

# 波动方程成像方法 及其计算

张文生 著



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

# 波动方程成像方法及其计算

张文生 著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书以复杂构造深度成像为目标,系统阐述了波动方程成像方法及其计算.全书共分8章,由易到难,涉及计算数学、科学计算、应用数学、地球物理等领域的相关知识.内容包括:Kirchhoff偏移、零偏移距记录合成、复杂构造叠后深度成像、复杂构造叠前深度成像、三维多方向分裂隐式波场外推、正多边形网格上Laplace算子的差分表示、三维频率空间域显式波场外推、三维复杂构造叠前深度成像.全书注重理论与实践相结合,既有系统的理论方法,又有丰富的数值计算;既有经典方法,又有最新成果.

本书可作为科学计算、应用数学、反问题、应用地球物理、声学成像等专业的高年级本科生、研究生的教材或教师的教学参考书,也可供相关专业的科研工作者和工程技术人员参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

波动方程成像方法及其计算/张文生著. —北京:科学出版社,2009

ISBN 978-7-03-024902-9

I. 波… II. 张… III. 波动方程-成像 IV. O175.27

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第108221号

责任编辑:赵彦超/责任校对:钟 洋

责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏主印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2009年7月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2009年7月第一次印刷 印张:15 3/4

印数:1—2 500 字数:307 000

定价:48.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

# 前 言

在科学与工程中的许多问题中,经常需要由物体表面观测到的数据来推测物体内部的结构或参数信息,如石油勘探中需要由地表仪器测量的来自地下介质的波场来确定地下油气构造,这属于波动方程成像范畴.在数学上归结为求解波动方程的边值问题,控制方程是波动方程,可以是声波、弹性波和电磁波,边值条件就是全部或部分边界上的观测场.按照求解波动方程的数学方法,波动方程成像可分 Kirchhoff 积分法和非 Kirchhoff 积分法两类, Kirchhoff 积分法基于波动方程的 Kirchhoff 积分分解,非 Kirchhoff 积分法基于单程波方程的波场外推.本书详细阐述波动方程成像的理论以及最典型最有效的计算方法,并有大量数值结果,内容涉及计算数学、科学计算、应用数学、地球物理等领域的知识.

全书共分 8 章.

第 1 章介绍 Kirchhoff 成像.首先推导波动方程边值问题的 Kirchhoff 积分公式, Kirchhoff 成像是 Kirchhoff 积分公式的具体运用. Kirchhoff 成像公式有多种表示形式,如最常用的时间域 Kirchhoff 成像公式、单程波形式的 Kirchhoff 公式、射线 Kirchhoff 公式、散射 Kirchhoff 成像公式.

Kirchhoff 成像是一种基于射线的高频近似方法,第 2~8 章讨论基于波场外推计算的非 Kirchhoff 积分成像方法.

第 2 章介绍零偏移距记录合成.零偏移距记录就是激发和接收位置重合时所观测到的数据记录,是叠后成像所必需的数据.本章介绍几种模拟零偏移距记录的方法,其中混合法最有效,可以高精度合成任意复杂构造的零偏移距记录.本章是第 3 章叠后成像的基础.

第 3 章介绍复杂构造叠后深度成像.波场外推方程可以是全波波动方程,也可以是单程波波动方程.逆时成像方法依据全波波动方程将波场逆时外推,无倾角限制,适应空间变速的情况.基于单程波波动方程的成像方法主要包括相移加插值法、隐式  $\omega$ - $x$  域有限差分法、裂步傅里叶法、傅里叶有限差分法和混合法,通过典型模型的计算比较这些方法的计算量和精度.

第 4 章介绍复杂构造叠前深度成像.与叠后成像方法相比,叠前成像的计算量大,但成像精度更高.本章内容包括炮集叠前深度成像、双平方根算子叠前深度成像、裂步 Hartley 变换叠前深度成像、波场合成叠前深度成像.对典型的二维复杂模型进行了成像计算,取得了较好的成像效果.

第 5 章介绍三维多方向分裂隐式波场外推.如果不用分裂法直接计算,三维波

场隐式外推将导致巨大的计算量,不能应用. 两方向交替分裂隐格式是一种最典型的波场外推计算格式,可大大减少计算量,但存在数值各向异性误差. 多方向分裂方法可以有效消除三维波场外推中的数值各向异性. 本章详细阐述多方向分裂的理论和分裂格式的构造方法,对四方向分裂进行了定量误差分析和计算.

