初中数学复习资料

（修訂本）

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

上海教育出版社

初中数学复习資料

（修訂本）

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

上海教育出版社

一九五九年·上海

初中数学复习資料
（修訂本）
中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編
*
上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
上海市書刊出版业营业許可証出090号
上海市印刷三厂印刷　新华書店上海发行所总經售
*
开本：850×1168　1/32　印張：8 1/2　字数：211,000
1958年5月新知識出版社第1版第1次印刷（1—260,000本）
1958年6月新1版　第2次印刷（50,001—75,000本）
1959年5月新2版　1959年5月第1次印刷
印数：1—200,000本

統一書号：7150・1
定　　价：（五）0.62元

序　言

本会为了帮助初高中毕业同学做好数学复习工作，曾于1958年春編写初高中数学复习資料，提供教师們参考。

通过一年来的教育革命，对党的教育方針的認識有了很大的提高，为了更好地貫彻教育为无产阶級的政治服务，教育与生产劳动結合的方針，本会决定对去年編写的初高中数学复习資料作了部分改編。这本初中数学复习資料，包括算术与代数、平面几何两个部分。它的主要內容包括教材提要和范例，通过范例闡明概念和它的应用，并着重于解題过程中的分析思考，以培养同学的解題能力。每个单元都附有习題可选作練习之用。本書所选的范例和习題，大部分是符合于課本范圍的，但也有部分較課本略深，讀者可以根据教学实际适当选用。

本会在改編本書前，曾經編輯組多次討論考慮，确定改編內容。然后由赵型、姚仁傑、黃松年、李承福等同志执笔写成初稿，再由楊荣祥、赵型两同志作了修正。虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望同志們予以批評和指正。

中国数学会上海分会中学数学研究委員会

1959年4月

目 录

（一）算术与代数

第一单元　数的概念、性质和运算 …………………………… 1

第二单元　整数的整除性质 ……………………………………25

第三单元　量的度量和比较 ……………………………………33

第四单元　有理式，有理式的恒等变换和有理式的运算 ………56

第五单元　一元一次方程与 $ax^2=b$ 型的一元二次方程 ………72

第六单元　一次方程組 ………………………………………… 106

第七单元　表和图象 …………………………………………… 130

第八单元　不等式 ……………………………………………… 139

（二）平面几何

第一单元　几何图形的基本概念 ……………………………… 150

第二单元　三角形 ……………………………………………… 162

第三单元　平行四边形和梯形 ………………………………… 186

第四单元　軸对称与中心对称 ………………………………… 218

第五单元　圓 …………………………………………………… 227

第六单元　圓的內接与外切三角形和四边形 ………………… 249

（一） 算术与代数

第一单元 数的概念、性质和运算

I. 前 言

1. 本单元复习算术和初中代数里，除整数的整除性（另成一个单元）以外的全部数的知識．在算术里我們学到了自然数、零和正分数（小数是分数的特殊形式）；在代数里又学到了負数，这些数总起来都叫做有理数．所以我們这里所談到的数一般指的是有理数．对于数的研究主要包括数的概念、性質和运算三个部分．

2. 在我們日常生活和生产劳动中，随时随地都在和“数”打交道．譬如我們說：“1958 年我国的鋼产量已經达到了 1,108 万吨”；“我国农村中已經有了 26,000 多个人民公社組織，加入公社的农戶，达到了一亿二千多万戶，占全国农戶总数的 99％以上”；“我国 1958 年共生产了二亿七千零二十万吨原煤，比 1957 年增长 1.07 倍，已大大超过了英国”等等．这里 1958、1,108 万、26,000、99％、1.07 等等都是数．这說明数的知識是非常重要的．而且随着我国社会主义建設的发展，数的应用越来越广泛，数的知識也就越来越重要，不論工人、农民、工程师、科学家等都必須具有数的一些基础知識．

3. 劳动創造一切．人是劳动創造的，物質財富也是劳动創造的，“数”也是劳动的产物．人类的祖先在生产劳动中要知道参加劳动的人有多少，生产工具有多少，生产出来的东西有多少，就产生了自然数的概念，有了自然数，就可用来数东西的个数．表示沒有

东西，就需要一个新的数"零"；要表示单位的一部分，就需要分数；要表示具有两个相反方向的量就需要正負数．这样，数的概念从自然数开始一直扩展到了有理数，而小数只是十进分数的另一种表示形式．因为度量衡的单位中很多是十进的，用小数来表示这些量的大小特别方便，所以小数的应用很广泛．

