

压缩机参考资料

# 活塞式压缩机的 脉动与振动

沈阳气体压缩机研究所

一九七五年五月

0

## 前 言

现在国内外的大型活塞式压缩机，绝大多数为对称平衡型的结构。这种结构具有一系列的优点，但一般都取用较高的转数，因此产生了管路和设备内气流脉动和振动加剧的现象。这是压缩机经济可靠运行的严重障碍。目前，如何同气流脉动和振动作有效的斗争，是压缩机技术工作者所迫切需要解决的问题。

一九七二年苏联出版了 IO. A 维将金等著的《活塞式压缩机脉动与振动》一书。该书叙述大型活塞式压缩机装置中气流压力脉动及由此引起的振动的理论与试验研究的结果，研究消除气流脉动和管路振动的措施，导出消除脉动和振动的管路及设备的计算方法，分析气流脉动对压缩机工作的经济性和可靠性的影响，对掌握和解决压缩机气流脉动和振动问题具有一定的实用价值。本书由西安交通大学压缩机教研室翻译，沈阳气体压缩机研究所校对。

一九七三年十二月 沈阳

# 目 录

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 第一章 实用弹性振动理论的基本概念             | 1   |
| 第一节 自由振动                      | 1   |
| 第二节 强迫振动                      | 4   |
| 第三节 声波                        | 8   |
| 第二章 活塞式压缩机管道中的脉动过程            | 14  |
| 第一节 看作四端网络的管道                 | 14  |
| 第二节 级间管路中气柱的自由振动及共振条件         | 15  |
| 第三节 管道系统频率方程的确定               | 19  |
| 第四节 压缩机装置级间设备阻抗的确定            | 22  |
| 第五节 管路的声学系统与冷却器结构特点的关系        | 30  |
| 第六节 排气和吸气脉动相互干扰时压缩机管路内的压力脉动   | 34  |
| 第三章 压力脉动对压缩机及其元件工作的经济性和可靠性的影响 | 39  |
| 第一节 压力脉动对压缩机排气量的影响            | 39  |
| 第二节 管路中的压力脉动对压缩机工作经济性的影响      | 42  |
| 第三节 压力脉动对中间冷却器热交换效率的影响        | 50  |
| 第四节 压力脉动对气阀工作的影响              | 50  |
| 第四章 管路内气体压力脉动的消除              | 55  |
| 第一节 评价脉动强度和消振效率的方法            | 55  |
| 第二节 压力脉动许用值的建议标准              | 57  |
| 第三节 靠改变管道和设备的配置和尺寸避开共振        | 57  |
| 第四节 缓冲器消振                     | 70  |
| 第五节 声学滤波器消振                   | 79  |
| 第六节 孔板消振                      | 92  |
| 第七节 利用波的干涉消振                  | 94  |
| 第五章 活塞式压缩机级间管路和设备的振动          | 95  |
| 第一节 作用在管道上的干扰力                | 95  |
| 第二节 管道系统自振频率的计算               | 96  |
| 第三节 管道和设备的消振方法                | 107 |
| 第六章 活塞式压缩机装置元件的动力强度           | 110 |
| 第一节 冷却器管子的强度                  | 110 |
| 第二节 管道振动的强度与标准                | 117 |

|        |                    |     |
|--------|--------------------|-----|
| 第三节    | 设备和管道支承基础上的动载荷的计算  | 120 |
| 第七章    | 气体压力脉动和振动试验研究方法    | 122 |
| 第一节    | 研究用的仪器             | 122 |
| 第二节    | 振动记录的整理            | 123 |
| 第三节    | 管路内压力脉动的研究         | 126 |
| 第四节    | 压缩机装置元件振动的研究       | 128 |
| 第五节    | 确定管道自振频率的试验方法      | 128 |
| 第六节    | 级间管路声学系统和机械系统的电子模拟 | 130 |
| 第八章    | 活塞式压缩机级间管路的设计      | 133 |
| 第一节    | 级间设备和管路的组合         | 133 |
| 第二节    | 级间设备和管道的支承         | 133 |
| 第三节    | 管道共振条件的排除          | 135 |
| 第四节    | 压缩机装置中振动的消除        | 136 |
| 附    录 |                    | 143 |
| 参考文献   |                    | 156 |

# 第一章 实用弹性振动理论的基本概念

## 第一节 自由振动

振动是系统在随时间变化的力作用下，围绕着平衡位置作运动的过程。

实际上，由于存在摩擦，运动过程中要消耗能量。由瞬时外力所引起的系统的自由振动，在摩擦的作用下逐渐消失，直到系统不能克服摩擦时终止。有摩擦的系统称为阻尼，这样的振动称为衰减振动。