第 6 章介绍正多边形网格上 Laplace 算子的差分表示. 三维单程波或双程波方程中含有 Laplace 算子,波场外推不仅可以在正方形网格上实现,还可以在任意的正多边形上实现. 本章重点介绍如何在正方形和正六边形网格上设计不同精度的差分格式.

第 7 章介绍三维频率空间域显式波场外推. 显式波场外推将波场外推作为一种褶积或滤波来实现. 隐式格式由于无条件稳定,在波动方程成像中得到广泛应用,与隐式格式相比,显式格式具有计算量小的优点,但需保证稳定性. 本章首先给出设计稳定的显式外推滤波器的一般方法,然后讨论典型的 McClellan 滤波器、旋转的 McClellan 滤波器以及如何在正六边形网格上进行数据采样.

第 8 章介绍三维复杂构造叠前深度成像. 包括三维炮集深度成像、三维波场合成成像及共方位成像. 三维炮集叠前深度成像精度最高,但计算量最大,波场合成叠前成像通过对炮集数据合成后再计算,可以节省计算量,也有一定精度,对三维标准复杂构造模型的 MPI 并行成像计算表明,两种方法均能取得较好的成像效果. 共方位成像通过对数据作共方位近似来减少计算量,但同时精度会下降.

波动方程成像方法——Kirchhoff 积分法和非 Kirchhoff 积分法各具特色,都在实践中得到了广泛应用,难以相互取代. 随着实际问题的日趋复杂,需要不断发展和探索新的理论方法,如真振幅成像、各向异性介质成像等,进一步研究可参考相关文献. 在本书中,成像 (imaging) 与偏移 (migration) 两词含义等价,只是偏移一词出现得比成像更早.

本书的工作得到国家 973 大规模科学计算 (G1999032800)、国家自然科学基金重点项目 (10431030)、国家自然科学基金项目 (40004003) 等的支持,在此表示感谢;对科学与工程计算国家重点实验室所给予的支持表示感谢;在科研工作中,曾先后得到何樵登教授、张关泉研究员和马在田院士等专家的指导,在此表示感谢;同时,对众多领导、专家、老师、同事所给予的一贯支持和帮助表示感谢;对直接或间接所引文献的作者表示感谢;对科学出版社编辑的精心工作也表示感谢.

由于作者水平有限,难免疏误或不足,恳请读者指正.

作 者

2009 年 6 月

# 目 录

## 前言

|                           |    |
|---------------------------|----|
| <b>第 1 章 Kirchhoff 偏移</b> | 1  |
| 1.1 偏移成像概述                | 1  |
| 1.2 Kirchhoff 积分公式        | 4  |
| 1.3 Kirchhoff 偏移公式        | 7  |
| 1.4 Green 函数和 Hankel 函数   | 12 |
| 1.5 Kirchhoff 偏移公式的离散形式   | 15 |
| 1.6 单程波形式的 Kirchhoff 公式   | 18 |
| 1.7 程函方程和输运方程             | 25 |
| 1.8 射线 Kirchhoff 公式       | 28 |
| 1.9 散射 Kirchhoff 成像       | 32 |
| <b>第 2 章 零偏移距记录合成</b>     | 38 |
| 2.1 伪谱法合成零偏移距记录           | 39 |
| 2.1.1 方法原理                | 39 |
| 2.1.2 数值计算                | 41 |
| 2.2 混合法合成零偏移距记录           | 46 |
| 2.2.1 理论方法                | 46 |
| 2.2.2 数值计算                | 49 |
| 2.3 三维正交各向异性介质有限差分正演模拟    | 53 |
| 2.3.1 各向异性方程及其差分方程的建立     | 54 |
| 2.3.2 三分量波场通量校正的实现        | 56 |
| 2.3.3 三维各向异性吸收边界条件        | 58 |
| 2.3.4 稳定性条件               | 59 |
| 2.3.5 数值计算                | 60 |
| <b>第 3 章 复杂构造叠后深度成像</b>   | 66 |
| 3.1 逆时深度偏移                | 66 |
| 3.1.1 方法原理                | 67 |
| 3.1.2 稳定性条件               | 68 |
| 3.1.3 数值计算                | 69 |
| 3.2 四种常用的非 Kirchhoff 偏移方法 | 75 |

