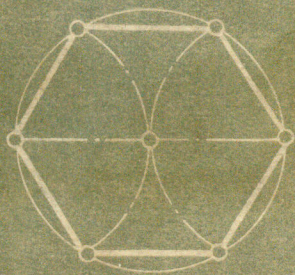


姜康甫 吉 星 編著

几何画的原理和作法



科学 技术 出 版 社

統一書號：13119 · 91

定價：1.20 元

几何画的原理和作法

姜康甫 吉 星 編著

科学技術出版社

內 容 提 要

本書就平面几何画的作法和原理作了比較全面的介紹，并着重說明各种画法的数学論証，以补一般書籍只重画法不談原理的缺点。

本書在編寫順序上基本和一般教材一致，可以供制圖教师及学生作参考。

几何画的原理和作法

編著者 姜康甫 吉 星

*

科学技術出版社出版

(上海南京西路2004号)

上海市書刊出版業營業許可証出 079 号

中科藝文聯合厂印刷 新華書店上海發行所总經售

*

統一書号: 13119·91

开本 787×1092 精 1/27 · 印張 8 2/9 · 字數 168,000

1957 年 9 月第 1 版

1957 年 9 月第 1 次印刷 · 印數 1—8,200

定价: (10)1.20 元

編 者 的 話

随着祖國社会主义建設的需要,鑽研制圖的同志日益增多,大家都在尋求参考讀物,而一般的参考讀物中都是而且也應該是以画法为主,对于各种画法的原理很少全面介紹。本書为了節省同志們的鑽研時間,着重闡明各种画法的数学論据,以供参考。

本書的特点:

(一) 編寫順序和一般制圖教材的系統基本吻合,以便于教师和学生参考。

(二) 每种画法都与数学的理論根据緊密結合,对于画法的正确性都作了証明或演算。

(三) 对同一种圖形的作法編撰的材料較多。有的是搜集于他書,有的是作者的創作,有的是將既有的方法化繁为簡,以便讀者比較和選擇。

(四) 各章節后均举出作法的实用示例,并附有参考圖例。

由于作者的教学經驗及实际生產斗争的經驗都还缺乏,書中缺点或錯誤的地方,尚希指正。

編 者 1957.

目 錄

編者的話.....	1
目錄.....	1
第一章 圓周的等分和正多边形.....	1
§ 1. 正多边形	1
(1.1) 正多边形定义.....	1
(1.2) 正多边形和圓的关系.....	1
(1.3) 正多邊形的角度計算 公式簡介.....	2
(1.4) 若圓周的 n 等分为可 作,則圓周的 $n \cdot 2^m$ 等 分亦为可作.....	2
§ 2. 圓周的三, 六等分($3 \cdot 2^m$)及正三, 六边形.....	3
(2.1) 分已知圓为三等分, 作內接正三边形法.....	3
(2.2) 已知一边,作正三边 形法.....	4
(2.3) 分已知圓为六等分, 作內接正六边形法.....	4
(2.4) 已知一边, 作正六边 形法.....	4
(2.5) 用 $30^\circ - 60^\circ$ 三角板分 圓周为三, 六等分和 作正三, 六边形法.....	5
§ 3. 圓周的四, 八等分($4 \cdot 2^m$)及正四, 八边形.....	8
(3.1) 分已知圓为四等分, 作內接正四边形法.....	8
(3.2) 已知一边,作正四边 形法.....	8
(3.3) 分已知圓为八等分, 作內接正八边形法.....	9
(3.4) 已知一边, 作正八边 形法.....	10
(3.5) 用 45° 三角板分圓周 为四, 八等分和作正 四, 八边形法.....	11
§ 4. 圓周的五, 十等分($5 \cdot 2^m$)及正五, 十边形.....	13
(4.1) 分已知圓为十等分, 作內接正十边形法.....	13
(4.2) 分已知圓为五等分, 作內接正五边形法.....	15
(4.3) 已知一边,作正十边 形法.....	16