但是，为了确定实际系统的各种参数，必须研究无摩擦，即无能量消耗的理想系统，因为不大的衰减很接近于理想系统的过程，所以，这样的简化是允许的。这种运动的动力特性可看作点 $N$ （图1）沿圆周 $ON = A$ 作等角速度 $\omega_0$ 的运动。研究该点在 $y$ 轴上投影 $N_1$ 的运动。让初始瞬时（ $t = 0$ ）的半径 $ON$ 处在 $OB$ 的位置上，而经过某个时间 $t$ 之后移到角 $\gamma$ 的位置上。这时，点 $N_1$ 的位移 $y$ 按下式确定：

$$y = A \sin \gamma$$

$\gamma$ 为点 $N_1$ 振动的相位角。回转半径 $ON$ 的角频率为：

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$$

式中： $\tau$ —点 $N$ 环绕圆周转一整圈所需的时间。

振动相位角由下式确定：

$$\gamma = \omega_0 t = \frac{2\pi}{\tau} t$$

这样：

$$y = A \sin \gamma = A \sin \frac{2\pi}{\tau} t \quad (1)$$

表示成正弦（或余弦）函数的振动称简谐振动。

点 $N_1$ 与 $Ox$ 轴的最大偏差 $A$ 称为振幅。而 $CC_1 = 2A$ 称为双倍振幅。振动一个循环的时间 $\tau$ 称为振动周期。每秒钟的循环数 $f = \frac{1}{\tau}$ 为振动频率，用赫芝（Гц）表示。角频率由周期或频率确定，并用弧度/秒表示：

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f$$

振动点的速度和加速度根据式（1）为：

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \omega_0 A \cos \omega_0 t \quad (2)$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin \omega_0 t = -\omega_0^2 y \quad (3)$$

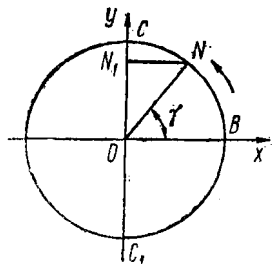


图1 点沿圆周运动的示意图

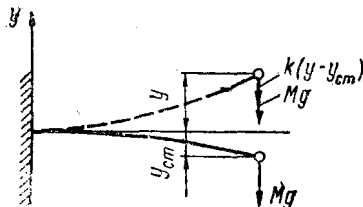


图2 单自由度系统

由式(3)可以看出, 加速度  $\ddot{y}$  与点的位移  $y$  成比例而与位移的方向相反。既然加速度与激励力成正比, 方向也相同, 那末力的方向与位移相反而数值与位移成正比。

由自由端具有集中质量  $M$  的无重量悬臂梁所组成(图2)的简谐振动系统的微分方程, 其形式为:

$$M\ddot{y} + ky = 0 \quad (4)$$

引用符号  $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ , 得:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (5)$$

式(5)的通解为:

$$y = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t \quad (6)$$

式中系统的刚性  $k = \frac{Mg}{y_{cm}}$  和  $\omega_0^2 = \frac{k}{M} = \frac{g}{y_{cm}}$ 。此处  $y_{cm}$ —在重力  $Mg$  作用下梁的静变形;

$g$ —重力加速度。

该系统的振动周期, 用秒表示, 为:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{y_{cm}}{g}} \quad (7)$$

式(6)中的任意常数  $C_1$  和  $C_2$  由发生振动的初始条件确定。设在开始的瞬时加了载荷使系统距平衡位置具有位移  $y_0$ , 而初始速度等于  $\dot{y}_0$ 。由等式(6)得  $y_0 = C_2$ 。将式(6)对时间微分并将  $t=0$  代入, 得  $\frac{\dot{y}_0}{\omega_0} = C_1$ 。这样, 系统的振动方程为:

$$y = \frac{\dot{y}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + y_0 \cos \omega_0 t \quad (8)$$

这种运动总是可以表示成具有振幅为  $A$  和初始相位角为  $\gamma_0$  的正弦关系, 即:

$$y_0 = A \sin \gamma_0; \quad \frac{\dot{y}_0}{\omega_0} = A \cos \gamma_0$$

将这些符号代入等式(8)中, 得:

$$y = A \sin(\omega_0 t + \gamma_0) \quad (9)$$

振幅  $A$  和初相位角由下式确定:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega_0^2}} \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{y_0 \omega_0}{\dot{y}_0} \quad (11)$$

具有初相位角的简谐振动过程  $y = A \sin(\omega_0 t + \gamma_0)$  的位移  $y$ ，速度  $\dot{y}$  和加速度  $\ddot{y}$  之间的关系可以用矢量图来表示。矢量运算很形象，采用矢量图可以简化数学运算。

