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内是无界的;$y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内有下界而无上界.

从几何图形上看,若函数$f(x)$在区间 I 上的图形介于与 x 轴平行的两条直线之间,那么函数在区间 I 上一定有界(图 1.3);若在 x_0 点找不到两条与 x 轴平行的直线使得函数在 I 上的图形介于它们之间,那么函数在区间 I 上一定无界(图 1.4).

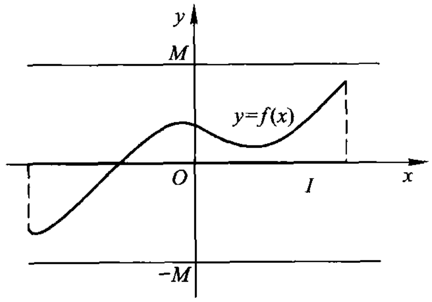

图 1.3

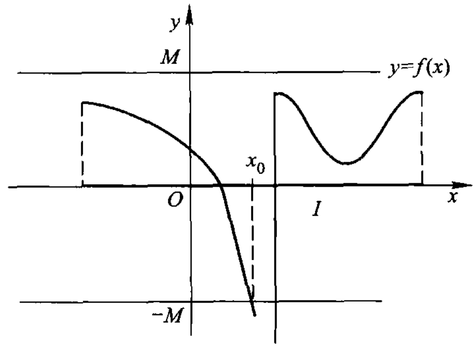

图 1.4

注意　定义 1.4 中的区间 I 不一定是函数的定义域,一般来讲是函数定义域的一个子集.若函数$f(x)$在定义域内有界,则称函数为**有界函数**,否则称为**无界函数**.

(2) 单调性

定义 1.5　设函数$f(x)$在区间 I 上有定义,任取 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,若恒有$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数$f(x)$在 I 上**严格单调增加**;若恒有$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$f(x)$在 I 上**严格单调减少**.区间 I 叫做函数的**单调区间**.

从几何直观上看,单调增加的函数其图形是自左向右上升的(如图 1.5),单调减少的函数其图形是自左向右下降的(如图 1.6).

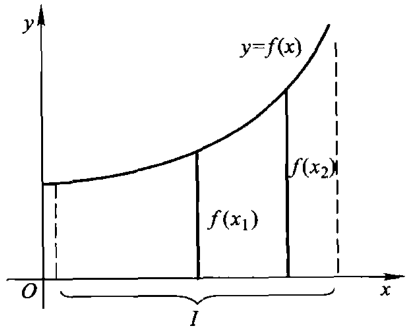

图 1.5

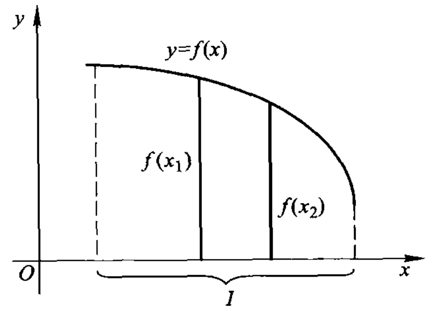

图 1.6

同样地,定义 1.5 中的区间是函数定义域的一个子集.若函数$f(x)$在定义域内单调,则称函数为**单调函数**.

例如,函数 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$内单调递增,在$(-\infty,0)$内单调递减,但在定义域内不是单调函数.

(3) 奇偶性