国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

现代物理基础丛书 28

微分几何入门与广义相对论

（下册·第二版）

梁灿彬 周 彬

科学出版社
www.sciencep.com

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代物理基础丛书 28

微分几何入门与广义相对论

(下册·第二版)

梁灿彬 周 彬

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书下册包含两章(第15及16章)和三个附录(附录H, I, J). 第15章讲授拉氏和哈氏理论, 第16章介绍黑洞(热)力学, 包括传统(稳态)黑洞热力学及其后续发展, 特别是比较详细地讲解了(弱)孤立视界和动力学视界等重要概念, 并对近代有关文献的许多公式给出了详细的推证. 附录H讲授Noether定理的证明(包括用几何语言和坐标语言的证明)以及有关问题(例如正则能动张量), 附录I讲授对理论物理工作者非常有用的主纤维丛和伴纤维丛, 并着意于这些数学知识与物理应用之间的"架桥"工作. 附录J介绍德西特时空和反德西特时空. 本册仍然贯彻上册深入浅出的写作风格, 为降低难度采取了多种措施.

本书适用于物理系高年级本科生、硕博士研究生和物理工作者, 特别是相对论研究者.

图书在版编目(CIP)数据

微分几何入门与广义相对论. 下册/梁灿彬, 周彬. 2版. —北京: 科学出版社, 2009
(现代物理基础丛书; 28)
ISBN 978-7-03-025231-9

I. 微… II. ①梁… ②周… III. ①微分几何-研究生-教材 ②广义相对论-研究生-教材 IV. O186.1 O412.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第142810号

责任编辑: 胡 凯/责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬/封面设计: 王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2000年4月北京师范大学出版社第一版
2009年8月第 二 版 开本: B5 (720 × 1000)
2009年8月第一次印刷 印张: 25 1/4
印数: 1—2 500 字数: 490 000

定价: 68.00元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

下册前言

本书(第二版)下册在上册和中册的基础上进一步介绍经典(非量子)广义相对论及其有关数学工具的更为深入的内容, 包含两章(第15章和16章)和3个附录(附录H, I, J).

第15章比较详尽地介绍了广义相对论的拉氏和哈氏形式. 基于教学法的考虑, 我们先简单复习有限自由度系统的拉氏和哈氏理论, 再介绍如何推广到场系统(无限自由度系统), 最后介绍广义相对论的拉氏和哈氏形式. 广义相对论的一个特点是引力场是约束系统(指非完整约束). 为了打好基础, 我们先介绍Dirac-Bergmann关于约束系统的哈氏理论, 再以闵氏时空的电磁场为例推广到无限自由度系统(电磁场是比引力场简单得多的无限自由度约束系统), 然后讨论广义相对论的哈氏形式. 几何语言是清晰、准确和深刻地阐明拉、哈氏理论的必不可少的犀利武器, 我们将首先用物理语言介绍拉、哈氏理论, 然后循序渐进地引入和使用几何语言, 并专辟三节对有关的几何内容做专题性的、比较详细的介绍, 具体地说, §5.3介绍有限自由度系统的拉、哈氏理论的几何表述, §5.6介绍张量密度, §5.7介绍辛几何的理论及其在拉、哈氏理论中的应用.

黑洞(热)力学既是广义相对论的一个非常重要的近代内容, 又是众多相关交叉学科的交汇点, 而且还是一个极其活跃的近代前沿研究课题. 本书第二版增补了很长的一章(第16章), 以便对这一课题进行专题介绍. 本章第一节(§16.1)首先比较详细地讲授稳态黑洞的热力学(即传统的黑洞热力学), 后续各节则陆续介绍非稳态黑洞力学研究中的若干非常重要的进展(包括近期进展). 黑洞力学涉及一系列的视界概念, 例如事件视界、表观视界、弱孤立视界、孤立视界和动力学视界, 其中后三者在黑洞力学的近期进展中特别有用. 我们将在§16.4中介绍表观视界, 然后用后续三节(§16.5–§16.7)比较详细地介绍(弱)孤立视界和动力学视界. 据不完全了解, 国内有一批研究生在导师指导下正准备或已开始在这些方面做研究工作, 他们感到原始近代文献并不好"啃"(包括概念的理解和公式的推导都有颇高的难度), 所以本章着力于尽量详尽仔细地讲解概念并尽量给出"步距"小得多的公式推导. 要深刻准确地理解这些概念和结论还必须对类光测地线汇的理论有很好的理解, 由于涉及类光, 这一理论相当抽象难懂, 而且参考文献寥寥无几, 我们专辟一节(§16.2)对这一重要基础知识做一个相当详细的讨论. (弱)孤立视界是满足某些条件的类光超曲面, 而类光面上的几何与只涉及正定度规的黎曼几何既有某些共性, 更有许多非常不同的性质(源于类光面上的诱导"度规"的退化性), 后者特别值得引起注意, §16.6的前两个小节就是专为阐明这些特殊性质而写的.

