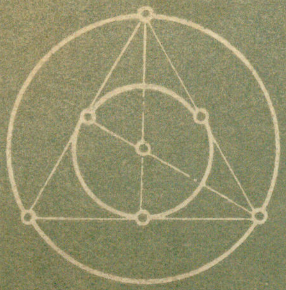
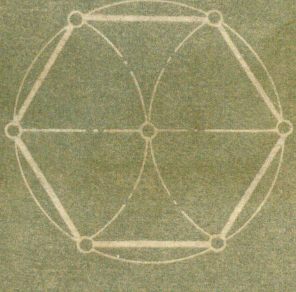


姜康甫　吉　星　編著

几何画的原理和作法



科学技術出版社

統一書号：13119・91
定价：1.20元

几何画的原理和作法

姜康甫　吉　星　編著

科学技術出版社

內 容 提 要

本書就平面几何画的作法和原理作了比較全面的介紹，并着重說明各种画法的数学論証，以补一般書籍只重画法不談原理的缺点．

本書在編寫順序上基本和一般教材一致，可以供制圖教师及学生作参考．

几何画的原理和作法

編著者　姜康甫　吉　星

*

科学技術出版社出版
（上海南京西路 2004 号）
上海市書刊出版業營業許可証出 079 号
中科藝文聯合厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

統一書号：13119·91

开本 787×1092 耗 1/27 · 印張 8 2/9 · 字數 168,000
1957 年 9 月第 1 版
1957 年 9 月第 1 次印刷 · 印數 1—3,200
定价：(10)1.20 元

編者的話

随着祖國社会主义建設的需要，鑽研制圖的同志日益增多，大家都在尋求参考讀物，而一般的参考讀物中都是而且也应該是以画法为主，对于各种画法的原理很少全面介紹．本書为了節省同志們的鑽研时間，着重闡明各种画法的数学論据，以供参考．

本書的特点：

（一）編寫順序和一般制圖教材的系統基本吻合，以便于教师和学生参考．

（二）每种画法都与数学的理論根据緊密結合，对于画法的正确性都作了証明或演算．

（三）对同一种圖形的作法編撰的材料較多．有的是搜集于他書，有的是作者的創作，有的是將既有的方法化繁为簡，以便讀者比較和选擇．

（四）各章節后均举出作法的实用示例，并附有参考圖例．

由于作者的教学經驗及实际生產斗爭的經驗都还缺乏，書中缺点或錯誤的地方，尚希指正．

編　者 1957．

目　錄

第一章　圓周的等分和正多边形

圓周的等分和作正多边形法，在制圖中应用的地方是很廣泛的．如机械圖中的法蘭盤、离合器等，日常生活中所習見的國旗上的五角星、鐘表面等，及建筑器材中的瓷磚塊、窗花圖案等，常要用到圓周的等分或作正多边形法．

§1. 正 多 边 形

(1·1) 正多边形定义

正多边形（又称正多角形）是由若干綫段首尾相連組成的平面封閉几何圖形．它必需具备两个条件：各边相等和各內角相等．

例如　矩形的各角都是 90°，但不是各边都相等；菱形的四边虽然相等，但不是各內角都相等，因此它們都不是正多边形．

(1·2) 正多边形和圓的关系

如果把圓分成 n 等分($n>2$)，則連接每相鄰两分点的 n 条弦可組成一个內接正 n 边形；切于各分点的 n 条切綫，可組成一个外切正 n 边形．反之，对于每一个正多边形，均可作其外接圓和內切圓．

例如　(I) 已知定圓 O，將圓周四等分，可作內接及外切于此圓的正四边形．

作法　(圖 1–1)

自圓心 O 作相互垂直的二直徑，AC 及 $\overline{DB}$．連 AB、BC、CD 及 DA，即得此圓的內接正四边形 $ABCD$．过 A、B、C、D 各点作圓 O 的切綫，則每

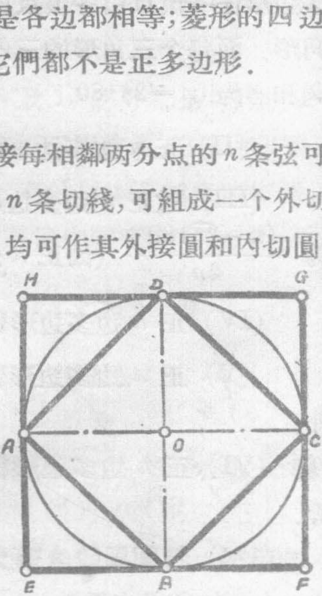


圖 1–1

两相鄰切綫分别相交于 E、F、G、H 各点，即得此圓的外切正四边形 $EFGH$.