(4.4) 已知一边,作正五边形法	17
§ 5. 圓周的十五等分($15 \cdot 2^m$)及正十五边形	18
(5.1) 分已知圓为十五等分,作內接正十五边形法	18
(5.2) 已知一边,作正十五边形法	19
§ 6. 近似等分圓周,作正多边形	20
(6.1) 分已知圓为七等分,作內接正七边形法	20
(6.2) 分已知圓为九等分,作內接正九边形法	21
(6.3) 作內接于定圓的近似正 n 边形法	22
(6.4) 已知一边,作近似正 n 边形法	29
(6.5) 近似 n 等分半圓法	30
(6.6) 正 n 边形查表作圖法	32
表 I. 已知半徑(R)求边長用表	33
表 II. 已知边長(a)求半徑用表	33
§ 7. 等分圓周和作正多边形的实用示例	34
附等分圓周圖例	36
第二章 綫的连接	38
§ 8. 綫连接的几何性質	38
§ 9. 用直綫连接圓弧	39
(9.1) 过圓周上定点作切綫法	39
(9.2) 过圓外定点作圓的切綫法	39
§ 10. 用圓弧连接直綫	41
(10.1) 用定長半徑作弧,切定直綫于定点法	41
(10.2) 过定直綫外定点作弧,切定直綫法	42
(10.3) 过定直綫外兩定点作弧,切定直綫法	42
§ 11. 用直綫连接兩圓弧	43
(11.1) 作二定圓的外公切綫法	43
(11.2) 作二定圓的內公切綫法	44
§ 12. 用圓弧连接兩直綫	44
(12.1) 用圓弧连接二平行直綫法	44
(12.2) 用圓弧连接二相交直綫法	45
§ 13. 用圓弧连接圓弧与直綫	49
(13.1) 外連接法	49
(13.2) 內連接法	50

§ 14. 用圆弧连接两圆弧.....	52
(14.1) 外连接法.....	53
(14.2) 内连接法.....	54
(14.3) 混合连接法.....	56
§ 15. 线连接的实用示例.....	59
附线的连接图例.....	63
第三章 比例、斜率和锥度	68
§ 16. 比例.....	68
(16.1) 两三角形相似的条件.....	68
(16.2) 两多边形相似的条件.....	68
(16.3) 比例的规格.....	68
§ 17. 图形的放大和缩小.....	70
(17.1) 三棱尺(比例尺)的应用.....	70
(17.2) 比例规的应用.....	71
(17.3) 角比例尺的应用.....	72
(17.4) 相似法作图的应用.....	75
(17.5) 坐标法的应用.....	77
§ 18. 分数比例尺.....	78
§ 19. 斜率.....	79
(19.1) 斜率的意义.....	79
(19.2) 如何确定一直线的斜率.....	80
(19.3) 如何作定斜率的直线.....	80
(19.4) 斜率的表示法.....	81
(19.5) 斜率的应用示例.....	82
§ 20. 锥度.....	84
(20.1) 锥度的意义.....	84
(20.2) 锥度与斜率的关系.....	84
(20.3) 锥度的作法.....	85
(20.4) 锥度的表示法.....	85
附斜率图例.....	86
第四章 曲线	88
§ 21. 描迹.....	88
§ 22. 放直圆周.....	90
§ 23. 改圆弧为直线和改直线为圆弧.....	93
§ 24. 不同半径的两弧的互换.....	96
§ 25. 圆锥曲线.....	97
§ 26. 椭圆.....	98
(26.1) 椭圆定义.....	98
(26.2) 椭圆的形成及其理由.....	99