下面简介三个附录.

Noether 定理是场论教材几乎必讲的重要基础性定理. 多数教材在讲授该定理的证明时都使用坐标语言, 证明手法五花八门. 据笔者所知, 许多有志于彻底弄懂这一证明的学生学习后都不同程度地感到并未真懂. 然而用几何语言可以给出清晰简洁的证明. 本书附录 H 首先讲解用几何语言的证明, 然后以此为基础介绍笔者对坐标语言证明的理解.

纤维丛理论对理论物理工作者的重要性与日俱增, 本书第一版的数学基础(特别是李群李代数知识)本来就足以保证读者学习这一理论, 仅仅因为当时写作时间不足而被迫割爱, 未能将纤维丛理论纳入书中. 这一遗憾终于在现在的第二版中得以祛除: 纤维丛理论及其物理应用已经比较详尽地单独写成一个附录(附录 I). 我们以尽量好懂的方式讲解主纤维丛和伴纤维丛的概念和性质, 特别是主丛和伴丛上的联络. 为了帮助读者了解纤维丛理论在规范场论中的应用, 我们先专辟两节(§I.4, §I.5)对没有场论知识的读者介绍规范场论, 再用三节(§I.6 , §I.7 和 §I.8)讲解规范场论的丛语言表述, 注重在两种理论之间的“架桥”工作, 特别强调几个对应:主丛的截面对应于规范选择, 伴丛的截面对应于粒子场; 主丛的联络和曲率分别代表规范势和规范场强; 伴丛的联络则对应于粒子场的协变导数. 鉴于本书上、中、下三册篇幅颇大, 笔者建议急于学习纤维丛理论的读者不妨“单刀直入”, 即略去所有各章各附录, 在学习附录 G (§G.9 除外)之后直接阅读附录 I .

广义相对论(特别是宇宙论)以及量子场论(特别是超弦理论)的现代发展使德西特时空和反德西特时空再度变得十分重要,这是第二版中添加附录 J (德西特时空和反德西特时空)的原因.

关于选读内容以及习题的说明见上册前言.

与上册类似, 作者在写作第一版下册时曾邀请为数众多的专家、同行和学生分别阅读初稿的部分章节, 他们是(以姓氏汉语拼音为序): 敖滨, 曹周键, 戴陆如, 高长军, 高思杰, 贺晗, 黄超光, 邝志全, 刘旭峰, 马永革, 强稳朝, 田贵花, 吴小宁, 杨学军, 张红宝, 张芃, 郑驻军, 周彬, 周美柯, 作者已在第一版下册前言中表示了谢意. 在第二版中册和下册的写作过程中, 作者又与许多同行(含前学生)做过多次讨论, 并吸收了他们许多宝贵的意见和建议, 他们主要有(以姓氏汉语拼音为序): 曹周键, 高思杰, 邝志全, 马永革, 吴小宁, 杨学军, 张昊, 张红宝, 在此再次鸣谢. 以上诸君中的吴小宁和张红宝对第16章的内容(特别是孤立视界和动力学视界)相当熟悉, 他们在作者写作本章时曾提供过非常重要的帮助, 作者在此要格外鸣谢.

作者梁灿彬还要特别感谢对写作本书有重要帮助的两位朋友, 第一位是美国国家科学院院士、芝加哥大学教授 Robert Wald 先生, 他不但是梁步入本领域的优秀启蒙导师, 而且对梁回国后的教学和写作工作不断提供无私帮助. 第二位是中

科院数学所的邝志全研究员，他不仅审阅过本书的不少章节并提出过许多十分宝贵的意见和建议，而且在与梁的无数次讨论中以他对问题所特有的深刻思考和领悟使梁受益殊深.