将式 (9) 对时间微分可以找到速度和加速度：

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \gamma_0) = \omega_0 A \sin\left(\omega_0 t + \gamma_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \gamma_0) = \omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \gamma_0 + \pi)$$

由得到的关系可见，速度和加速度可以用按相同角速度  $\omega_0$  回转的矢量来表示，但是与位移的矢量顺回转方向相差角度为  $\frac{\pi}{2}$ （速度矢量）和  $\pi$ （加速度矢量）（图 3）。

由图 3 可以看出，振动的加速度和位移处于相反的相位。

用矢量的数字计算法即复数法。如果采用复数平面来表示简谐振动，矢量在平面内回转，那末，位移矢量  $A$  的复数为：

$$\begin{aligned} |A| &= A[\cos(\omega_0 t + \gamma_0) + i \sin(\omega_0 t + \gamma_0)] \\ &= A e^{i(\omega_0 t + \gamma_0)} \end{aligned} \quad (12)$$

振动的初相位  $\gamma_0 = 0$ ，则等式 (12) 为  $|A| = A e^{i\omega_0 t}$ ，式中  $e = 2.718\cdots$  为自然对数的底；

$$i = \sqrt{-1}。$$

用复数法来解决简谐振动的问题，其优点就在于可用较为简单的复数运算来代替实数运算。最后解决问题所需的是实数。经复数运算之后，将虚数解除，亦即最终的结果又一次转入所得式子的实数部分。例如，式子  $y = A \cos(\omega_0 t + \gamma_0)$  的微分可用复数式 (12)

$|A| = A e^{i\gamma_0} e^{i\omega_0 t}$  的微分代替，

$$\frac{d|A|}{dt} = i\omega_0 A e^{i\gamma_0} e^{i\omega_0 t} = \omega_0 A e^{i(\gamma_0 + \frac{\pi}{2})} e^{i\omega_0 t}$$

微分的结果归结为矢量乘  $i\omega_0$ ，亦即矢量  $A$  反时针转过  $\frac{\pi}{2}$  度角并将矢量拉长  $\omega_0$  倍。

最后公式的实数为

$$-\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \gamma_0) = \omega_0 A \cos\left(\omega_0 t + \gamma_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

式 (12) 相应的积分归结为矢量除以  $i\omega_0$ ，亦即矢量顺时针转过  $\frac{\pi}{2}$  度角并缩短  $\omega_0$  倍。

下面研究当系统存在摩擦时的振动。摩擦力可能是由于振动系统与外界环境相互作用或系统本身内部相互作用而造成。

当存在线性摩擦情况下的自由振动是属最简单的衰减振动。如图 2 所示，在系统上附加作用一个摩擦力  $P_m = -h\dot{y}$ ，此处： $h$ ——阻尼系数，负号表示摩擦力与速度的方向相

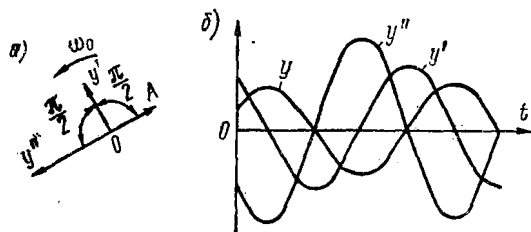


图 3 振动的位移  $y$ ，速度  $\dot{y}$  以及加速度  $\ddot{y}$  之间的相位关系示意图

a—矢量图； b—振动的曲线图

反。得运动微分方程为：

$$M\ddot{y} + h\dot{y} + ky = 0 \quad (13)$$

由此得：

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (14)$$

式中：  $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ ；  $2n = \frac{h}{M}$

式(14)的解为：

$$y = e^{-nt}(C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t) \quad (15)$$

式中：  $C_1$  和  $C_2$ ——任意的积分常数；  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - n^2$ ；  $n$ ——衰减因数。

当衰减因数  $n$  比  $\omega_0$  小，则  $\omega_1$  和  $\omega_0$  之间的差值不大。因此，可以认为与速度成正比而为值不大的摩擦力对振动的周期无影响。

一般情况下，式(15)可以写成以下形式：

$$y = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - n^2} t + \gamma_0) \quad (16)$$

常数  $A$  和  $\gamma_0$  根据初始条件按下式确定：

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{(\dot{y}_0 + ny_0)^2}{\omega_0^2 - n^2}} \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{y_0 \sqrt{\omega_0^2 - n^2}}{\dot{y}_0 + ny_0} \quad (18)$$

