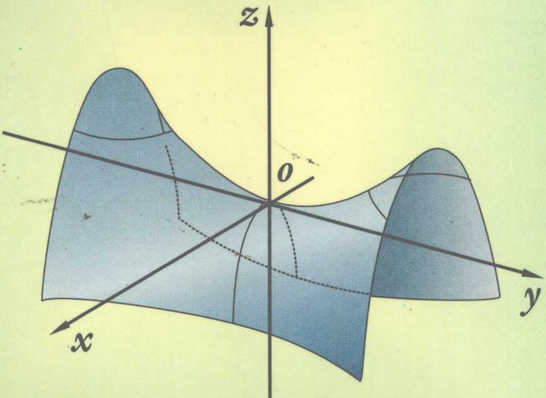
高等数学解题指导

浙江工业大学应用数学系编



中国商业出版社

高等数学解题指导

浙江工业大学数学教研室　编

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指导/浙江工业大学数学教研室编. —北京：中国商业出版社，1999.5

ISBN 7—5044—3888—X

Ⅰ.高… Ⅱ.浙… Ⅲ.高等数学—解题 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 16456 号

责任编辑 唐伟荣

中国商业出版社出版发行

(100053 北京广安门内报国寺 1 号)

新华书店总店北京发行所经销

杭州电子工业学院印刷厂印刷

*

1999 年 5 月第 1 版　　1999 年 5 月第 1 次印刷

850×1168 毫米　32 开　8.75 印张　200 千字

定价：16.50 元

*　*　*　*

(如有印装质量问题可更换)

前　言

高等数学是工科大学的一门主要基础课程，也是刚进入大学校门的大学生首先碰到的一门重点课。学好高等数学课程对今后其他基础课程和专业课程的学习是至关重要的。为了帮助学生掌握、理解高等数学基础知识，并能运用其来分析、解决问题，我们组织了多年来从事高等数学教学的教师，针对教学的特点，结合自身多年的教学实践编写了本书。

在本书的编写中，我们力图这样努力：对孤立的事实，将它与有关的事物作对照，对新的发现，将它与已熟知的知识相联系；不习惯的，将它与习惯的相类比；特殊的结论，将它推广；一般的结果，找出它的特殊情况；复杂的问题，将它分解为简单的组合；零碎的细节，通过概括获得全貌。

本书按专题分章节编写，可作为高等数学的习题课教程。每个专题包括这样几项：

一、内容提要：以《高等数学》教学大纲为纲，解析、总结每章所包含的知识、能力要求，使学生能准确把握需掌握的内容。

二、典型例题：丰富多样形式的例题，不但对知识有较大的覆盖面，而且针对重点、难点安排多重训练。特别是在解题前后进行“方法点拨”，对重点、难点和解题思路加以简明扼要的解说，提出解题规律。

三、自测题：每章后的自测题用以帮助学生检测学习效果。每份试卷的编排由易到难，难易结合，体现了合理的科学梯度。

参加编写的人员有：第一章方照琴；第二、三章刘东；第四章朱

益民；第五章邬学军；第六章周南；第七、九章程小力；第八章陆建芳；第十章李永琪；第十一章卓文新；第十二章寿华好。全书由周南、邬学军、李永琪审校并统稿，插图由寿华好完成。

本书是学生学习高等数学课程的一本辅导书，也可作为教师的教学参考书。在编写过程中，不妥之处在所难免，恳切希望广大读者提出批评、建议，使本书不断丰富完善。

编者

1999.4

目　　录

第一章　函数与极限

§1　函数与极限

内　容　提　要

一、学习目的

理解函数概念，会求函数定义域，熟悉基本初等函数及其图形、特点，理解反函数、隐函数、复合函数、分段函数、初等函数的概念.

二、函数的四条重要特性

1. 有界性

如果存在正数 M，使得对一切 $x\in(a,b)$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有界.

2. 单调性

如果对任意的 $x_1<x_2$，x_1、$x_2\in(a,b)$，都有 $f(x_2)>f(x_1)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加，若 $f(x_2)<f(x_1)$ 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调减小.