作者还要感谢国家科学技术学术著作出版基金的资助，正是这一资助使本书的上、中、下册得以再版. 此外，本书(第二版)中、下册还受到国家自然科学基金资助项目10505004以及10675019的部分资助，在此一并鸣谢.

梁灿彬　　周　彬

2009年4月于北京师范大学

目　录

第 15 章　广义相对论的拉氏和哈氏形式

§15.1　拉 氏 理 论

15.1.1　有限自由度系统的拉氏理论

先对有限自由度系统(如多粒子系统)的拉氏理论作一复习. N 维系统有 N 个独立的广义坐标，每组广义坐标 $(q^1, q^2, \cdots, q^N)$ 确定系统的一个**位形**(configuration), 因此广义坐标又称**位形变量**(configuration variables). 所有可能位形的集合 $\mathscr{C}$ 称为系统的**位形空间**(configuration space), 是个 N 维流形.① 系统的演化(q^i 随时间 t 的变化)对应于位形空间 $\mathscr{C}$ 中一条以 t 为参数的曲线 $\eta(t)$，其参数式为 $q^i = q^i(t)$. 曲线的切矢代表演化的速度, 其坐标分量 $\dot{q}^i(t) \equiv q^i(t)/\mathrm{d}t$ 就是通常所称的**广义速度**. 设 $Q_0 \equiv \eta(t_0)$，$Q_1 \equiv \eta(t_1)$ 且 $t_1 > t_0$，则 $\eta(t)$ 介于 Q_0 和 Q_1 之间的一段反映系统从初始位形 Q_0 到终了位形 Q_1 的演化. 从 Q_0 到 Q_1 的每一曲线称为一条**路径**(path), 由 N 个排了序的一元函数 $q^i(t)$ 决定, 满足

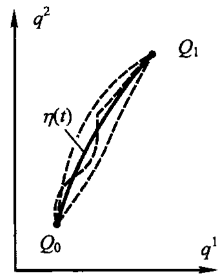

图 15-1　系统的演化可用位形空间(图中只画成两维)的曲线 $\eta(t)$ (正路)代表. 虚曲线代表运动学(而不是动力学)上可能的从 Q_0 到 Q_1 的途径(旁路)

$$(q^1(t_0), \cdots, q^N(t_0)) = Q_0, \qquad (q^1(t_1), \cdots, q^N(t_1)) = Q_1 .$$

所有路径中只有 $\eta(t)$ 才是演化曲线, 才代表由动力学规律决定的演化过程. 为陈述方便, 把演化曲线 $\eta(t)$ 称为**正路**, 其他路径称为**旁路**(图 15-1). 一个最简单的例子是牛顿力学中由一个自由质点构成的系统, 其位形空间就是 $\mathbb{R}^3$，任给 Q_0 和 Q_1 (满足 $t_0 < t_1$)后, 两点之间的直线[$q^i(t)$ 为线性函数]便是正路. 为了得到寻找正路的法则, 引入拉氏函数和作用量的概念. 系统的**拉氏函数**(Lagrangian function, 又称**拉氏量**) L 是广义坐标 q^i 和广义速度 $\dot{q}^i$ 的函数(共有 $2N$ 个自变量), 即 $L = L(q^i, \dot{q}^i)$. 对每一路径 $\{q^1(t), \cdots, q^N(t)\}$，$L$ 又通过宗量 q^i，$\dot{q}^i$ 成为 t 的一元函数, 其积分 S 称

① 在更一般的情况下, 位形空间未必能被一个坐标域覆盖. §15.3 将简介用几何语言的讨论.

为该路径的**作用量**(action):