衰减振动的连续振幅（图4）由下式确定：

$$A_1 = Ae^{-nt_1} ; A_2 = Ae^{-n(t_1 + \tau)} ; A_3 = Ae^{-n(t_1 + 2\tau)}$$

此处：  $t_1$ ——相应于第一个最大位移的时间。

相邻两振幅之自然对数之比，称为振动的对数衰减率：

$$\delta = n\tau = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} \quad (19)$$

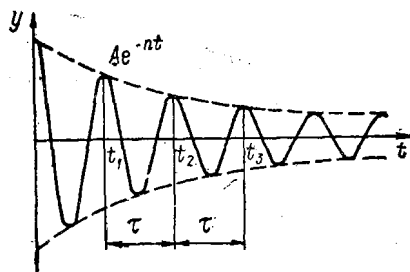


图4 指数衰减振动示意图

## 第二节 强 迫 振 动

系统的强迫振动是在为给定的时间函数的外部干扰力恒定作用下发生的。

无摩擦的系统振动微分方程，只要在式(4)的右边附加一项干扰力  $P(t)$  即可得到：

$$M\ddot{y} + ky = P(t) \quad (20)$$

最常见的情况是干扰力按简谐规律变化  $P(t) = P_0 \sin \omega t$ ，此处：  $\omega$ ——干扰力变化的角频率。这方程的解为：

$$y = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \frac{P_0}{M\omega_0} \int_0^t \sin \omega \xi \sin \omega_0(t - \xi) d\xi \quad (21)$$

式中： $\xi$ ——在积分过程中由 0 到  $t$  变化的时间，它不同于积分上限  $t$ ，后者在给定过程中认为是不变的。

式 (21) 的头两项表示系统的自由振动，它们决定于初始条件。如果在开始运动时 ( $t=0$ ) 为  $y_0=0$  和  $\dot{y}_0=0$ ，则得：

$$y = \frac{P_0}{M\omega_0} \int_0^t \sin \omega \xi \sin \omega_0 (t-\xi) d\xi \quad (22)$$

假定  $\omega \neq \omega_0$ ，且进行积分，得：

$$y = \frac{P_0}{M(\omega_0^2 - \omega^2)} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

将  $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$  和  $\frac{P_0}{k} = y_{cm}$  代入后，得：

$$y = \frac{y_{cm}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (23)$$

式 (23) 表明，在初始条件为  $y_0=0, \dot{y}=0$  时，系统发生具有频率为  $\omega_0$  的自由振动和频率为  $\omega$  的强迫振动的复合振动。在实际的系统中，自由振动很快就消失，只剩下固定不衰减的振动为：

$$y = \frac{y_{cm}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \sin \omega t$$

其振幅为：

$$A = \frac{y_{cm}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

它与静变形  $y_{cm}$  有着本质的差别， $y_{cm}$  是按静力  $P_0$  作用计算的。

比值  $\frac{A}{y_{cm}} = \beta$  称为动力系数或加强系数，其值由下式确定：

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (24)$$

由式 (24) 可看出，当干扰力的频率比振动系统的频率小时，系数接近于 1。

当干扰力的频率与系统的自振频率一致时，发生共振现象，其特点是即使不大的力，也可以引起振幅很大的振动。

若频率  $\omega$  大于自振频率  $\omega_0$ ，则强迫振动的振幅减小且当  $\omega > \sqrt{2} \omega_0$  时，动力系数  $\beta$  将小于 1。

在解决实际问题时，许多场合，周期变化的干扰力具有相当复杂的函数形式  $P(t)$ 。

满足 Дирихле 条件的函数，可以展开成富里哀级数：

$$p(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t \\ + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (25)$$

式中:  $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ ——干扰力的主频率;  $a_0, a_m, b_m$ ——富里哀级数系数。

振动过程取决于作用在系统上的每个干扰力分量, 其总和为:

$$y(t) = \frac{a_0}{k} + \frac{a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t}{k \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} + \frac{a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t}{k \left[1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2\right]} \\ + \frac{a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t}{k \left[1 - \left(\frac{3\omega}{\omega_0}\right)^2\right]} - \dots \quad (26)$$

这解由常数项  $\frac{a_0}{k}$  和一系列具有频率为  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$  的简谐振动所组成。当系统的自振

频率与任意阶  $m$  的干扰力分量的频率  $m\omega$  ( $m=1, 2, 3$ ) 相一致, 即发生共振现象。因此, 系统的共振, 不只是当自振频率  $\omega_0$  与干扰力的主频率  $\omega$  一致时发生, 而且当  $\omega_0$  为  $\omega$  的倍数时, 即  $\omega_0 = m\omega$  也会发生。

强迫振动过程的发展, 既与干扰力的特征和数值有关, 也与作用在系统上的摩擦力有关, 当系统处于共振或接近于共振状态时, 摩擦力的作用特别显著。

具有摩擦力的系统强迫振动, 若摩擦力与速度成正比, 则其微分方程由下式表示:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{P_0}{M} \sin \omega t \quad (27)$$