从数的实际运算也可以說明数的概念有扩展的需要．我們知道自然数的加法是一定可以进行的；而自然数的减法只有当被减数大于减数时才可以进行．但是，有了"零"，被减数等于减数的减法就可以进行了；有了負整数，被减数小于减数的减法也就可以进行了．同理，自然数的乘法是一定可以进行的；而自然数的除法只有当被除数是除数的倍数时才可以进行．有了分数，任何两个自然数的除法都可以进行了．

4．数的概念的扩展是在原有数的基础上引进了新数，所以对新数的研究必須在原有数的基础上进行．例如，分数$\frac{n}{m}$是一个数，它表示把一个单位分成m等分，其中n份是原单位的多少．这說明分数的概念是用自然数的概念做基础的．又如，分数的分子和分母同乘以一个自然数，分数的值不变，这是分数的基本性質．我們可以看到分数的基本性質是用自然数来說明的．再如，分数的运算法則归結到分子和分母的运算，这就是說，分数的运算是建立在自然数的运算基础上的．

同样的，我們知道正整数和正分数全体叫做正有理数，而負有理数的引进是利用正有理数做基础的．在一个正有理数的前面加上符号"－"就得到一个負有理数，含有負有理数的运算都归結到正有理数和零的运算．例如，$(-2)+(-3)=-(2+3)$，所以-2与-3的和，就是2与3的和的反数．

5．当数的概念扩展时，要注意哪些方面有了新的发展，哪些方面沒有改变．例如，在自然数范圍內，乘法是相同加数加法的簡

便算法(乘数是大于1的自然数);而在分数范圍内(乘数是分数),乘法是求一个数的几分之几的运算,所以乘法的意义有了新的发展.又如,在自然数范圍内,加法的交换律成立,在自然数和零的范圍内这个定律也成立,同样的,在分数以及有理数范圍内也成立.这就是說,数的概念从自然数扩展到有理数,加法的交换律是始終成立的.

6. 研究数学的目的是为了滿足人类生活上和生产上的需要,特别是生产上的需要.农民为了获得丰收,要研究密植,計算需要的种子、肥料的数量,劳动力的数量,以及农药的溶液成份;工人为了增产,要改良工具,革新技术,就需要量尺寸,計算材料等等,都必須运用数的知識,以及具备熟練的計算技能和技巧.复习时要重視各类实际問題的解法,并能运用运算法則,用最簡捷合理的方法,迅速地正确地得出結果来.

7. 近似値的实际应用非常广泛.事实上,我們所接触到的和需要計算的量中,絕大部分是近似値,例如,一个零件的尺寸和它的重量,一块土地的面积,都是近似値.过去对近似値一般不够重視,复习时要多加注意,以便能解决实际計算問題.我們知道不但小数有近似値,整数也有近似値.譬如我們說:我国的人口是六亿五千万,这里六亿五千万就是一个整数的近似値.我們应用近似値有以下两种情况:一种是不需要用精确値来表示而只要一个大約的数,例如,一个学校的学生人数大約是二千个;另一种是不可能得到一个非常精确的数,例如一块試驗田的面积是一亩二分.一个数的近似値一般应用数的四舍五入可以求得,但四舍五入到哪一位是根据需要决定的.

II. 提　要

§1. **自然数和零**　1、2、3、124、3,038等等都是自然数.自然数的个数是无限多的.把自然数由小到大一个一个地順次排列的

这一列数 1、2、3、4、5、……叫做自然数列. 自然数列的性质是: 它有第一个数 1（单位），但沒有最后一个数，因而自然数列是无限的.

对自然数与自然数列这两个名称应加以区别，自然数列指的是 1、2、3、……这一列"有始无終"的有順序的数列的整体，而自然数是這一数列里任何一个单独的数.

自然数列里沒有相同的数，对任意两个自然数列里的数，排在前面的較小，排在后面的較大.

零"0"也是一个数，但不是自然数. 它比任何自然数都小.

§2. **分数和它的基本性质** 把一个单位分成若干等分，表示一个或者几个这样的等分是原单位的多少的数叫做分数. $\frac{1}{3}$、$\frac{2}{7}$、$\frac{27}{100}$等都是分数.

自然数与零都可以写成分数的形式. 例如: $3=\frac{3}{1}$; $7=\frac{7}{1}$; $0=\frac{0}{1}$; 等等.

一般的說，自然数 n 可以写成分数$\frac{n}{1}$; 零可以写成分数$\frac{0}{1}$.