3. 奇偶性

若函数 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上有定义，且 $f(-x)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 为偶函数，其图形关于 y 轴对称. 若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，其图形关于原点对称.

4. 周期性

若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，如果存在正数 T，使得

$f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 通常说周期函数的周期是指其最小正周期.

三、极限的概念

1. 数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义

若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 的一切 x_n，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

2. 函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，若对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 δ，使得对于满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

3. 左右极限概念

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左右极限存在并且相等，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

四、理解无穷小概念，熟记下列等价无穷小公式

若 α 为在某一趋向下的无穷小，则

1. $\alpha\sim\sin\alpha\sim\arcsin\alpha\sim\tan\alpha\sim\arctan\alpha$

2. $1-\cos\alpha\sim\dfrac{\alpha^2}{2}$

3. $e^{\alpha}-1\sim\alpha$

4. $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$

5. $\sqrt[n]{1+\alpha}-1\sim\frac{\alpha}{n}$

五、极限的重要性质

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 下有界.

2. 单调有界必有极限.

3. 夹逼定理.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$，且 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant\varphi(x)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$

4. 有极限的量与无穷小之间的关系：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$

5. 等价无穷小替代.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_1(x)=0$，且 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta_1(x)=0$，且 $\beta(x)\sim\beta_1(x)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$

注：上述公式中 $x\to x_0$ 均可换为 $x\to\infty$.

六、熟练掌握极限的四则运算，熟记两个重要极限

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

灵活应用性质计算极限；特别注意极限计算中乘除因子的等价无穷小替代；分段函数在分段点上的极限通常要讨论其左右极限. 极限计算是本章的重点.

典　型　例　题

例 1. 已知 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$，求 $f(\cos\frac{x}{2})$.

分析：从概念上说此题是已知函数 $f(u)$ 与 $u=\sin\frac{x}{2}$ 的复合

函数，求函数 $f(u)$，再求 $f(\cos\frac{x}{2})$，关键是三角变形.

方法一：

令 $u=\sin\frac{x}{2}$，则有

$1+\cos x=2-2\sin^2\frac{x}{2}=2-2u^2$ 得

$f(u)=2-2u^2$

$f(\cos\frac{x}{2})=2-2\cos^2\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$

方法二：

$$
\begin{aligned}
f(\cos\frac{x}{2})&=f(\sin\frac{\pi-x}{2})\\
&=1+\cos(\pi-x)\\
&=1-\cos x
\end{aligned}
$$

两种方法的不同之处在于一个是从已知条件开始变形，而另一个是从要求的结果出发进行思考的.

例 2. 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}\lg\sin x$ 的定义域.

解：要使 $\sqrt{16-x^2}$ 与 $\lg\sin x$ 同时有意义，x 必须满足

$$
\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases}
$$

即 $\begin{cases}|x|\leqslant 4\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)\end{cases}$

所以 $f(x)=\sqrt{16-x^2}\lg\sin x$ 的定义域为

$-4\leqslant x<-\pi$ 及 $0<x<\pi$

例 3. 判别下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{\cos^3 x\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x-x^2 & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ x^2+x & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$

解(1)　显然 $y=x$ 为奇函数，$y=\cos^3 x$ 为偶函数，只需判断

$\varphi(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性.

由于 $\varphi(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=-\varphi(x)$$

所以 $\varphi(x)$为奇函数,从而推出 $f(x)$为偶函数.

解(2) $f(x)$是一个分段函数,若按定义判断奇偶性必须要搞清楚 $f(-x)$等于什么,$-f(x)$等于什么,这恰恰是同学们最容易出错的地方,此题用图像法判别为好.