例如 (II) 已知正三角形 ABC，可作 $\triangle ABC$ 的内切圓及外接圓.

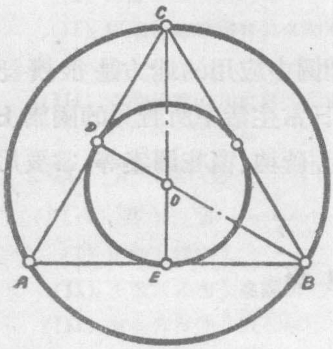


圖 1-2

作法 (圖 1-2)

分别自 $\angle B$ 及 $\angle C$ 的頂点 B 及 C 作对边的垂綫 $\overline{BD}$ 及 $\overline{CE}$ 相交于 O. 以 O 为圓心，$\overline{OE}=\overline{OD}$ 为半徑規圓，卽得 $\triangle ABC$ 的内切圓. 若以 O 为圓心，$\overline{OC}=\overline{OB}$ 为半徑規圓，卽得 $\triangle ABC$ 的外接圓.

(1·3) 正多边形的角度計算公式簡介

(I) 正 n 边多边形各内角和为：$(n-2)180°$. 因自正 n 边多边形任一頂点引各頂点的連綫，必分此正多边形为 $(n-2)$ 个三角形. 而每个三角形的三内角和为 $180°$，則 $(n-2)$ 个三角形諸内角和必为 $(n-2)180°$.

(II) 正 n 边多边形的一内角为：$\dfrac{(n-2)180°}{n}$.

(III) 过正 n 边多边形任一頂点的半徑与相鄰一边的夾角为：$\dfrac{(n-2)180°}{2n}$. (因正 n 边多边形的半徑平分頂角).

(IV) 正 n 边多边形任意一边所对的中心角为：$\dfrac{360°}{n}$.

(V) 正 n 边多边形任一内角与其任一边所对的中心角互补.

(VI) 正 n 边多边形任一外角与其任一边所对的中心角相等.

(1·4) 若圓周的 n 等分为可作，則圓周的 $n\cdot 2^m$ 等分亦为可作. (m 为 O 及自然数).

例如　(I) 圓周的三等分为可作，

則圓周的 3, →6, →12, →24.……等分亦为可作.

即 $(3\cdot2^0)$, →$(3\cdot2)$, →$(3\cdot2^2)$, →$(3\cdot2^3)$, ……$(3\cdot2^m)$ 等分亦为可作.

(II) 圓周的四等分为可作、

則圓周的 4. →8, →16, →32, ……等分亦为可作.

即 $(4\cdot2^0)$, →$(4\cdot2)$, →$(4\cdot2^2)$, →$(4\cdot2^3)$, ……$(4\cdot2^m)$ 等分亦为可作.

(III) 圓周的五等分为可作，

則圓周的 5, →10, →20, →40, ……等分亦为可作.

即 $(5\cdot2^0)$, →$(5\cdot2)$, →$(5\cdot2^2)$, →$(5\cdot2^3)$, ……$(5\cdot2^m)$ 等分亦为可作.

(IV) 圓周的十五等分为可作，

則圓周的 15, →30, →60, →120, ……等分亦为可作.

即 $(15\cdot2^0)$, →$(15\cdot2)$, →$(15\cdot2^2)$, →$(15\cdot2^3)$, ……$(15\cdot2^m)$ 等分亦为可作.

上面所列举的圓周的 3,6; 4,8; 5,10 及 15 等分都是可以正确作圖的. 其余的等分圓周的方法，有的虽可正确作圖，但作法很繁，不切实际应用，(如圓周的 17 等分法等)，有的根本不能正确作圖，制圖中常采用近似作法. 今分别在以下各節中研究之.