(26.3) 橢圓方程	101	(I) 如何找長短軸及焦點	106
(26.4) 橢圓的幾何性質	102	(II) 如何作橢圓的切綫	108
(26.5) 橢圓作圖	106	(III) 橢圓的作法	110
§ 27. 近似橢圓	119		
(27.1) 扁圓	119	(27.2) 卵圓	124
§ 28. 橢圓、扁圓、卵圓實用示例	126		
附橢圓、扁圓、卵圓圖例	130		
§ 29. 拋物綫	132		
(29.1) 拋物綫定義	132	(I) 已知拋物綫, 如何找主軸、 焦點、頂點及准綫	139
(29.2) 拋物綫的形成及其理 由	132	(II) 如何作拋物綫的切綫	140
(29.3) 拋物綫方程	139	(III) 拋物綫的作法	142
(29.4) 拋物綫的幾何性質	135	(29.6) 拋物綫實用示例	148
(29.5) 拋物綫作圖	139	附拋物綫圖例	150
§ 30. 雙曲綫	151		
(30.1) 雙曲綫定義	151	(I) 已知雙曲綫如何找中心、 主軸、頂點、共軛軸、焦點 及漸近綫	158
(30.2) 雙曲綫的形成及其理 由	151	(II) 如何作雙曲綫的切綫	162
(30.3) 雙曲綫方程	153	(III) 雙曲綫的作法	164
(30.4) 雙曲綫的幾何性質	153		
(30.5) 雙曲綫作圖	158		
§ 31. 擺綫	170		
(31.1) 基本性質	170	(I) 普通擺綫的作法	174
(I) 擺綫定義	170	(II) 外擺綫的作法	176
(II) 擺綫有關名詞簡介	170	(III) 內擺綫的作法	178
(III) 擺綫的種類	171	(IV) 作擺綫的切綫法	179
(IV) 有關作圖的幾點幾何性質	171	(V) 擺綫的近似作法	181
(31.2) 擺綫作圖	174	(31.3) 擺綫實用示例	184
§ 32. 漸伸綫	185		
(32.1) 基本性質	185	(III) 漸伸綫的種類	187
(I) 漸伸綫定義	185	(IV) 有關作圖的幾點幾何性質	187
(II) 漸伸綫有關名詞簡介	186	(32.2) 漸伸綫作圖	189

(I) 漸伸綫的作法	189	(32.3) 漸伸綫的实用示例 ...	193
(II) 作漸伸綫的切綫法	192		
§ 33. 阿基米德螺綫	195		
(33.1) 本基性質	195	(33.2) 阿基米德螺綫作圖 ...	200
(I) 阿基米德螺綫定义	195	(I) 阿基米德螺綫作法	200
(II) 阿基米德螺綫有关名詞簡介	196	(II) 作阿基米德螺綫的切綫法 ..	202
(III) 有关作圖的几点阿基米德螺綫的几何性質	197	(33.3) 阿基米德螺綫实用示例	203
§ 34. 正弦曲綫	205		
(34.1) 基本性質	205	(I) 正弦曲綫的作法	210
(I) 正弦曲綫定义	205	(II) 作正弦曲綫的切綫法	212
(II) 正弦曲綫有关名詞簡介 ...	206	(34.3) 正弦曲綫实用示例 ...	213
(III) 有关作圖的几点几何性質 ..	207	附正弦曲綫圖例	214
(34.2) 正弦曲綫作圖	210		

第一章 圓周的等分和正多边形

圓周的等分和作正多边形法,在制圖中应用的地方是很廣泛的。如机械圖中的法蘭盤、离合器等,日常生活中所習見的國旗上的五角星、鐘表面等,及建筑器材中的瓷磚塊、窗花圖案等,常要用到圓周的等分或作正多边形法。

§1. 正多边形

(1.1) 正多边形定义

正多边形(又称正多角形)是由若干綫段首尾相連組成的平面封閉几何圖形。它必需具备两个条件:各边相等和各內角相等。

例如 矩形的各角都是 90° ,但不是各边都相等;菱形的四边虽然相等,但不是各內角都相等,因此它們都不是正多边形。

(1.2) 正多边形和圓的关系

如果把圓分成 n 等分($n > 2$),則連接每相鄰两分点的 n 条弦可組成一个內接正 n 边形;切于各分点的 n 条切綫,可組成一个外切正 n 边形。反之,对于每一个正多边形,均可作其外接圓和內切圓。

例如 (I) 已知定圓 O ,將圓周四等分,可作內接及外切于此圓的正四边形。

作法 (圖 1-1)

自圓心 O 作相互垂直的二直徑, AC 及 $\overline{DB}$ 。連 AB 、 BC 、 CD 及 DA ,即得此圓的內接正四边形 $ABCD$ 。过 A 、 B 、 C 、 D 各点作圓 O 的切綫,則每

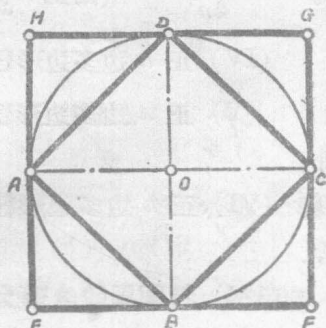


圖 1-1

两相鄰切綫分別相交于 E, F, G, H 各点, 即得此圓的外切正四边 形 $EFGH$.