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| 3.2.1 相移加插值 (PSPI) 法                     | 75  |
| 3.2.2 隐式 ( $\omega$ - $x$ ) 域有限差分 (FD) 法 | 76  |
| 3.2.3 裂步傅里叶 (SSF) 法                      | 78  |
| 3.2.4 傅里叶有限差分 (FFD) 法                    | 79  |
| 3.2.5 数值计算                               | 80  |
| 3.2.6 计算量概述                              | 83  |
| 3.3 混合法深度偏移及其吸收边界条件                      | 84  |
| 3.3.1 理论方法                               | 85  |
| 3.3.2 吸收边界条件                             | 87  |
| 3.3.3 数值计算                               | 88  |
| <b>第 4 章 复杂构造叠前深度成像</b>                  | 93  |
| 4.1 炮集叠前深度偏移及其并行实现                       | 94  |
| 4.1.1 理论方法                               | 94  |
| 4.1.2 成像计算                               | 95  |
| 4.2 双平方根算子叠前深度偏移                         | 101 |
| 4.2.1 双平方根算子                             | 101 |
| 4.2.2 双平方根算子波场外推                         | 104 |
| 4.2.3 成像计算                               | 106 |
| 4.3 裂步 Hartley 变换叠前深度偏移                  | 107 |
| 4.3.1 理论方法                               | 108 |
| 4.3.2 成像计算                               | 112 |
| 4.4 相位编码叠前深度偏移                           | 115 |
| 4.4.1 交叉成像的产生                            | 115 |
| 4.4.2 相位编码的特性                            | 116 |
| 4.4.3 成像计算                               | 119 |
| 4.5 平面波波场合成叠前深度偏移及其并行实现                  | 121 |
| 4.5.1 波场合成偏移方法                           | 122 |
| 4.5.2 控制照明技术                             | 122 |
| 4.5.3 成像计算                               | 123 |
| <b>第 5 章 三维多方向分裂隐式波场外推</b>               | 130 |
| 5.1 交替方向隐格式                              | 130 |
| 5.1.1 旁轴近似                               | 130 |
| 5.1.2 吸收边界条件                             | 135 |
| 5.2 三维频率空间域多方向分裂                         | 138 |
| 5.2.1 高阶近似与分裂方向数目的选择                     | 138 |

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 5.2.2 近似系数的确定                        | 141 |
| 5.2.3 二、三、四、六、八方向上的算子分裂              | 142 |
| 5.3 由 Kirchhoff 积分解导出偏移公式            | 146 |
| 5.4 混合法四方向分裂偏移                       | 151 |
| 5.4.1 混合法四方向分裂                       | 151 |
| 5.4.2 分裂误差                           | 154 |
| 5.4.3 螺旋线上的四方向波场外推                   | 158 |
| 5.4.4 数值计算                           | 159 |
| <b>第 6 章 正多边形网格上 Laplace 算子的差分表示</b> | 162 |
| 6.1 导数的中心差分算子表示                      | 162 |
| 6.2 正多边形网格上的 Laplace 算子的差分表示         | 163 |
| 6.3 广义勾股定理                           | 166 |
| 6.4 正方形和正六边形上的差分格式                   | 168 |
| 6.4.1 长算子                            | 168 |
| 6.4.2 紧凑算子                           | 174 |
| 6.4.3 在波场外推中的应用                      | 179 |
| <b>第 7 章 三维频率空间域显式波场外推</b>           | 182 |
| 7.1 稳定的显式外推格式                        | 182 |
| 7.2 McClellan 滤波器                    | 185 |
| 7.3 旋转的 McClellan 滤波器                | 190 |
| 7.3.1 45° 旋转 9 点和 17 点滤波器            | 190 |
| 7.3.2 平均滤波器                          | 193 |
| 7.4 六边形网格上的三维地震数据                    | 196 |
| 7.4.1 一维采样理论                         | 196 |
| 7.4.2 三维地震数据的带限表示                    | 198 |
| 7.4.3 六边形网格上的数据采样                    | 199 |
| <b>第 8 章 三维复杂构造叠前深度成像</b>            | 206 |
| 8.1 全波波动方程的分解                        | 206 |
| 8.2 混合法炮集三维叠前深度偏移                    | 210 |
| 8.2.1 混合法波场外推                        | 210 |
| 8.2.2 相对误差分析                         | 212 |
| 8.2.3 成像计算与并行实现                      | 214 |
| 8.3 混合法三维平面波合成叠前深度偏移                 | 218 |
| 8.3.1 三维平面波合成与目标照明                   | 218 |
| 8.3.2 因子分解波场外推                       | 219 |