$$S := \int_{t_0}^{t_1} L(q^i(t),\ \dot{q}^i(t))\,\mathrm{d}t\,. \tag{15-1-1}$$

正路的与众不同之处由拉氏理论中的**哈氏原理**(Hamilton principle, 亦称**变分原理**)给出, 它要求正路的作用量取极值(亦称稳定值). 对“极值”一词应作解释. 决定作用量S的自变因素不是一个(或几个)量而是一条曲线, 因此S不是普通函数而是曲线的函数(“自变量”是曲线), 是**泛函**(functional). 对普通函数求极值只涉及微分运算, 而对泛函求极值则涉及变分运算. 考虑任一(从Q_0到Q_1的)单参路径族$q^i = q^i(t,\lambda)$, 参数$\lambda = 0$给出正路$\eta(t)$, $\lambda \neq 0$给出旁路. [应分清两种参数: 参数λ的一个值$\hat{\lambda}$决定族中的一条曲线$q^i = q^i(t,\hat{\lambda})$; 其中参数$t$的一个值$\hat{t}$则决定该曲线的一点$q^i = q^i(\hat{t},\hat{\lambda})$.] 族中曲线的作用量$S$由于$q^i$, $\dot{q}^i$依赖于λ而成为λ的函数:

$$S(\lambda) = \int_{t_0}^{t_1} L\,(q^i(t,\lambda), \dot{q}^i(t,\lambda))\mathrm{d}t\,, \tag{15-1-2}$$

于是S在单参族内的求极值问题便归结为一元函数$S(\lambda)$的求导问题:

$$\left.\frac{\mathrm{d}S(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \left.\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial \lambda} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \lambda}\right)\right|_{\lambda=0} \mathrm{d}t\,.$$

令$\delta S \equiv \mathrm{d}S(\lambda)/\mathrm{d}\lambda\,|_{\lambda=0}$, $\delta q^i \equiv \partial q^i(t,\lambda)/\partial\lambda\,|_{\lambda=0}$, $\delta \dot{q}^i \equiv \partial \dot{q}^i(t,\lambda)/\partial\lambda\,|_{\lambda=0}$, 并把$\delta S$, δq^i和$\delta \dot{q}^i$分别称为S, q^i和$\dot{q}^i$在所选单参族内的**变分**(variation), ① 则上式对应于如下变分关系:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i\right)\mathrm{d}t\,. \tag{15-1-3}$$

其中$\partial L/\partial q^i$和$\partial L/\partial \dot{q}^i$是$\partial L/\partial q^i\,|_{\lambda=0}$和$\partial L/\partial \dot{q}^i\,|_{\lambda=0}$的简写. 因为正路$\eta(t)$有$\lambda = 0$, 哈氏原理的含义就是所有单参路径族的$\delta S \equiv \mathrm{d}S(\lambda)/\mathrm{d}\lambda\,|_{\lambda=0}$都为零. 下面导出$\delta S = 0$(对所有单参族)的等价条件. 由于对$\lambda$求导与对$t$求导可交换顺序, 被积函数的第二项可改写为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^i)\,,$$

① 通常把泛函S的变分δS定义为S的增量的线性主部(对应于函数的微分), 我们[在选定单参路径族$q^i = q^i(t,\lambda)$的情况下]更偏爱于把δS定义为$\mathrm{d}S(\lambda)/\mathrm{d}\lambda\,|_{\lambda=0}$ [见Wald(1984)], 并称之为“S在所选单参族内的变分”除了$\delta S, \delta q^i, \cdots$的含义有区别外, 两种处理给出相同结果.

由分部积分法得

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta\dot q^i\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta q^i\right)-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)\delta q^i\right]\mathrm{d}t\,.$$

因为所有曲线的起、止点都是 Q_0 和 Q_1，所以有

$$\delta q^i|_{t_0}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[q^i(t_0,\lambda)-q^i(t_0,0)]=0\qquad 和\quad \delta q^i|_{t_1}=0\,,$$

因而上式右边第一项积分为零. 代回式(15-1-3)得

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)\delta q^i\mathrm{d}t\,. \tag{15-1-4}$$

把上式右边括号内的量记作 $\varLambda_i$，则上式可简记为

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\varLambda_i\delta q^i\mathrm{d}t\,. \tag{15-1-4$'$}$$

于是有如下命题：

命题 15-1-1　设 $\eta(t)$ 是一条路径，则

$\eta(t)$ 为正路 $\Leftrightarrow$ $\delta S=0\ \forall$ 含 $\eta(t)$ 的单参路径族 $\Leftrightarrow$ $\eta(t)$ 的 $\varLambda_i=0\ (i=1,\cdots,N)$.