例如 (II) 已知正三角形 ABC , 可作 $\triangle ABC$ 的內切圓及 外接圓.

作法 (圖 1-2)

分別自 $\angle B$ 及 $\angle C$ 的頂点 B 及 C 作对边的垂綫 $\overline{BD}$ 及 $\overline{CE}$ 相交 于 O . 以 O 为圓心, $\overline{OE} = \overline{OD}$ 为半 徑規圓, 即得 $\triangle ABC$ 的內切圓. 若 以 O 为圓心, $\overline{OC} = \overline{OB}$ 为半徑規 圓, 即得 $\triangle ABC$ 的外接圓.

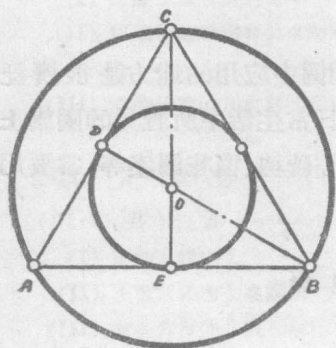


圖 1-2

式簡介

(I) 正 n 边多边形各內角和为: $(n-2)180^\circ$. 因自正 n 边 多边形任一頂点引各頂点的連綫, 必分此正多边形为 $(n-2)$ 个三 角形. 而每个三角形的三內角和为 180° , 則 $(n-2)$ 个三角形諸內 角和必为 $(n-2)180^\circ$.

(II) 正 n 边多边形的一內角为: $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$.

(III) 过正 n 边多边形任一頂点的半徑与相鄰一边的夾角 为: $\frac{(n-2)180^\circ}{2n}$. (因正 n 边多边形的半徑平分頂角).

(IV) 正 n 边多边形任意一边所对的中心角为: $\frac{360^\circ}{n}$.

(V) 正 n 边多边形任一內角与其任一边所对的中心角互 补.

(VI) 正 n 边多边形任一外角与其任一边所对的中心角相 等.

(1.4) 若圓周的 n 等分为可作, 則圓周的 $n \cdot 2^m$ 等分亦为可 作. (m 为 0 及自然数).

例如 (I) 圓周的三等分为可作,

則圓周的 $3, \rightarrow 6, \rightarrow 12, \rightarrow 24, \dots$ 等分亦为可作.

即 $(3 \cdot 2^0), \rightarrow (3 \cdot 2), \rightarrow (3 \cdot 2^2), \rightarrow (3 \cdot 2^3), \dots (3 \cdot 2^m)$ 等分亦为可作.

(II) 圓周的四等分为可作,

則圓周的 $4, \rightarrow 8, \rightarrow 16, \rightarrow 32, \dots$ 等分亦为可作.

即 $(4 \cdot 2^0), \rightarrow (4 \cdot 2), \rightarrow (4 \cdot 2^2), \rightarrow (4 \cdot 2^3), \dots (4 \cdot 2^m)$ 等分亦为可作.

(III) 圓周的五等分为可作,

則圓周的 $5, \rightarrow 10, \rightarrow 20, \rightarrow 40, \dots$ 等分亦为可作.

即 $(5 \cdot 2^0), \rightarrow (5 \cdot 2), \rightarrow (5 \cdot 2^2), \rightarrow (5 \cdot 2^3), \dots (5 \cdot 2^m)$ 等分亦为可作.

(IV) 圓周的十五等分为可作,

則圓周的 $15, \rightarrow 30, \rightarrow 60, \rightarrow 120, \dots$ 等分亦为可作.

即 $(15 \cdot 2^0), \rightarrow (15 \cdot 2), \rightarrow (15 \cdot 2^2), \rightarrow (15 \cdot 2^3), \dots (15 \cdot 2^m)$ 等分亦为可作.