方法一:用图象法判别

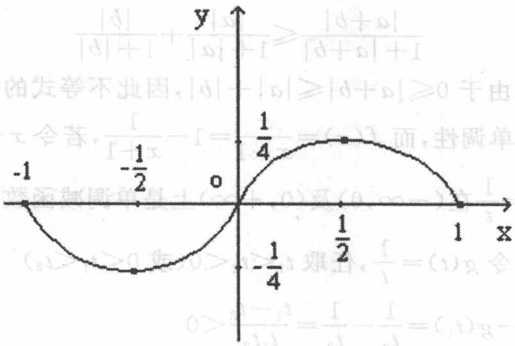


图 1—1

在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一段上,$y=f(x)$的图象是顶点为$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$,过(0,0)点和(1,0)点的抛物线,在$-1\leqslant x<0$ 一段上,$y=f(x)$的图象是顶点为$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$,过(0,0)点和$(-1,0)$点的抛物线, 由图可知, $y=f(x)$的图像在定义域$[-1,1]$上是关于原点对称的,所以为奇函数.

方法二:按定义判别

$$f(x)=\begin{cases} x-x^2 & (0\leqslant x\leqslant 1) \\ x^2+x & (-1\leqslant x<0) \end{cases}$$

$$f(-x)=\begin{cases} -x-x^2 & (0\leqslant -x\leqslant 1) \\ x^2-x & (-1\leqslant -x<0) \end{cases}$$

即 $f(-x)=\begin{cases} -x^2-x & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ x^2-x & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$

显然 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

奇偶函数的判别在后面定积分计算和函数的三角级数展开中有着极其重要的作用.

例 4. 证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 在 $(-\infty,-1)$ 及 $(-1,+\infty)$ 上是单调增函数，从而进一步证明：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

分析：由于 $0\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$，因此不等式的证明只需利用 $f(x)$ 的单调性，而 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$，若令 $x+1=t$，只需证 $g(t)=\dfrac{1}{t}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 上是单调减函数即可.

证明：令 $g(t)=\dfrac{1}{t}$，任取 $t_1<t_2<0$（或 $0<t_1<t_2$）

$$g(t_2)-g(t_1)=\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_2}=\frac{t_1-t_2}{t_1t_2}<0$$

$\therefore g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 上为单调减函数.

$$f(x)=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}=1-g(x+1)$$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 及 $(-1,+\infty)$ 上是单调增函数.

由于 $0\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$

所以 $f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)$

即 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}$

$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

学了第三章以后，我们可以用拉格朗日微分中值定理证明此不等式.

例 5. 设 $f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，且图形关于直线 $x=2$ 对称，试证明 $f(x)$为周期函数，并求出周期 T.

分析：从图形上容易看出 $f(x)$的周期为 4，但大部分同学不善于将条件写成解析式，从而不能给出严格的理论证明，这道题的关键是图形关于直线 $x=2$ 对称的表达式是 $f(2+x)=f(2-x)$.

证明：$\because f(x)$为偶函数

$\therefore f(-x)=f(x)$

$\because f(x)$的图形关于 $x=2$ 对称

$\therefore f(2+x)=f(2-x)$

即 $f(x)=f(4-x)$

用$-x$ 代替 x 得$f(-x)=f(4+x)$

从而有 $f(x)=f(-x)=f(4+x)$

即 $f(x)$是以 4 为周期的周期函数，$T=4$.

例 6. 已知 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$

求：$f[g(x)]$与$g[f(x)]$的表达式.

分析：这是两个分段函数的复合，关键是抓住中间变量的值域，复合函数 $f[g(x)]$的结构是

$$\begin{array}{ccc} f & g & x \\ \text{因变量} & \text{中间变量} & \text{自变量}\end{array}$$

由 $g(x)=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 1\\ 2 & |x|>1\end{cases}$ 得到 $g(x)$的取值范围：

当$|x|<1$ 时，$1<2-x^2\leqslant 2$

当 $x=-1$ 时， $g(-1)=1$

当 $x=1$ 时， $g(1)=1$

当$|x|>1$ 时， $g(x)=2$ 由此得到

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & |x|=1\\0 & |x|\neq 1\end{cases}$$

同样对于 $g[f(x)]$

当 $|x|\leqslant 1$ 时 $f(x)=1$ $g(1)=1$

当 $|x|>1$ 时 $f(x)=0$ $g(0)=2$

所以有

$$g[f(x)]=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\2 & |x|>1\end{cases}$$

例 7. 按定义证明下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-5}=\dfrac{2}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

分析:按定义证明极限通常需要逆向思考,必要时作恰当的放大或者缩小,可简化不等式的计算,花较少的时间找到 N 或者 δ.