证明　第一个 $\Leftrightarrow$ 号其实就是哈氏原理，真正待证的是第二个 $\Leftrightarrow$ 号. 由式(15-1-4′)显见第二个 $\Leftrightarrow$ 号的“$\Leftarrow$”部分成立，故只须证明“$\Rightarrow$”部分. 用反证法. 设 $\exists\,\tilde t\in(t_0,t_1)$ 使 $\varLambda_1(\tilde t)\neq 0$ [不妨设 $\varLambda_1(\tilde t)>0$]，则 $\tilde t$ 有邻域 $\varDelta$ [作为区间 (t_0,t_1) 的真子集]使 $\varLambda_1|_\varDelta>0$. 取单参族 $q^i=q^i(t,\lambda)$ [$\lambda=0$ 给出 $\eta(t)$]使① δq^1 在 $\varDelta$ 内为正，在 $(t_0,t_1)-\varDelta$ 内为零(且从正到零为可微过渡)；② $\delta q^2,\cdots,\delta q^N$ 在 (t_0,t_1) 内为零，则 $\int_{t_0}^{t_1}\varLambda_i\delta q^i\mathrm{d}t>0$，与 $\delta S=0$ (对任一单参族)矛盾. 这就证明了 $\varLambda_1=0$. 同理可证 $\varLambda_2,\cdots,\varLambda_N=0$. □

上述命题表明 $\eta(t)$ 为正路的充要条件是它的拉氏函数 $L=L(q^i,\dot q^i)$ 满足

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}=0,\qquad i=1,\cdots,N\,. \tag{15-1-5}$$

在 $L(q^i,\dot q^i)$ 的函数形式给定后，上式是关于 N 个待求函数 $q^i(t)$ 的 N 个 2 阶常微分方程，称为**欧拉-拉格朗日方程**，简称**拉氏方程**，是系统的演化(运动)方程. 在给定初始条件 $q^i(t_0)$ (初始位形)和 $\dot q^i(t_0)$ (初始速度)后有唯一解 $\{q^i(t)\}$，[①] 对应于 $\mathscr{C}$ 中

① 此结论只对正规情况成立.非正规情况的讨论见小节 15.3.2 .

的一条以 t 为参数的曲线(**演化曲线**, 即正路). 拉格朗日在1788 年的著作中就曾写下这组方程, 但他不知道它等价于作用量取极值. 这一等价性是数十年后由哈密顿发现的, 哈氏原理故此得名.

拉氏函数 L 也可以显含时间, 即 $L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$, 这时 L 通过 $2N+1$ 个宗量成为时间 t 的函数. 以上讨论和结论仍然适用, 只须把有关式子中的 $L = L(q^i, \dot{q}^i)$ 改为 $L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$.

对牛顿引力理论的一个质点, 如果取动能减引力势能作为拉氏函数, 则不难验证拉氏方程与牛顿第二定律(其中的力等于势能的梯度的负值)等价. 一般地说, 所谓把某一物理理论(有限自由度)改铸为拉氏形式, 就是要找出适当的拉氏函数 $L = L(q^i, \dot{q}^i)$ 使得由哈氏变分原理导出的拉氏方程与该理论的演化方程一致.

15.1.2 经典场论的拉氏形式

读者最熟悉的经典场是闵氏时空 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 的电磁场, 它可由对偶矢量场(电磁 4 势) A_a 描述. 无源电磁场在洛伦兹规范下的演化方程为

$$\partial^a \partial_a A_b = 0 . \text{(其中 } \partial_a \text{ 是与 } \eta_{ab} \text{ 适配的导数算符)} \tag{15-1-6}$$

还有两种重要的经典场, 其发现过程颇为特别. 在研究量子力学时, 人们早就注意到薛定谔方程 $\mathrm{i}\hbar \partial\psi/\partial t = H\psi$ 不是洛伦兹协变的, 因为它含有波函数 ψ 对 t 的一阶导数和 ψ 对 x^i 的二阶导数($H\psi$ 中含 $\nabla^2\psi$), 从而时、空坐标互不平权. 第一种修改方案是把 ψ 对 t 的导数也改为二阶, 结果是

$$\partial^a \partial_a \phi - m^2 \phi = 0 , \quad \text{(其中 } m \text{ 是常数)} \tag{15-1-7}$$