式 (27) 的全解积分由两部分组成: 式 (14) 的齐次方程积分和式 (27) 的特解积分。第一部分按式 (15) 求取, 且表征自由衰减振动的特点。第二部分的解有以下形式:

$$y = A \sin(\omega t - \gamma_1) \quad (28)$$

式中振幅为:

$$A = \frac{y_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 n^2}{\omega_0^4}}} \quad (29)$$

强迫振动与干扰力之间的相位角为:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{2\omega n}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (30)$$

动力系数  $\beta$  按下式确定:

$$\beta = \frac{A}{y_{cm}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\omega^2 n^2}{\omega_0^4}}}$$

显然, 这时的动力系数  $\beta$  在任何干扰力的频率下都不会无穷大, 因而, 摩擦的存在, 只有对系统处于共振状态时具有现实意义。图 5 表示动力系数  $\beta$  的变化与频率比  $\mu$  以及数

值  $\alpha$  的关系。其中  $\mu = \frac{\omega}{\omega_0}$  即为干扰力频率与系统自振频率之比值；  $\alpha = \frac{\delta}{\pi}$

为了便于分析，将式 (30) 改为以下形式：

$$r_1 = tg^{-1} - \frac{\mu\alpha}{1 - \mu^2} \quad (31)$$

式 (31) 称为相位特性，各种摩擦力值下的相位特性曲线如图 6 所示。

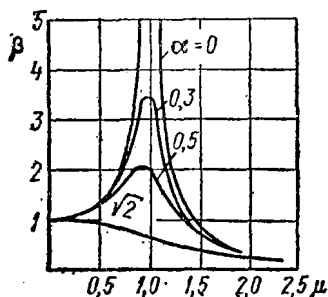


图 5 不同  $\alpha$  值时的共振曲线

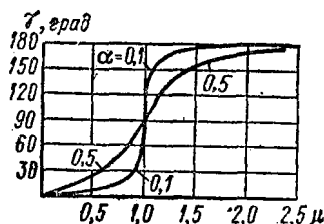


图 6 相位特性曲线图  
zpaδ—度

随着摩擦力的下降，曲线  $r_1 = f(\mu)$  趋于极限曲线，曲线在  $\mu = 1$  的点发生断裂，也即发生共振。在该点，任意  $\alpha$  值的相位角  $r_1 = \frac{\pi}{2}$ 。如果  $\alpha$  值很小，则当  $\omega < \omega_0$  时，强迫振动的相位几乎与干扰力的相位相同，而当  $\omega > \omega_0$  时，则相位相反。

机械阻抗的概念 线性机械系统的强迫振动的微分方程可写成以下形式：

$$M\ddot{y} + h\dot{y} + ky = P_0 e^{i\omega t}$$

式中右边部分为用复数表示的干扰力。如果规定受频率为  $\omega$  的强迫固定振动，则该方程的解为：

$$y = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{-\omega^2 M + i\omega h + k}$$

强迫振动的速度为：

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{h + i\omega M + \frac{k}{i\omega}}$$

用三角关系代替  $e^{i\omega t}$  值并约掉分母中的虚数，得：

$$\dot{y} = \frac{P_0}{h^2 + \left(\omega M - \frac{k}{\omega}\right)^2} \left[ h - i \left( \omega M - \frac{k}{\omega} \right) \right] (\cos \omega t + i \sin \omega t) \quad (32)$$

分出式 (32) 中的实数部分，得：

$$\dot{y} = \frac{P_0}{h^2 + \left(\omega M - \frac{k}{\omega}\right)^2} \left[ h \cos \omega t + \left(\omega M - \frac{k}{\omega}\right) \sin \omega t \right]$$

假设  $h = |Z| \cos \varphi$  和  $\omega M - \frac{k}{\omega} = |Z| \sin \varphi$ ，则可得：

$$|Z|^2 = h^2 + \left( \omega M - \frac{k}{\omega} \right)^2$$

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega M - \frac{k}{\omega}}{h}$$

强迫振动的速度现在可用以下形式表示：

$$\dot{y} = \frac{P_0}{|Z|} \left( \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi \right) = \frac{P_0}{|Z|} \cos (\omega t - \varphi)$$

强迫振动的振幅值为：

$$\dot{y} = \frac{P_0}{|Z|} = \frac{P_0}{\sqrt{h^2 + \left( \omega M - \frac{k}{\omega} \right)^2}}$$

其值显然决定于机械系统的参数  $M$ 、 $k$  和  $h$  以及干扰力的频率  $\omega$ 。速度  $\dot{y}$  和力  $P$  之间的相位差  $\varphi$  也与系统参数和频率有关。