---

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 8.3.3 成像计算 .....          | 221 |
| 8.4 共方位数据三维叠前偏移 .....     | 224 |
| 8.4.1 共方位数据的下延拓 .....     | 224 |
| 8.4.2 稳相路径的射线参数等价表示 ..... | 228 |
| 8.4.3 共方位下延拓的精度 .....     | 230 |
| 8.4.4 共方位 Stolt 偏移 .....  | 232 |
| 参考文献 .....                | 234 |
| 索引 .....                  | 243 |

# 第 1 章 Kirchhoff 偏移

本章首先对偏移或成像方法作一概述, 然后介绍 Kirchhoff 成像方法. Kirchhoff 成像是波动方程 Kirchhoff 积分解的具体应用, 具体推导了各种形式的 Kirchhoff 公式, 包括最常用的双程波形式的 Kirchhoff 积分公式、单程波形式的 Kirchhoff 积分公式, 最后给出散射 Kirchhoff 成像公式.

## 1.1 偏移成像概述

地震测量中所采集的数据, 如不作处理, 仅是对地下界面的一个非常粗糙估计, 偏移或成像方法就是通过校正未处理的数据来得到更真实的地下构造图像. 在本书中, 偏移与成像两词等价.

偏移始于解释模拟地震数据作图法<sup>[69]</sup>, 是几何光学原理的简单应用. 我们以单个界面模型来说明作图法偏移的基本思想. 如图 1.1 所示, 界面两侧有不同的波速, 波的传播由声波波动方程来描述, 源和检波器重合位于地表. 图 1.2 是所得的记录即时间剖面. 如果将图 1.2 中时间剖面上的时间用半波速来标定, 则剖面上的垂直“长度”将准确等于原模型的深度, 但只有当波速为常数和反射界面水平的特殊情况时, 标定后的时间剖面才对应真实的反射面.

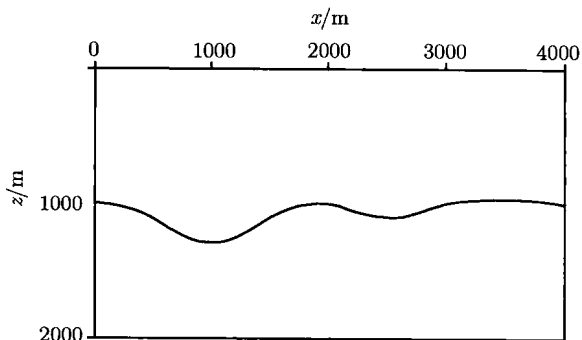


图 1.1 一个弯曲反射界面模型

当波速是常数时, 可以这样来重建反射面, 利用几何光学反射的简单思想, 在图 1.2 中, 每一道  $(\xi, 0)$  的波形的峰值表示反射面的法向入射反射的双程走时, 设该已知走时为  $\gamma_I(\xi)$ , 又设反射面上任一点的坐标为  $(x, z)$ , 则由几何光学反射原理可知, 双程走时为

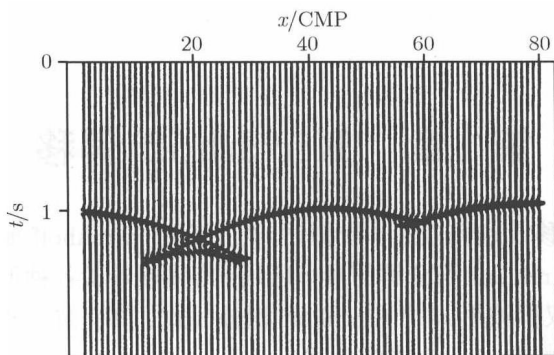


图 1.2 弯曲反射界面模型的时间记录剖面

$$\tau(x, z, \xi) = \frac{2\sqrt{(x - \xi)^2 + z^2}}{v} \quad (1.1.1)$$

其中  $v$  是传播速度. 由于  $(x, z)$  未知, 因此可能的反射点在以  $(\xi, 0)$  为圆心、 $\tau(x, z, \xi) = \gamma_I(\xi)$  为半径的半圆上. 由此得到一个半圆簇, 如图 1.3 所示, 该半圆簇的包络线就是反射面, 即曲线簇

$$\phi(x, z, \xi) = \gamma_I(\xi) - \tau(x, z, \xi) \quad (1.1.2)$$

的包络. 在数学上, 可令  $\phi$  关于  $\xi$  的一阶导数为零, 求出以  $x$  和  $z$  为函数的  $\xi$ , 然后, 再代到曲线簇方程 (1.1.2) 中, 得

$$\phi(x, z, \xi(x, z)) = 0 \quad (1.1.3)$$

该函数的图形就是包络.