在算术里我們学过，分数的分子、分母乘以或者除以同一个自然数，分数的值不变. 这是分数的基本性质. 这个性质告訴了我們，怎样的两个分数是相等的，例如，$3\times 2=6$，$4\times 2=8$，所以分数$\frac{3}{4}$和分数$\frac{6}{8}$相等.

約分和通分的理論根据就是分数的基本性质.

一个分数，如果分子和分母除 1 以外不再含有其他的公因数，那末这个分数叫做既約分数，或者叫做最簡分数. 約分就是要把一个分数化成一个和它相等的既約分数.

一个分数的分子和分母互换后所成的分数叫做原分数的倒数. 例如，$\frac{2}{3}$的倒数是$\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}$的倒数是$\frac{2}{3}$; 整数 5 可以看做分数$\frac{5}{1}$,

所以5的倒数是$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$的倒数是5；0没有倒数，因为0不能做除数.

§3. 分数的大小比較 两个分母相同的分数，分子大的分数也大.分母不同的分数，可以先把它們化成分母相同的分数，然后再比較大小.这是常用的比較方法.

如果两个分数的分子相同，那末分母大的分数反而小.

§4. 小数 分母是1后边带有一个或者若干个零的分数叫做十进分数.例如：$\frac{7}{10}$、$\frac{135}{100}$、$3\frac{32}{10000}$、$\frac{3}{1000}$等等都是十进分数.不写出分母来表示的十进分数叫做小数.例如：

$$\frac{7}{10}=0.7;$$

$$3\frac{32}{10000}=3.0032.$$

这里，0.7、3.0032等都是小数.

一个分数如果是十进分数，或者可以化成十进分数，那末应用除法可以把它化成有限小数.例如：

$$\frac{3}{4}=\frac{75}{100}=0.75.$$

一个分数如果不是十进分数，而且也不能化成十进分数，那末应用除法可以把它化成循环小数.例如：

$$\frac{1}{3}=0.\dot{3};$$

$$\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4};$$

$$\frac{5}{6}=0.8\dot{3}.$$

§5. 近似值　一个数的近似值一般应用数的四舍五入求得。例如，365,457 精确到 1,000 的近似值是 365,000，精确到 100 的近似值是 365,500 等等.

在小数的运算中，我們常常根据实际需要，应用数的四舍五入，計算精确到某一位的近似值.近似值小于准确值的叫做不足近似值，近似值大于准确值的叫做过剩近似值.近似值与准确值的差叫做誤差.我們用符号≈表示近似相等.如果誤差小于 0.001 的近似值叫做精确到 0.001 的近似值，余类推.例如：

精确到 0.001，　0.2142857……≈0.214（不足近似值）；

精确到 0.0001，0.2142857……≈0.2143（过剩近似值）.

如果$\frac{1}{3}\approx0.3333$，那末 0.3333 是$\frac{1}{3}$精确到 0.0001 的不足近似值.实际的誤差是：

$$\frac{1}{3}-0.3333=\frac{1}{3}-\frac{3333}{10000}=\frac{10000-9999}{30000}=\frac{1}{30000}.$$

近似值的应用很广泛，因为度量的結果都是近似值.近似值的精确度要根据实际需要与可能或者根据題目的要求来确定，不能随便选擇.

§6. 有理数　在日常生活里，我們常常遇到具有两个相反方向的量，如温度計上零度以上的度数与零度以下的度数，如果我們把其中的一个作为正的，把这个方向的量的度量結果用算术里所用的数来表示；另一个和它相反方向的作为負的，把这个方向的量的度量結果用前面带有“－”号的数来表示，这样的数叫做負数，例如，-2、$-\frac{2}{3}$等等都是負数.有时为了更好地区别这两种具有相反方向的量，我們把表示正的方向的量的数叫做正数，用“＋”号来表示，例如，$+5$、$+\frac{1}{2}$等等.“0”既不是正数，也不是負数.

正的整数与分数（包括分数的特殊形式，小数），負的整数与分

数和零，都叫做有理数．有理数的分类如下表：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数(就是自然数)，如 }1\text{、}8\text{、}35\text{ 等}\\ \text{正分数，如}\dfrac{3}{8}\text{、}\dfrac{16}{7}\text{、}1\dfrac{1}{3}\text{等}\end{cases}\\ \text{零}(0)\\ \text{負有理数}\begin{cases}\text{負整数，如}-2\text{、}-7\text{ 等}\\ \text{負分数，如}-\dfrac{1}{3}\text{、}-\dfrac{2}{5}\text{、}-3\dfrac{1}{2}\text{等}\end{cases}\end{cases}$$