数值

$$|Z| = \sqrt{h^2 + \left( \omega M - \frac{k}{\omega} \right)^2}$$

表示力与振动速度之比，称为系统的全机械阻力。

单自由度的线性系统全机械阻力的复数式可写成：

$$Z = h + i \left( \omega M - \frac{k}{\omega} \right)$$

并称为机械阻力。它是变形阻力  $h$ 、惯性阻力  $i\omega M$  以及弹性阻力  $-\frac{k}{\omega}$  的综合值。

### 第三节 声 波

气体在活塞式压缩机装置中的弹性波动现象，可以用研究声波的基本方程来描绘。这些方程导出时，假定振幅很小而且在介质中没有速度。较精确的方法应注意到在活塞式压缩机管道系统中的波动过程是在介质中有速度而且波的振幅并非总是很小的。

沿着波传播的方向的波动称为纵波。在介质中，一层物质推动另一层物质并不发生回复力（气体、液体），所以不可能发生和传播横向波。在气体和液体中只能传播纵向波，但在固体中既能发生和传播纵向波，也能发生和传播横向波。声根据传播的范围，声波可以是三元、二元和一元的。波动同一个相位的轨迹点称为波面。下面研究在横截面不变的直管内沿一个方向传播的最简单的声波。这种情况下的波面是管子的横截面。因此，这种波是平面波。

波动方程及其解 气柱波动可用下式表示：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (33)$$

式 (33) 是不考虑摩擦的平面波方程。这方程表明：运动沿  $x$  轴方向进行，而在  $y$  轴方向只有气体分子的移动。

声速为：

$$a = \sqrt{kRT} \quad (34)$$

式中： $k$ ——绝热指数； $R$ ——气体常数； $T$ ——绝对温度。

理想气体的声速  $a$ ，如式 (34) 所示，与压力无关，而与绝对温度的平方根成比例。例如，当温度为  $273^\circ\text{K}$  时，空气中的声速  $a = 333$  米/秒，而当温度每提高  $1^\circ\text{K}$ ，声速增加  $0.6$  米/秒。

式 (33) 的波动方程的通解，同于达兰贝尔解：

$$y = f_1(at - x) + f_2(at + x) \quad (35)$$

首先研究特解：

$$y_1 = f_1(at - x) \quad (36)$$

该解只与  $at - x$  有关。因此，对于所有的点，它只有一个数值，各点的  $at - x$  均相同，亦即沿座标分布的所有各点，随时间的变化，均满足以下关系：

$$at - x = \text{const}$$

或者  $\frac{dx}{dt} - a = 0 \quad (37)$

因此，相应于特解 (36) 的位移  $y_1$  按声速  $\frac{dx}{dt} = a$  沿  $x$  轴正方向传播。

相应的特解为：

$$y_2 = f_2(at + x) \quad (38)$$

表示位移按声速沿  $x$  轴的负方向传播。

研究沿正方向传播的正弦波：

$$y = A \sin k(at - x) \quad (39)$$

式中： $A$ ——振幅； $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{a}$ ——波数； $\lambda$ ——波长； $\omega$ ——角频率。

波动速度为：

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A k a \cos k(at - x) \quad (40)$$

声压力为：

$$P = -\rho_0 a^2 \frac{\partial y}{\partial x} = \rho_0 a^2 A k \cos k(at - x) \quad (41)$$

式中： $\rho_0$ ——无波动时气体的密度。

波动方程 (33) 也可以用富里哀方法来解。假设：

$$y = X(x)T(t) \quad (42)$$

式中： $X(x)$ ——只与  $x$  有关的函数，而  $T(t)$ ——只与时间  $t$  有关的函数，则得：

$$T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} X$$

或者:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (43)$$

该式左边部分只与  $x$  有关, 而右边部分只与  $t$  有关。显然, 如果它们是常数的话, 两边是恒等的。取用  $-\frac{\omega^2}{a^2}$  表示这个常数, 则式 (43) 可分解成下列两个方程:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{a^2} X = 0 \quad (45)$$

这些方程的解:

$$T(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (46)$$

$$X(x) = C_3 \cos \frac{\omega}{a} x + C_4 \sin \frac{\omega}{a} x \quad (47)$$

式 (42) 的特解为:

$$y = (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \left( C_3 \cos \frac{\omega}{a} x + C_4 \sin \frac{\omega}{a} x \right) \quad (48)$$