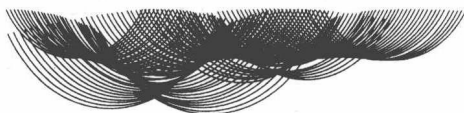


图 1.3 半圆簇的包络即为反射面的成像结果

作图法偏移的时代已经过去, 但它体现偏移的基本思想, 现代偏移方法直接考虑求解波动方程, 并在计算机上进行数字处理来实现. 波场方程偏移或成像是解决复杂构造成像的一种重要方法. 波动方程偏移由 Claerbout 于 20 世纪 70 年代初期提出<sup>[42-46]</sup>, 现已成为解决复杂地质构造成像问题的一种重要方法.

波动方程偏移有多种方法, 按求解波动方程的数学方法, 可分为 Kirchhoff 积分法偏移和非 Kirchhoff 积分法偏移, 其中有限差分法偏移、频率波数域偏移等是典型的非 Kirchhoff 积分法偏移; 按是否考虑了波的折射效应, 可分为时间偏移和深度偏移; 按处理的资料是否做过水平叠加, 可分为叠后偏移和叠前偏移; 按处理

的空间维数,可分为二维偏移和三维偏移;按处理的波场类型,可分为声波波动方程偏移和弹性波动方程偏移.

### 1. Kirchhoff 积分法偏移

Kirchhoff 积分法偏移建立在波动方程积分解的基础上,它利用 Kirchhoff 绕射积分公式把分散在地表各地震道上来自于同一个绕射点的能量汇聚在一起,置于地下相应的物理绕射点上. Kirchhoff 积分法偏移最初由 Schneider 于 1978 年提出<sup>[115]</sup>,之后, Carter 和 Frazer 于 1984 年给出了处理横向变速的方法<sup>[34]</sup>,提高了精度. Kirchhoff 积分法偏移的优点是无倾角限制,网格剖分灵活,缺点是难以对复杂构造进行精确成像.它同最初的有限差分偏移、频率波数域偏移一样,属于时间偏移方法,都假设介质速度在横向上局部均匀,因此,当有横向变速时,会造成归位误差.这种理论上的内在缺陷对有限差分偏移来说是所用的偏移方程中省略了时移方程(描述波的折射),仅利用了绕射方程<sup>[73]</sup>;对频率波数域偏移则表现为傅里叶变换要求横向常速模型;对 Kirchhoff 积分偏移则表现为在某一偏移孔径内沿对称的双曲线(三维情况为双曲面)轨迹使波形收敛于极小点.

### 2. 有限差分偏移

Claerbout 最初提出的波动方程偏移方法是  $15^\circ$  有限差分偏移,受地层倾角的限制.为了提高偏移倾角, Berkhout 给出了高阶单程波波动方程<sup>[13]</sup>;马在田院士提出了阶数分裂法<sup>[91,92]</sup>,把  $n$  阶高阶方程近似分解为  $n-1$  个二阶方程,然后再用有限差分交替求解;张关泉教授提出了利用低阶微分方程组的大倾角差分偏移法<sup>[130]</sup>;目前,辛算法也在成像中得到应用<sup>[59,89]</sup>.有限差分偏移可以在时间域中实现,也可在频率空间域中实现.

### 3. 频率波数域偏移

常速介质的频率波数域偏移方法最早由 Stolt 于 1978 年提出<sup>[119]</sup>,该方法无倾角限制,计算量小,不能适应横向变速,随后, Gazdag<sup>[63]</sup>提出了相移法波动方程偏移,已能适应纵向变速情况.之后, Gazdag 等<sup>[65]</sup>又提出了相移加插值法偏移,该方法采用不同的常数参考速度来外推波场,得到对应的参考波场,而真正的波场则通过对参考波场插值计算得到,已能适应横向变速情况.相移加插值法根据的是数学思想而非波传播的物理含义,计算量大. Pai 于 1988 年在理论上提出了适合任意空间变速的频率波数域偏移方法<sup>[100]</sup>,但该方法难以应用.直到 1990 年 Stoffa 等<sup>[118]</sup>提出了裂步傅里叶法 (SSF),及 1994 年 Ristow 等<sup>[107]</sup>提出了傅里叶有限差分法 (FFD),适应横向变速的深度成像方法才有重大转折. SSF 和 FFD 这两种方法交替在  $\omega$ - $x$  域和  $f$ - $k$  域中进行波场外推来实现成像,既具有有限差分偏移易处理横向变速的优点,又具有频率波数域偏移计算效率高和稳定性好的优点.