称为 **Klein - Gordon 方程**(简称 KG 方程). 它虽然洛伦兹协变, 但却有两大问题: ①存在负能解; ②概率密度可以为负. 这两者都在物理上无法接受. 第二种修改方案是把 ψ 对 x^i 的导数也改为一阶, 结果得到 Dirac 方程. 这一方程不存在负概率密度问题, 但仍存在负能解. Dirac 引入“负能海”和空穴的概念对此加以解释, 经发展后就导致从量子力学到量子场论的过渡. 量子力学研究粒子数不变的量子系统, 而在量子场论中粒子数是可变的. 人们发现用量子场论的观点可给 KG 方程及 Dirac 方程以清晰的解释, 而且原来的困难不复存在. 先看 KG 方程. 现在的 ϕ 不再被看作粒子的波函数而是看作与电磁场的 A_a 类似的场量(经典标量场), 量子化后所得的量子是自旋为零的粒子(标量粒子), 例如 π 介子, 而 KG 方程则被视为这个标量场 ϕ 的演化方程, 其中的常数 m 代表量子化后每一量子的(静)质量. 另一方面, 量子场论中的 Dirac 方程则是自旋为 $1/2$ 的粒子(如电子)的演化方程. 以上只是非常粗略的简介, 本章无意涉及量子场论.

下面把拉氏理论推广到经典场(看作物理系统), 即讨论经典场论的拉氏形式.

最简单的例子是闵氏时空的实标量场(ϕ 为实数). 设 $\{x^0 \equiv t, x^i\}$ 为(右手)惯性坐标系, 则同时面 $\Sigma_{\hat{t}}$ 代表 $\hat{t}$ 时刻的全空间. 光滑地指定标量场 ϕ 在 $\Sigma_{\hat{t}}$ 上各点的值就相当于指定了系统在 $\hat{t}$ 时刻的位形, 因此 $\hat{t}$ 时刻的位形变量(广义坐标)可记作 $\phi(x,\hat{t})$, 其中 x 代表 $\Sigma_{\hat{t}}$ 的任一点. 可以认为 $\phi(x,\hat{t})$ 与前面的 $q^i(\hat{t})$ 对应, 其中 ϕ 对应于 q, 而 x 则对应于指标 i. 不同的是, i 只能从 1 取到 N (取有限个分立值), 而 x 则可取遍 $\Sigma_{\hat{t}}$ 上各点, 即 x 是可连续取值的指标, 因此标量场(其实任何场都一样)是无限自由度系统. 所谓把标量场论改铸为拉氏形式, 就是要找到适当的拉氏量使得由哈氏变分原理可得出演化方程(15-1-7). 拉氏量以及哈氏原理在场论中的提法可仿照其在有限自由度系统的提法得到. 设 Σ_0 和 Σ_1 分别是惯性时刻 t_0 和 $t_1 > t_0$ 的同时面, U 是介于两者之间的时空开域(称为“三明治”式开域). 适当给定初始位形 $\phi|_{\Sigma_0}$ 和终了位形 $\phi|_{\Sigma_1}$ (相当于有限自由度系统的 Q_0 和 Q_1 点)后, 欲求与演化方程(15-1-7)吻合的中间演化过程, 亦即欲求定义于 $\overline{U}$ (U 的闭包)上的满足如下条件的标量场 $\phi(x,t)$: (a)在 U 的任一点满足方程(15-1-7); (b) 在 Σ_0 和 Σ_1 上分别等于所指定的初始和终了位形. 这样的 $\phi(x,t)$ 称为正路, 而只满足条件(b)的 $\phi(x,t)$ 则称为旁路. 正路和旁路统称路径. 在有限自由度理论中, 路径 $\{q^i(t)\}$ 在时刻 t 的拉氏量为 $L(t)=L(q^i(t),\dot{q}^i(t))$, 与此类似, 标量场 ϕ 在时刻 t 的拉氏量可以表为

$$L(t)=L[\phi(x,t),\dot{\phi}(x,t)], \tag{15-1-8}$$

其中 $\dot{\phi}(x,t)\equiv\partial\phi(x,t)/\partial t$. 应该注意的是, L 在任一时刻 $\hat{t}$ 的值依赖于该时刻的全空间 $\Sigma_{\hat{t}}$ 上的场 $\phi(x,\hat{t})$ 和 $\dot{\phi}(x,\hat{t})$ [而不再是有限个自变数 $q^i(\hat{t})$ 和 $\dot{q}^i(\hat{t})$], 所以 L 是空间场 ϕ 和 $\dot{\phi}$ 的泛函. 在此基础上就不难接受路径的作用量的如下定义:

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(t)\mathrm{d}t\ . \tag{15-1-9}$$

仿照力学中对连续弹性体的讨论, 把 Σ_t 分成许多小格 d^3x, 假定 ϕ 场对全空间 Σ_t 贡献的拉氏量 $L(t)$ 是其对每一小格的贡献之和, 即

$$L(t)=\int_{\Sigma_t}\mathscr{L}\mathrm{d}^3x\,, \tag{15-1-10}$$

其中 $\mathscr{L}$ 可解释为单位体积的拉氏量, 称为**拉氏密度**(Lagrangian density), ① 是场量 $\phi(x,t)$ 及其时间导数 $\dot{\phi}(x,t)$ 和空间导数 $\partial_i\phi(x,t)$ 的局域函数:

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi(x,t),\dot{\phi}(x,t),\partial_i\phi(x,t))\,.^{②} \tag{15-1-11}$$

“局域函数”的含义是 $\mathbb{R}^4$ 中任一点 p 的 $\mathscr{L}$ 值按某种函数关系(也记作 $\mathscr{L}$)取决于

① 通常遇到的几乎所有场都满足这一假定, 即存在拉氏密度 $\mathscr{L}$ 使 $L(t)$ 可表为式(15-1-10).

② $\mathscr{L}$ 还可显含时空点, 即更一般地有 $\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi,\dot{\phi},\partial_i\phi,p)$.

$\phi, \dot{\phi}$ 和 $\partial_i\phi$ 在 p 点的值(与这些场在 p 点以外的值无关):

$$\mathscr{L}|_p = \mathscr{L}(\phi|_p, \dot{\phi}|_p, \partial_i\phi|_p) \, .\text{①} \tag{15-1-12}$$

把式(15-1-10)代入(15-1-9)得

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{\Sigma_t} \mathscr{L} \, \mathrm{d}^3x = \int_U \mathscr{L} \mathrm{d}^4x \, , \quad (\mathrm{d}^4x \text{ 可写可不写}) \tag{15-1-13}$$

哈氏原理推广到场论后的提法自然是:初始位形 $\phi|_{\Sigma_0}$ 与终了位形 $\phi|_{\Sigma_1}$ 之间的正路的充要条件是其作用量 S 取极值.

上面的讨论默认了时空的某种 3+1 分解[涉及某时刻 t 的场位形 $\phi(x,t)$ 以及某路径在某时刻的拉氏量 $L(t)$], 这只是便于初学者接受的讲法. 事实上, 拉氏场论可改用不依靠 3+1 分解的(时空协变的)语言表述. 哈氏原理的功用是寻求场量的演化方程, 这是时空流形 $\mathbb{R}^4$ 上的微分方程, 只涉及每一时空点 p 及其任意"小"邻域, 因此可把 "三明治" 式的 U 改为任意开域 $U \subset \mathbb{R}^4$ (还要求 U 的闭包 $\overline{U}$ 紧致), 把作用量直接定义为 $\mathscr{L}$ 在 U 上的 4 维积分:

$$S := \int_U \mathscr{L} \, , \tag{15-1-14}$$

把 $\mathscr{L}$ 看作场量 ϕ 及其时空导数 $\partial_a\phi$ (不再分为 $\dot{\phi}$ 和 $\partial_i\phi$)的局域函数:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi, \partial_a\phi) \, , \tag{15-1-15}$$