在上式中:  $C_1, C_2, C_3$  和  $C_4$ ——决定于初始条件和边界条件的任意常数。

驻波 研究两个振幅相同但沿相反方向传播的平面波。如上所述, 质点的位移可以用下式表示:

$$\begin{aligned} y &= A \sin k(at - x) + A \sin k(at + x) \\ &= 2A \sin kat \cos kx \end{aligned} \quad (49)$$

$$\text{速度为: } \frac{\partial y}{\partial t} = 2Aka \cos kat \cos kx \quad (50)$$

$$\text{压力为: } P = -\rho_0 a^2 \frac{\partial y}{\partial x} = 2\rho_0 a^2 Ak \sin kat \sin kx \quad (51)$$

式 (49) 和式 (50) 表明, 驻波的位移和速度在  $\cos kx = \cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$  点 (位移和速度

节点) 为零, 在  $\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 1$  的点 (位移和速度腹) 具有最大值 (比开始行波的振幅大一倍)。

由式 (49) — (51) 可看出, 质量速度和位移最大的部位相对于压力值最大的部位, 相距波长的  $1/4$ 。压力波的振幅也比行波开始时的振幅 (按式 41 确定) 大一倍。当由传播方向相垂直的平面上反射平面波时形成驻波。如果反射是由绝对刚性的表面来的, 则该表面是质点位移和速度的节 ( $y = y' = 0$ ), 而位移和速度的相位改变  $\pi$ , 亦即反射波与正波具有相反的相位。压力的相位, 在边界上不改变, 而压力振幅等于正波和反射波 (波腹)

振幅的总和。

如果反射是由绝对柔软的表面进行的，则在反射表面上的压力相位改变  $\pi$ 。这时该表面将是压力的节点 ( $p=0$ )，是质点运动位移和速度的腹。

管道中有在摩擦时的气体波动方程 应当指出，气体的内摩擦与质点运动的速度成正比。在波动方程 (33) 的左边附加一项，表示与速度成一次方关系的阻力，得：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{r_1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (52)$$

式中： $r_1$ ——按管子单位面积和单位长度计的摩擦系数。

式(52)的解在形式上与正弦行波达兰贝尔公式一样。为了方便，可将速度表示成指数的形式(55)：

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y} = \dot{y}_0 e^{i\omega(t \mp \frac{x}{a_1})} \quad (53)$$

因为  $\dot{y} = i\omega y$  和  $y = \frac{\dot{y}}{i\omega}$ ，将关系式(53)代入式(52)，并消去  $\dot{y}_0 e^{i\omega(t \mp \frac{x}{a_1})}$  得：

$$i\omega + \frac{r_1}{\rho} = i \frac{a^2}{a_1^2} \omega \quad (54)$$

$$\text{或：} \quad \frac{1}{a_1^2} = \frac{1}{a^2} \left( 1 - i \frac{r_1}{\omega \rho} \right) = \frac{1}{a^2} (1 - i2\varphi)$$

$$\text{此处：} \quad 2\varphi = \frac{r_1}{\omega \rho}$$

$$\text{令：} \quad i \frac{\omega}{a_1} = i \frac{\omega}{a} \sqrt{1 - i2\varphi} = \beta + i\alpha = \gamma \quad (55)$$

将式(55)两部分乘方，然后使实数和虚数相等，求得：

$$\alpha = k \left| \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\varphi^2}}}{\sqrt{2}} \right|; \quad \beta = k\varphi \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\varphi^2}}} \right|$$

波的公式(53)采用以下形式：

$$\dot{y} = \dot{y}_0 e^{i\omega t} e^{\mp \gamma x} = \dot{y}_0 e^{i(\omega t \mp \alpha x)} e^{\mp \beta x} \quad (56)$$

$\gamma = \beta + i\alpha$  值称为传常数。该常数的实数部分  $\beta$  表征波的振幅在单位路程上减弱的程度，称为衰减系数。

传常数的虚数部分  $\alpha$  称为相位常数。由式(56)的结构可以看出，这个值按意义分解波数，但是传播速度  $a_1$  不同于速度  $a$ 。

如果  $\varphi = \frac{r_1}{2\omega\rho} \ll 1$ ，则：

$$\alpha \approx k \left| \frac{\sqrt{1 + (1 + 2\varphi^2)}}{\sqrt{2}} \right| = k \sqrt{1 + \varphi^2} \approx k \frac{1}{1 - \frac{\varphi^2}{2}} \approx k$$

有衰减时, 相位的速度为:

$$a_1 = \frac{\omega}{a} \approx a \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \quad (57)$$

亦即接近于  $a$  但比  $a$  稍小一点。

当  $\varphi \ll 1$  时, 衰减系数近似地等于:

$$\beta \approx \frac{k\varphi}{1 + \frac{\varphi^2}{2}} \approx k\varphi = \frac{r_1}{2\rho a} \quad (58)$$