#### 4. 时间偏移与深度偏移

常规时间偏移方法由于理论上存在着介质速度横向局部均匀不变的内含假设, 因而不能正确地解决横向变速问题, 而深度偏移方法, 对速度模型误差相对不敏感, 有处理复杂构造和横向变速的能力. 深度偏移实质是在偏移过程中同时考虑了波的绕射和折射效应且偏移输出为深度剖面的方法. 目前以研究深度成像为主.

#### 5. 叠后偏移和叠前偏移

叠后偏移是将多次覆盖资料作叠加后再偏移. 由于水平叠加剖面是建立在界面水平、无横向速度变化的假设前提下, 因此在界面倾角大、横向速度变化较大或叠加速度求取不准时, 水平叠加后资料的质量会受到影响, 从而影响最后的偏移质量. 如果在未作水平叠加之前进行偏移, 即叠前偏移<sup>[117]</sup>, 就可避免水平叠加速度不准所引起的部分误差, 提高成像质量. 叠前偏移方法同叠后偏移方法本质上并无差别, 差别在成像原理上. 叠后偏移采用爆炸反射界面成像原理, 叠前偏移采用相关型成像原理.

不论是 Kirchhoff 积分偏移, 还是基于波场外推的非 Kirchhoff 积分偏移, 都在实践中得到了成功和广泛应用. 由于不同的需要和各自的特点, 两类方法也不能相互替代. 随着新问题的不断出现和要求的增高, 目前, 波动方程成像发展迅速, 并向精度更高、模型更复杂、计算效率更高的方向发展, 如速度建模、真振幅偏移、各向异性介质成像等.

## 1.2 Kirchhoff 积分公式

假定限于常速情况, 求解标量波动方程的边值问题. 如图 1.4, 设  $\Omega$  是  $R^3$  空间中的一个闭区域, 且具有光滑边界  $\partial\Omega$ , 现求满足下列方程的函数  $\psi$ :

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.2.1)$$

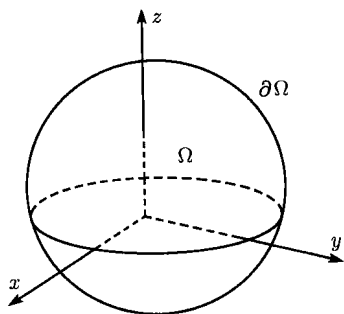


图 1.4 三维空间中的闭区域  $\Omega$

完全求解方程 (1.2.1) 需要知道  $\Omega$  中的初值  $\psi$  和法向导数  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ , 或者要知道在  $\partial\Omega$  上的  $\psi$  或  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ . 在边界上, 指定函数的问题是 Dirichlet 问题, 指定法向导数的问题是 Neumann 问题. 有些方程可以同时指定这两类问题, 这就是 Cauchy 问题, 但波动方程不能同时给定这两类条件. 下面假定源位于地球的自由表面 ( $\partial\Omega$  的一部分), 以便能采用无源形式的波动方程.

根据惠更斯 (Huygens) 原理, 波动方程的一般解可以由无限个点源的效应来合成. 在数学上, 这可由脉冲响应函数或 Green 函数来完成. Green 函数本身是一个点源的波动方程的解. 忽略边界条件, Green 函数  $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$  满足如下方程

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t') \quad (1.2.2)$$

其中  $\delta(\cdot)$  是 Dirac 函数,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  是空间位置,  $(\mathbf{x}', t')$  表示源的坐标. 将方程 (1.2.1) 两端乘  $G$ , 方程 (1.2.2) 两端乘  $\psi$ , 然后相减, 得

$$4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')\psi = G\nabla^2\psi - \psi\nabla^2G - \frac{1}{c^2} \left( G \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2G}{\partial t^2} \right) \quad (1.2.3)$$

利用关系式

$$u\nabla^2v = \nabla \cdot (u\nabla v) - \nabla u \cdot \nabla v \quad (1.2.4)$$

得

$$4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')\psi = \nabla \cdot [G\nabla\psi - \psi\nabla G] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ G \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial G}{\partial t} \right] \quad (1.2.5)$$

为去掉  $\delta$  函数, 对方程两端作时间-空间积分, 得

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \nabla \cdot [G\nabla\psi - \psi\nabla G] d\mathbf{x}' dt' \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left[ G \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial G}{\partial t} \right] d\mathbf{x}' dt', \quad \forall \mathbf{x} \in R^3 \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