证明(1):考虑当 $n>3$ 时

$$\left|\frac{2n+1}{3n-5}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3}\left|\frac{13}{3n-5}\right|<\frac{13}{3n-5}<\frac{13}{n}, \text{故}$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{2n+1}{3n-5}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$,只要

$$\frac{13}{n}<\varepsilon, \text{即 } n>\frac{13}{\varepsilon}$$

所以取 $N=max(3,[\frac{13}{\varepsilon}])$,当 $n>N$ 时,恒有

$$\left|\frac{2n+1}{3n-5}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$$

$$\text{即 } \lim_{x\to\infty}\frac{2n+1}{3n-5}=\frac{2}{3}$$

证明(2):

$$\text{考虑}\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\frac{|1-\sqrt{x}|}{1+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{|1-x|}{(1+\sqrt{x})^2}<\frac{|1-x|}{2}$$

为使$\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$,只需$\frac{|x-1|}{2}<\varepsilon$,即$|x-1|<2\varepsilon$,所以对任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=2\varepsilon$,当 $0<|x-1|<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

$$即\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$$

数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义和函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义虽然是基本概念,但对工科学生要求不会太高,重在理解定义的精神,不宜做过多过难的题目.

例 8. 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)(e^{\sin 2x}-1)}{\arcsin\frac{x^2}{2}}$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x(3^x-1)}$

(4)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

(5)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}$

解(1) $\frac{0}{0}$型不定式,用等价无穷小替代.

当 $x\to 0$ 时$\ln(1+3x)\sim 3x$,

$$e^{\mathrm{Sin}2x}-1\sim\sin 2x\sim 2x$$

$$arc\sin\frac{x^2}{2}\sim\frac{x^2}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)(e^{\sin 2x}-1)}{\arcsin\dfrac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3x)\cdot(2x)}{\dfrac{x^2}{2}}=12$

解(2)　这是一个非常典型的例子，通常有下列错误解法：因为 $\tan x\sim x,\sin x\sim x$(当 $x\to 0$ 时)

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^3}=0$

这种解法的错误是用 $x-x=0$ 代替了 $\tan x-\sin x$，显然 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{\tan x-\sin x}=0\neq 1$，因此 $\tan x-\sin x$ 与 $x-x=0$ 并不等价，故不能用 0 来替代 $\tan x-\sin x$. 可以证明：若无穷小量 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=K\neq -1$，则 $\alpha+\beta\sim\alpha'+\beta'$. 本题的正确解法如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

解(3)　当 $x\to 0$ 时 $3^x-1=e^{x\ln 3}-1\sim x\ln 3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x(3^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)+(1-\cos x)}{x^2\cdot\ln 3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)}{x^2\ln 3}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\ln 3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\ln 3}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2\cdot\ln 3}$$

$$=\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{2\ln 3}=\frac{3}{2\ln 3}$$

请思考：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x(3^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2\ln 3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\ln 3}=\dfrac{1}{\ln 3}$对不对？若不对，错在哪儿？

解(4)　方法 1：消零因子法

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{2}{3}$$

方法 2:用等价无穷小替代法

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{\frac{1}{3}\ln x}-1}{e^{\frac{1}{2}\ln x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}\ln x}{\frac{1}{2}\ln x}=\frac{2}{3}$$

解(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(x+\sin x)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}=\frac{1}{2}(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{x})=1$$

以上 5 例均为$\frac{0}{0}$型不定式，通常用消零因子法、等价无穷小量替代法和重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，有时还要将几种方法结合起来使用.

例 9. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{2}}{2})^n$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{3-e^x}{x+2})^{\frac{1}{\sin x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$