按式(52)确定压力值  $p(x, t)$ , 式的右边部分等于  $-\frac{1}{\varphi} \frac{\partial p}{\partial x}$  (55):

$$\begin{aligned} p(x, t) &= - \int \rho \frac{\partial y}{\partial t} dx - r_1 \int y dx + C(t) \\ &= -\rho \int \frac{\partial y}{\partial t} dx - r_1 \int y dx + C(t) \end{aligned}$$

式中:  $C(t)$ ——任意的时间函数。平均值  $\rho$ , 当振幅较小时可看作等于  $\rho$ 。

对于正波  $y = y_0 e^{-\gamma x} e^{i\omega t}$  和  $\frac{\partial y}{\partial t} = i\omega y_0 e^{-\gamma x} e^{i\omega t}$ , 将其代入方程并对  $x$  积分, 得:

$$p(x, t) = y_0 \frac{e^{-\gamma x} e^{i\omega t}}{\gamma} (r_1 + i\omega\rho) + C(t)$$

当  $\omega = 0$  时,  $p$  和  $y$  等于 0, 因而  $C(t) = 0$ ,

当  $\varphi \ll 1$  时, 利用式(54)和式(55), 得:

$$p(x, t) = y \frac{ia^2}{a_1^2} \omega\rho \frac{a_1}{i\omega} = y \rho a \sqrt{1 - i2\varphi} \approx \rho a y e^{-i\varphi} \quad (59)$$

由这方程可看出, 压力的相位比速度的相位落后  $\varphi$  角。这个相位差, 根据式(58)与衰减系数  $\beta$  具有以下关系:

$$\varphi \approx \frac{\beta}{k} = \frac{\beta}{2\pi} \lambda \quad (60)$$

当衰减较小时, 正波的  $p = \rho a y$ , 反射波的  $p = -\rho a y$ , 这样的计算并没有很大的误差, 这就跟介质中无摩擦的情况一样。

声学阻抗 系统波动 (图 7) 的微分方程, 根据赫尔霍姆共振原理可以写成:

$$\rho \frac{l}{F} \ddot{X} + \frac{\rho\omega k}{2\pi} \dot{X} + \frac{\rho a^2}{V} X = p$$

式中:  $\dot{X} = F\dot{y}$ ——容积位移速度;

$l$ ——管道长度;

$F$ ——管道截面积;

$V$ ——共振器容积。

这方程的解为:

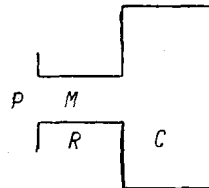


图 7 单自由度的声学系统

$$\dot{X} = \frac{p}{\frac{\rho\omega k}{2\pi} + i\left(\frac{\rho\omega l}{F} - \frac{\rho a^2}{V\omega}\right)} \quad (61)$$

声压  $p$  与容积位移速度之比称为声学阻抗，或称为全声学阻力：

$$z = \frac{p}{\dot{X}} = R + iY \quad (62)$$

式中：  $R = \frac{\rho\omega k}{2\pi}$ ——声阻；

$Y = \omega M - \frac{1}{\omega C}$ ——声抗。

$M = \rho \frac{l}{F}$  是声学质量，  $C = \frac{V}{\rho a^2}$  值为声学容积。

声学阻抗具有复数表示式，因为压力和速度的相位是不一致的。一般情况为：

$$z = |z| e^{i\varphi} \quad (63)$$

此处：  $|z| = \sqrt{R^2 + Y^2}$ ；  $\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{Y}{R}$ ——速度与压力的相位差。

除了声学阻抗外，还常常应用声学系统的全机械阻抗  $Z = \frac{Fp}{\dot{X}} = Fz$  和比声学阻抗

$$\bar{z} = \frac{p}{\dot{y}} = -\frac{z}{F}。$$

显然，平面声波的压力与质点速度是同相的。因此，对于平面波：

$$\bar{z} = \frac{p}{\dot{y}} = \rho a$$

数值  $\bar{z}$  常常也称为声学刚性，或者按波的传播理论称为波阻。如同作用在单位面积上的力与由它所引起的运动速度之比，  $\bar{z}$  值具有相对于单位面积阻力的因次（公斤/米<sup>2</sup>秒）。 $\rho a$  值越大，由该力引起的运动速度越小。空气的  $\rho a = 430$  公斤/米<sup>2</sup>秒，水的  $\rho a = 1.5 \times 10^6$  公斤/米<sup>2</sup>秒。在声压为  $10^5$  巴时，水中的速度  $= 6.66 \times 10^{-7}$  米/秒，在空气中为  $2.4 \times 10^{-3}$  米/秒，因此，水的声学刚性比空气大