其中  $\xi(\mathbf{x})$  的取值为

$$\xi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 4\pi, & \mathbf{x} \in \Omega \\ 2\pi, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.2.7)$$

(1.2.6) 式右端第一项体积分可以利用 Green 公式

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla v d\mathbf{x} \quad (1.2.8)$$

化成  $\partial\Omega$  上的一个面积分 (应用时取  $v = 1$ ); 第二项积分可转换成

$$\left[ \int_{\Omega} \left( G \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial G}{\partial t} \right) d\mathbf{x}' \right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (1.2.9)$$

在源激发之前 ( $t \leq t' = 0$ ),  $\psi$  和  $\frac{\partial\psi}{\partial t}$  假定为零, 又由于在  $\Omega$  中 (成像空间中) 没有

源, 因此该体积分为零. 假定 Green 函数是因果的, 则时间积分下限为零, 因此方程 (1.2.6) 简化为

$$\xi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, t) = \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega} [G\nabla\psi - \psi\nabla G] \cdot \mathbf{n} ds' dt', \quad \forall \mathbf{x} \in R^3 \quad (1.2.10)$$

这里  $\mathbf{n}$  是  $\partial\Omega$  的单位法向量 (向外), 该式称为 Kirchhoff 积分公式.

一旦给定边界上的值  $\psi$  及它的法向导数, Kirchhoff 积分公式就给出了波动方程在空间任何一点处的解  $\psi$ . 因为一般不能同时给定这两个条件 (Cauchy 条件), 所以需要根据一个条件来求另一个条件.

随着观测点  $\mathbf{x}$  接近于自由表面, 记

$$\psi|_{\partial\Omega} = f \quad (1.2.11)$$

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = f_1 \quad (1.2.12)$$

则有如下 Neumann 问题

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega} \left[ Gf_1 - f \frac{\partial G}{\partial\mathbf{n}} \right] ds' dt', \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (1.2.13)$$

由于不能同时指定  $f$  和  $f_1$ , 所以指定其中的一个再求另一个. 假定法向导数即  $f_1$  已知,  $f$  未知, 则方程 (1.2.13) 是一个关于  $f$  的积分方程; 假定  $f$  已知,  $f_1$  未知, 则同样得到一个积分方程. 因此, 通过求解一个积分方程, 可以已知  $f$  或  $f_1$  中的一个求出另一个, 从而再由 (1.2.13) 式求出  $R^3$  中任一点的波场.

我们还可以进一步化简, 因为现在并未要求 Green 函数要满足什么样的边界条件, 也就是说对于满足方程 (1.2.2) 的所有 Green 函数都可以. 在某些特殊情况下, 有可能找到这样一个 Green 函数, 其法向导数在部分或全部边界上为零. 假如 Green 函数在边界  $\partial\Omega$  上为零, 就可以直接从 Kirchhoff 积分中求得 Dirichlet 问题 ( $f$  已知) 的解, 因为在积分中涉及关于波场的未知法向导数都消失了, 于是有

$$\psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}', t') \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') ds' dt', \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.2.14)$$

由于假定已知  $f$ , 该方程不是一个积分方程. 类似地, 若假定 Green 函数的法向导数在边界上为零, 则可以求得 Neumann 问题 ( $f_1$  已知) 的解, 因为涉及边界值的未知项消失了, 于是有

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') f_1(\mathbf{x}', t') ds' dt', \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.2.15)$$

由于假定已知  $f_1$ , 该方程也不是一个积分方程. 假如没有这样的 Green 函数, 则必须通过数值方法计算或使用一个近似的 Green 函数.

### 1.3 Kirchhoff 偏移公式

假定数据在地表  $z = 0$  处被记录, 首先考虑常速情况, 即没有反射界面, 当然这是理想条件, 稍后将作推广. 设  $\partial\Omega$  由平面  $z = 0$  和下半球面组成. 若使半球面的半径趋于无穷, 使得它对积分的贡献足够快地趋于零, 则在  $\partial\Omega$  上的总积分就化为一个在  $z = 0$  平面的积分.