或者：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整\quad 数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}(0)\\ \text{負整数}\end{cases}\\ \text{分\quad 数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{負分数}\end{cases}\end{cases}$$

a 与 $-a$ 叫做相反的数．例如，3 与 -3 是相反的数，3是和 -3 相反的正数，-3 是和 3 相反的負数．$+4.5$ 与 -4.5 也是相反的数，$+4.5$ 的反数是 -4.5，-4.5 的反数是 $+4.5$．

一个正数的絕对值就是这个正数本身；一个負数的絕对值是指和这个負数相反的正数；零的絕对值还是零．

我們要表示一个数的絕对值，可以在这个数的两旁各画一条竪綫．例如，$+7$ 的絕对值写做 $|+7|$．

因此，$|+7|=7$，$|-7|=7$，$|0|=0$．

注意　在算术里往往把自然数和零叫做整数；在代数里把自然数和零叫做非負整数，非負整数与負整数都叫做整数．

§7．数軸　数軸是一条有方向、有原点、有长度单位的直綫，任何有理数都可以用数軸上的一个点来表示．如果拿 A 点作为原点，$+5$ 可以用 B 点来表示；$+3\dfrac{1}{2}$ 可以用 C 点来表示；0 可以用原点 A 来表示；-4 可以用 D 点来表示．

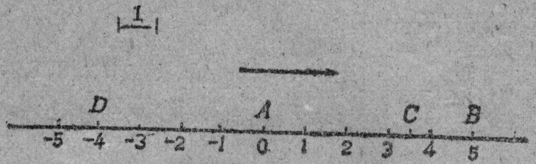

图1

相反的数可以用数軸上位于原点的两侧，与原点距离相等的两个点来表示。

§8．有理数的大小比較　数軸上两点所表示的两个有理数，在右边的点所表示的数比在左边的点所表示的数大．因此：

1．任何負数＜零＜任何正数．例如，$-1<0$，$-3<1$；

2．正数中，絕对值大的数較大．例如，$5.4>5.3$；

3．負数中，絕对值大的数較小．例如，$-5.4<-5.3$．

§9．有理数的六种基本运算　（加、减、乘、除、乘方、开方）

加法：加数甲＋加数乙＝和．

减法：被减数－减数＝差．

乘法：被乘数×乘数＝积．（或因数甲×因数乙＝积）

除法：被除数÷除数＝商．

乘方：求相同因数的积的运算叫做乘方．把 a 这个数 n 乘方就是求 n 个相同因数 a 的积，写成 a^n．例如，$3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=81$；又如，$(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8$．

在乘方运算中，下面几个名称，必須区别清楚：

1．乘方　乘方是指求相同因数的积的运算，不是指这一个式子．

2．底数　相同的因数叫做底数．例如，3^4 中的 3 是底数；$(-2)^3$ 中的 -2 是底数．

3．指数　表示相同因数个数的数叫做指数．例如，3^4 中的 4 是指数；$(-2)^3$ 中的 3 是指数．

4．冪　冪是指乘方运算的結果，也就是这个式子本身．一个

数的两次幂也叫做这个数的平方数；一个数的三次幂也叫做这个数的立方数.

幂只是相同因数乘积的簡便写法. 有理数的乘方运算是按照乘法法则逐次地进行运算，并沒有特殊的法則，至于幂的符号可以根据下面的規律得出，就是：

（1）正数的任意次幂是正数.

（2）負数的偶次幂是一个正数；負数的奇次幂是一个負数. 例如，$(-1)^8=+1$；$(-1)^{81}=-1$.

（3）零的任意次幂都是零.

开方　在初中代数里，我們只学习了开平方. 如果一个数的平方等于另一个数，那末这个数就叫做另一个数的平方根. 求一个数的平方根的运算叫做开平方. 我們說，开平方和二乘方互为逆运算. 因此，可以应用二乘方的运算判断一个数能不能开平方或者檢驗开平方的結果. 根据乘方的意义，我們可以得到下列的結論：

1. 負数沒有平方根，因为不論正数、負数或零的平方都不可能是負数.

2. 零的平方根是零，因为零的平方是零.

3. 如果一个正数有一个正的平方根，就一定有一个負的平方根，这两个平方根的絕对值相等. 例如，$7^2=49$，$(-7)^2=49$，所以49有两个平方根，$+7$与-7. 正数开平方所得的正的平方根叫做算术平方根. 正数a开平方所得的算术平方根用符号$\sqrt{a}$表示. 例如，$\sqrt{49}=7$；$\sqrt{4}=2$；$\sqrt{0}=0$.