§2. 圓周的三，六等分 $(3\cdot2^m)$ 及正三，六边形

(2·1) 分已知圓为三等分，作內接正三边形法

作法　(圖 2–1)

过圓心 O，作任意直徑 $\overline{3a}$，以 a 为圓心，$\overline{ao}$ 为半徑規弧交圓周于 1、2 两点，連接 1 2, 2 3, 3 1, 則 △123 卽为所求正三边形.

解說　若連 $o2$, $2a$ 則 $\triangle ao2$ 为等边三角形，$\therefore \angle ao2=60°$，卽 $\overset{\frown}{a2}=60°$. 同理 $\overset{\frown}{a1}=60°$，而 $\overset{\frown}{23}=\overset{\frown}{a3}-\overset{\frown}{a2}=180°-60°=120°$. 同

理 $\overset{\frown}{13}=120°$. ∴ $\overset{\frown}{12}=\overset{\frown}{23}=\overset{\frown}{31}=120°$. 故圓周被分为三等分，則 $\triangle 123$ 为內接正三边形.

(2·2) 已知一边，作正三边形法

作法 (圖 2-2)以已知边 $\overline{ab}$ 的两端点 a, b 各为圓心，以 $\overline{ab}$ 为

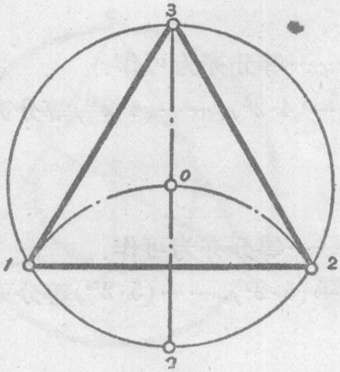


圖 2-1

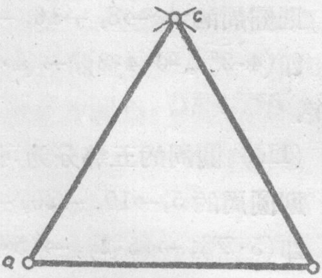


圖 2-2

半徑分別作弧，两弧相交于 c，連接 ac 及 bc，則 $\triangle abc$ 卽为所求正三边形.

解說 三边相等，三角必等，故为正三角形.

(2·3) 分已知圓为六等分，作內接正六边形法

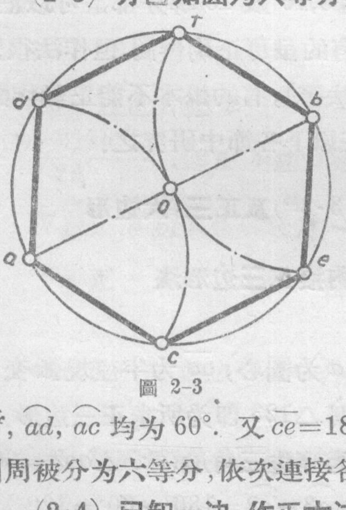


圖 2-3

作法 (圖 2-3)

过圓心 O 作任意直徑 $\overline{ab}$，以 a, b 各为圓心，以 $\overline{ao}$ 为半徑分別規弧交圓周于 c、d、e、f 各点，則 a、c、e、b、f、d 各点分圓周为六等分，依次連接各分点，則得內接正六边形 $acebfd$.

解說 若連 eo，則 $\triangle beo$ 为等边三角形，∴ $\overset{\frown}{be}=60°$. 同理 $\overset{\frown}{bf}$, $\overset{\frown}{ad}$, $\overset{\frown}{ac}$ 均为 $60°$. 又 $\overline{ce}=180°-2\times60°=60°$，同理 $\overset{\frown}{df}=60°$，故圓周被分为六等分，依次連接各分点．卽得所求正六边形.

(2·4) 已知一边，作正六边形法

作法　(圖 2-4)

以已知边 $\overline{ab}$ 的两端 a, b 各为圓心，以 $\overline{ab}$ 为半徑分别規 ac 及 bd 弧，两弧相交于 o，連接 ao 及 bo 并適当延長之，再以 o 为圓心，以 $\overline{ao}$ 为半徑，規圓与上述两延長綫交于 e, f 点；与 $\overset{\frown}{ac}$ 及 $\overset{\frown}{bd}$ 分别交于 c 及 d 点，依次連接各分点，卽得所求正六边形.