在常速情况下, 在  $z = 0$  上的两个 Green 函数可通过镜像方法 (如图 1.5) 得到

$$G_r(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{\delta(t - t' - R/c)}{R} - \frac{\delta(t - t' - R'/c)}{R'} \quad (1.3.1)$$

$$G_a(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{\delta(t - t' + R/c)}{R} - \frac{\delta(t - t' + R'/c)}{R'} \quad (1.3.2)$$

其中

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$R' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}$$

对球面波这是自然的, 因为球面波是波动方程的球面对称解.  $G$  的下标  $a$  和  $r$  分别表示超前和延迟. 延迟 Green 函数是因果的, 随着  $t$  的增加, 从点源向外传播. 超前 Green 函数是反因果的, 表示收缩的球面波, 向时间反方向传播.

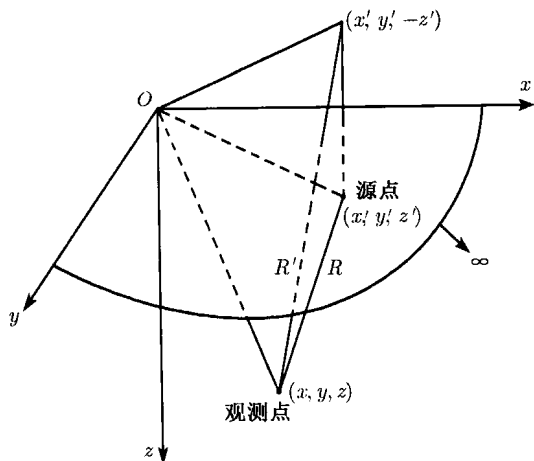


图 1.5 用于 Green 函数的几何设置

因为偏移是将散射双曲线反传播到源点, 显然使用  $G_a$ . 注意到  $R'(z') = R(-z')$ , 由方程 (1.2.14) 得

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_{z'=0} f(\mathbf{x}', t') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left[ \frac{\delta(t-t' + R/c)}{R} - \frac{\delta(t-t' + R'/c)}{R'} \right] ds' dt' \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_{z'=0} f(\mathbf{x}', t') \left( -\frac{\partial}{\partial z'} \right) \frac{\delta(t-t' + R/c)}{R} ds' dt' \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_{z'=0} f(\mathbf{x}', t') \left( \frac{\partial}{\partial(-z')} \right) \frac{\delta(t-t' + R'/c)}{R'} ds' dt' \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{z'=0} f(\mathbf{x}', t') \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\delta\left(t-t' + \frac{R}{c}\right)}{R} ds' dt' \tag{1.3.3}
\end{aligned}$$

由于  $\frac{\partial}{\partial z'} = -\frac{\partial}{\partial z}$ , 因此

$$\psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{+\infty} \int_{z'=0} f(\mathbf{x}', t') \frac{\delta\left(t-t' + \frac{R}{c}\right)}{R} ds' dt' \tag{1.3.4}$$

利用  $\delta$  函数的性质, 可得

$$\psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{z'=0} \frac{f\left(\mathbf{x}', t + \frac{R}{c}\right)}{R} ds', \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{1.3.5}$$

这就是 Kirchhoff 偏移公式<sup>[115]</sup>.

上面通过引进一个任意的 Green 函数, 将波动方程化成了一个积分方程. 假如能找到一个特殊的 Green 函数, 该 Green 函数本身或者其方向导数在地表为零, 则积分方程可简化为这样一个积分式: 它将波场的边界值映射成所有空间中的一个解. 对于我们所感兴趣的问题, 数据在  $z=0$  上记录, 这表明至少对常速介质的情况, 我们能够写出这样两个 Green 函数.

可将 Kirchhoff 偏移公式 (1.3.5) 看成是一个从边值到波动方程解的映射. 边值  $f$  由观测或数据处理得到. 我们知道, 共中心点 (CMP) 叠加得到一个函数  $\psi_s(\mathbf{x}, y, z=0, t)$ , 在每个共中心点处, 它近似是一个独立的零偏移距地震实验. 对叠后偏移来说, 式 (1.3.5) 中的  $f$  即为 CMP 叠加数据  $\psi_s$ . 根据爆炸反射模型<sup>[86]</sup>, 取  $c \rightarrow c/2$ ,  $t=0$ , 并在记录面  $(x', y')$  上进行积分, 得深度成像剖面

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{z'=0} \frac{\psi_s\left(\mathbf{x}', \frac{2R}{c}\right)}{R} ds', \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{1.3.6}$$

其中  $R$  是深度剖面上的输出点到地面  $z'=0$  上指定的检波点之间的距离. 因此, 当沿着地表  $z'=0$  平面积分时, 就是对零偏移距数据中散射双曲线求和, 如图 1.6 所示.