注意　在有理数里，負数沒有平方根；正有理数的平方根不一定是有理数，在很多場合下，正有理数的平方根是无限不循环小数，这种无限不循环小数不能用分数来表示，所以它不在有理数范圍內. 初中代数里所討論的平方根是有理数的开平方.

开平方的三种法則：

1. 查表法　关于平方根是1到99的整数的开平方，可以查

初中代数課本上册后面的平方表．一般的平方根或者平方根的近似值可以查初中代数課本下册后面的平方根表(1—9.9及10—100两表)。

2．尝試法　关于求一般数的平方根或者平方根的近似值，可以根据較大的数有較大的算术平方根，較小的数有較小的算术平方根的道理，应用乘方运算进行試探．

3．一般开平方法　一般的开平方法，可以根据課本內容进行复习．

§10．六种基本运算的相互关系

1．加法和减法互为逆运算：

例如，　加数甲＋加数乙＝和，

　　　　和　＋加数甲＝加数乙，

　　　　和　－加数乙＝加数甲．

例如，　被减数－减数　＝差，

　　　　差　＋减数　＝被减数，

　　　　被减数－差　＝减数．

2．乘法和除法互为逆运算：

例如，　因数甲×因数乙＝积，

　　　　积　÷因数甲＝因数乙(如果甲数不等于０)，

　　　　积　÷因数乙＝因数甲(如果乙数不等于０)．

例如，　被除数÷除数　＝商，

　　　　商　×除数　＝被除数，

　　　　被除数÷商　＝除数．

3．乘方和开方互为逆运算：

例如，a的二乘方是a^2，

那末，a^2的一个平方根是a．

4．当乘数是正整数(大于１)的时候，乘法是相同加数加法的簡便算法。例如，

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\times 2=\frac{3}{2};$$

$$(-2)+(-2)+(-2)+(-2)=(-2)\times 4=-8.$$

注意 在算术里，我們說整数的乘法是相同加数加法的簡便算法，实际上，这只是对乘数是大于1的自然数而言的，例如，3×0不能說是0个3相加；3×1也不能說是1个3相加．如果乘数是任意正分数（或者有理数），就不能把乘法說做是相同加数加法的簡便运算了．

5．依照乘方是求相同因数的积的运算，乘方是乘法的特例．例如，

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3;$$

$$(-3)(-3)(-3)(-3)=(-3)^4.$$

§11．四种运算可以实施的范圍

在自然数范圍内，加法和乘法总可以进行，就是自然数的和与积一定仍旧是自然数；但减法与除法就不一定可以进行．有了分数以后，除法就总可以进行了（当然零还是不能作为除数），就是两个自然数相除的商或是一个自然数，或是一个分数．有了負数以后，减法也总可以进行了，就是两数的差或是一个正数，或是一个負数，或是零．在有理数范圍内，加、减、乘、除四种运算都一定可以进行．现在把在各种数的范圍内总可以实施的运算列表如下：

数的范圍	总可以进行的运算
自然数	加法、乘法
非負有理数	加法、乘法、除法（零不能作除数）
有理数	加法、减法、乘法、除法（零不能作除数）

§12．基本运算定律

1．加法交換律：$a+b=b+a$.

2. 加法結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$。

3. 乘法交换律：$ab=ba$。

4. 乘法結合律：$(ab)c=a(bc)$。

5. 乘法分配律：$(a+b)c=ac+bc$。

这里，a、b、c 可以是任何有理数。

§13. 已知数的变化所引起的和、差、积、商的变化

1. 关于和的变化：

(1) 如果一个加数增加(或减少)一个数，其他加数不变，那末它們的和也增加(或减少)同一个数。

(2) 如果一个加数增加一个数，另一个加数减少同一个数，而其他加数不变，那末它們的和不变。

2. 关于差的变化：

(1) 如果被减数增加(或减少)一个数，减数不变，那末它們的差也增加(或减少)同一个数。

(2) 如果减数增加一个数，被减数不变，那末它們的差就减少同一个数。

(3) 如果减数减少一个数，被减数不变，那末它們的差就增加同一个数。

(4) 如果被减数与减数都增加同一个数，或都减少同一个数，那末它們的差不变。

3. 关于积的变化：

(1) 如果一个因数扩大(或縮小)若干倍，其他因数不变，那末积也扩大(或縮小)同样的倍数。

(2) 如果一个因数扩大若干倍，另一个因数縮小同样的倍数，其他因数不变，那末它們的积不变。

4. 关于商的变化：

(1) 如果被除数扩大(或者縮小)若干倍，除数不变，那末它們的商也扩大(或者縮小)同样的倍数。