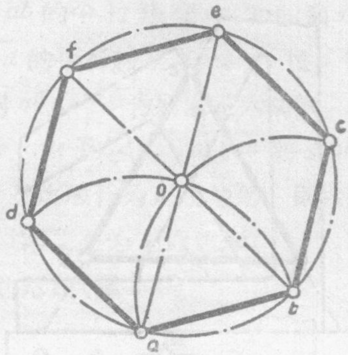


圖 2-4

解說　若連 oc，則 $\triangle obc$ 及 $\triangle oab$ 均为正三边形，$\therefore \overset{\frown}{ab}=\overset{\frown}{bc}=60°$，那末 $\overset{\frown}{ce}=\overset{\frown}{ae}-(\overset{\frown}{ab}+\overset{\frown}{bc})=60°$. 同理可証得 $\overset{\frown}{ad}=\overset{\frown}{df}=\overset{\frown}{fe}=60°$，故輔助圓周被六等分，依次連接各分点，卽得所求正六边形.

(2·5) 用 30°—60° 三角板分圓周为三，六等分和作正三，六边形法

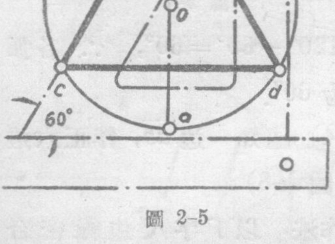


圖 2-5

(1) 已知圓 O，作內接正三边形法(圖 2-5)

作法　先在已知圓外平置丁字尺，过圓心 O，用 30°—60° 三角板作直徑 $\overline{ab}$ 垂直于丁字尺边緣. 平移三角板使斜边过 b 点，作 bc 弦. 翻轉三角板，使斜边过 b 点，作 bd 弦. 連接 cd，則 $\triangle bcd$ 为圓的內接正三边形.

解說　$\because \angle abc=\angle abd=30°$，則 $\overset{\frown}{ac}=\overset{\frown}{ad}=60°$，故 $\overset{\frown}{bc}=\overset{\frown}{bd}=120°$. 所以，圓周被三等分.

(2) 已知一边 $\overline{ab}$，作正三边形法(圖 2-6)

作法　使丁字尺边緣平行于已知边 $\overline{ab}$. 使 30°—60° 三角板

斜边密合丁字尺，較短直角边过点 a 画直綫．然后轉移三角板如圖，使斜边过点 b 画直綫，两直綫相交于点 c，則 $\triangle abc$ 为所求正三边形．

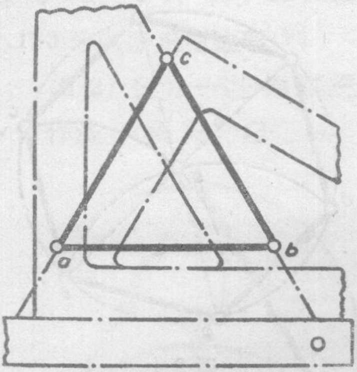


圖 2-6

解說 各内角均为 60°，故为等边三角形．

(3) 已知圓 O，作内接正六边形法(圖 2-7)

作法 过圓心 O 作直徑 $\overline{ab}$ 垂直丁字尺边緣．將三角板一直角边与丁字尺边緣密合．然后平移三角板使斜边分别过 a, o, b 三点画相平行直綫，則各平行直綫分别交圓周于 e, c, d 及 f 各点．連接 ec, cb, fd, da 則得所求内接正六边形．

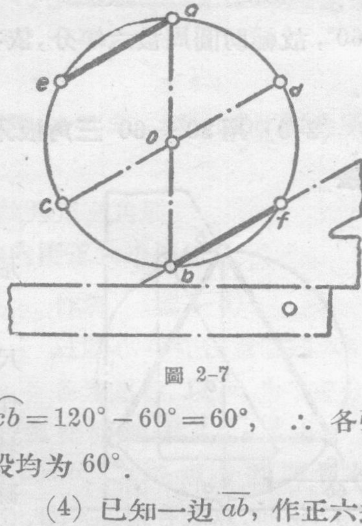


圖 2-7

解說 $\overset{\frown}{ad}=\overset{\frown}{cb}=60°$，又 $\angle eao=\angle aod=60°$，(内錯角相等)．$\therefore\ \overset{\frown}{eb}=120°$．而 $\overset{\frown}{ec}=\overset{\frown}{eb}-\overset{\frown}{cb}=120°-60°=60°$，$\therefore$ 各弧段均为 60°．