并把问题的提法相应改为:给定 ϕ 场在 U 的边界 $\dot{U}$ 上的适当值 $\phi|_{\dot{U}}$ 后, 欲求定义在 $\overline{U}$ 上的、满足如下两个条件的标量场 ϕ (正路): (a)在 U 内满足演化方程(15-1-7); (b)在 $\dot{U}$ 的值等于所给边界值 $\phi|_{\dot{U}}$. 哈氏变分原理仍可表述为 "正路的充要条件是作用量取极值" . 这样就摆脱了对 3+1 分解的依赖. 我们将逐渐看到拉氏理论本质上是直接与时空(而不是其 3+1 分解)打交道的理论(与此相反, 后面介绍的哈氏理论则是"天生"就依赖于 3+1 分解的.) 同拉氏密度 $\mathscr{L}$ 相较, 拉氏量 $L(t)$ 在拉氏场论中退居到可有可无的地位. $\mathbb{R}^4$ 上的一个标量场 ϕ 称为一个 **4 维场位形**. 给定一个 4 维场位形 ϕ 后, 每一时空点的 $\mathscr{L}$ 值便由式(15-1-15)确定, 代入式(15-1-14)便得一个 S 值, 所以 S 是 4 维场位形 ϕ 的泛函, 记作 $S[\phi]$.② 以 $\mathscr{F}$ 代表所有(满足适当条件的) 4 维场位形的集合, 便有 $S: \mathscr{F} \to \mathbb{R}$. 为了考虑变分, 也要引入参数 λ , 不过现在 λ 的用处不是区分从 Q_0 到 Q_1 的不同曲线而是区分不同的 4 维场位形, 因此以

---

① 此处的"局域函数"与微分几何中的通常含义不同. 按照通常含义, 流形 M 上的局域函数 f 是定义在某个开子集 $U (\neq M)$ 上的函数, 即 $f: U \to \mathbb{R}$.

② $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi, \partial_a\phi)$ 是 ϕ 和 $\partial_a\phi$ 的局域函数, 即 $\mathscr{L}$ 在任一点 p 的值取决于 $\phi|_p$ 和 $\partial_a\phi|_p$. 反之, S 则依赖于整个 ϕ 场, 只有给定 $\mathbb{R}^4$ (至少 U)上的 ϕ 场才可确定 S 的值. 因为自变的 ϕ 不是数而是场, 所以 S 是 ϕ 的泛函.

前的单参曲线族 $q^i(t,\lambda)$ 现在应为单参 4 维场位形族 $\phi(\lambda)$ (也可看作 $\mathscr{F}$ 中的曲线[1]). ϕ 在族中的变分 $\delta\phi$ 定义为

$$\delta\phi := \lim_{\lambda\to 0}\frac{\phi(\lambda)-\phi(0)}{\lambda} \equiv \left.\frac{\mathrm{d}\phi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}. \tag{15-1-16}$$

请注意 $\delta\phi$ 也是 $\mathbb{R}^4$ 上的标量场. 给定单参族 $\phi(\lambda)$ 后, 把映射 $S:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$ 限制在族内便诱导出一元函数 $S[\phi(\lambda)]$ [简记为 $S(\lambda)$], $S(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 的导数值就称为 S 在该族内的变分:

$$\delta S := \left.\frac{\mathrm{d}S(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}. \tag{15-1-17}$$

哈氏原理可以表为: $\phi\in\mathscr{F}$ 在 U 内满足演化方程的充要条件是 $\mathscr{F}$ 中所有满足下面两个条件的单参族 $\phi(\lambda)$ 对应的 δS 为零. 这两个条件是

$$\text{(a)}\ \phi(0)=\phi;\qquad \text{(b)}\ \phi(\lambda)|_{\dot U}=\phi(0)|_{\dot U},\ \forall\lambda. \tag{15-1-18}$$

由此便可推出闵氏时空中标量场 ϕ 的演化方程[亦称**拉氏方程**, 试与式(15-1-5)对比]

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}=0, \tag{15-1-19}$$

推导如下. 作用量 $S(\lambda)=\int_U\mathscr{L}(\lambda)$ 的变分

$$\delta S \equiv \left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_U \left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}.$$

由 $\mathscr{L}(\lambda)=\mathscr{L}(\phi(\lambda),\partial_a\phi(\lambda))$ 得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\left.\frac{\mathrm{d}\phi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\left.\frac{\mathrm{d}(\partial_a\phi(\lambda))}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \\ &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\delta(\partial_a\phi) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\partial_a(\delta\phi),\end{aligned}$$

故

$$\delta S=\int_U(\partial\mathscr{L}/\partial\phi)\delta\phi+\int_U[\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_a\phi)]\partial_a(\delta\phi).$$

$$\text{上式右边第二项}=\int_U\partial_a\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\delta\phi\right]-\int_U\left[\partial_a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_a\phi)}\right]\delta\phi,$$

---

① 本书不讲无限维流形, 本章涉及的无限维流形的若干概念(如曲线及其切矢, 光滑性……)只好借有限维流形作直观想象.