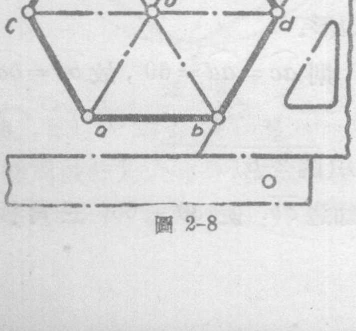


圖 2-8

(4) 已知一边 $\overline{ab}$，作正六边形法(圖 2-8)

作法 以丁字尺边緣密合(或平行)于 $\overline{ab}$，用三角板的較短直角边与丁字尺边緣密合，使斜边过 a 及 b 画綫 ae 及 bd．翻轉三角板同法画綫 ac 及 bf，ac 及

bf 相交于 O，平移丁字尺过 O 点画 $\overline{ab}$ 的平行綫交 ac 于 c，交 bd 于 d. 再使三角板之斜边过 c，作 $\overline{bd}$ 的平行綫交 bf 于 f，过 d 作 $\overline{ac}$ 的平行綫交 ae 于 e，連接 ef，則 $ab\,de\,fc$ 为所求正六边形.

解說 顯然 $\triangle oab$ 为正三边形. 由于 $\overline{bd} \parallel \overline{ao}$，$\overline{od} \parallel \overline{ab}$ 則 $\triangle bod$ 亦为正三边形. 同理可証得其余諸三边形皆为正三边形. 則六边形 $ab\,de\,fc$ 各边相等，各內角均为 $120°$，必为正六边形.

(5) 已知圓 O，作內接正十二边形法(圖 2-9)

作法 过圓心 O，作互垂二直徑 $\overline{ab}$ 及 $\overline{cd}$，將丁字尺边緣平行于 $\overline{cd}$ 置于圓外，使 $30°$—$60°$ 三角板的較長直角边密合于丁字尺，使其斜边过 O 点画直綫交圓周于 e, f，翻轉三角板同法作得 g, h. 然后再使較短直角边密合于丁字尺边緣，使其斜边过 O 点画直綫交圓周于 j, k，又翻轉三角板同法作得 m, n. 則圓上的各点分圓为 12 等分.

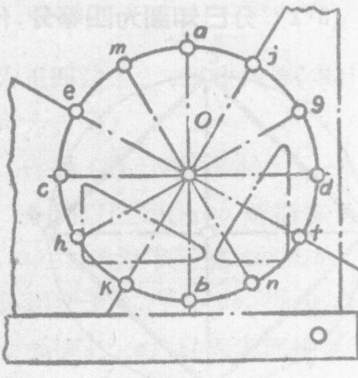


圖 2-9

解說 因为丁字尺边緣平行于 $\overline{cd}$，則 $\overset{\frown}{gd} = 30°$，$\overset{\frown}{jd} = 60°$，而 $\overset{\frown}{jg} = 60° - 30° = 30°$. $\overset{\frown}{aj} = 90° - 60° = 30°$. 同理可証得其余各弧段均为 $30°$，故圓被分为 12 等分.

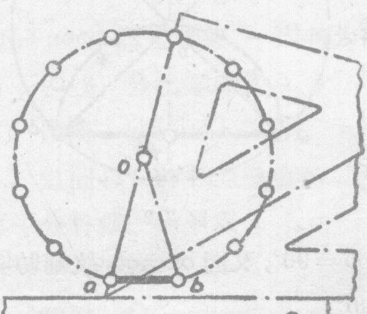


圖 2-10

(6) 已知一边，作正十二边形法(圖 2-10)

作法 分別自已知边的两端 a, b 画与 $\overline{ab}$ 夾角为 $75°$ 的直綫(作 $75°$ 夾角可利用 $45°$ 及 $30°$ 三角板拼合而得)，此二直綫相交于 O，以 O 为圓心 $\overline{ao} = \overline{bo}$ 为半徑