上面所列举的圓周的 $3, 6; 4, 8; 5, 10$ 及 15 等分都是可以正确作圖的. 其余的等分圓周的方法, 有的虽可正确作圖, 但作法很繁, 不切实际应用, (如圓周的 17 等分法等), 有的根本不能正确作圖, 制圖中常采用近似作法. 今分別在以下各節中研究之.

§ 2. 圓周的三, 六等分 $(3 \cdot 2^m)$ 及正三, 六边形

(2.1) 分已知圓为三等分, 作內接正三边形法

作法 (圖 2-1)

过圓心 O , 作任意直徑 $\overline{3a}$, 以 a 为圓心, $\overline{ao}$ 为半徑規弧交圓周于 $1, 2$ 两点, 連接 $1, 2, 2, 3, 3, 1$, 則 $\triangle 123$ 即为所求正三边形.

解說 若連 $o2, 2a$ 則 $\triangle a o 2$ 为等边三角形, $\therefore \angle a o 2 = 60^\circ$, 即 $\widehat{a2} = 60^\circ$. 同理 $\widehat{a1} = 60^\circ$, 而 $\widehat{23} = \widehat{a3} - \widehat{a2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. 同

理 $\widehat{13} = 120^\circ$. $\therefore \widehat{12} = \widehat{23} = \widehat{31} = 120^\circ$. 故圆周被分为三等分, 则 $\triangle 123$ 为内接正三角形.

(2.2) 已知一边, 作正三角形法

作法 (圖 2-2) 以已知边 $\overline{ab}$ 的两端点 a, b 各为圆心, 以 $\overline{ab}$ 为

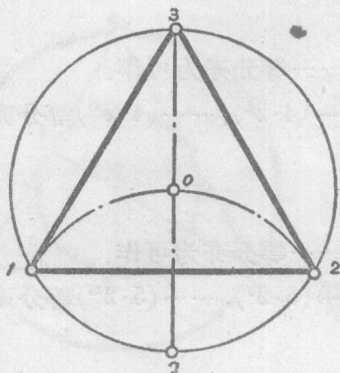


圖 2-1

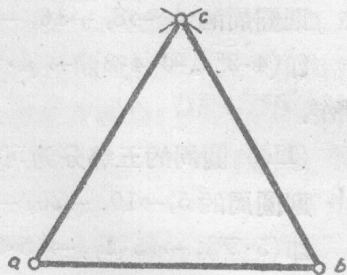


圖 2-2

半徑分別作弧, 兩弧相交于 c , 連接 ac 及 bc , 則 $\triangle abc$ 即为所求正三角形.

解說 三边相等, 三角必等, 故为正三角形.

(2.3) 分已知圓为六等分, 作內接正六边形法

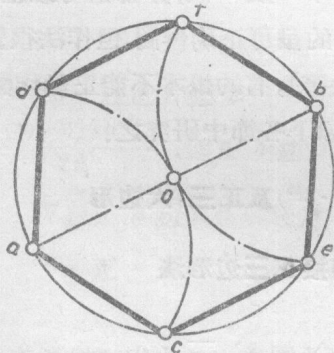


圖 2-3

作法 (圖 2-3)

过圆心 O 作任意直径 $\overline{ab}$, 以 a, b 各为圆心, 以 $\overline{ao}$ 为半径分别規弧交圓周于 c, d, e, f 各点, 則 a, c, e, b, f, d 各点分圓周为六等分, 依次連接各分点, 則得內接正六边形 $acebfd$.

解說 若連 eo , 則 $\triangle beo$ 为等边三角形, $\therefore \widehat{be} = 60^\circ$. 同理

$\widehat{bf}, \widehat{ad}, \widehat{ac}$ 均为 60° . 又 $\widehat{ce} = 180^\circ - 2 \times 60^\circ = 60^\circ$, 同理 $\widehat{df} = 60^\circ$, 故圓周被分为六等分, 依次連接各分点. 即得所求正六边形.

(2.4) 已知一边, 作正六边形法

作法 (圖 2-4)

以已知邊 $\overline{ab}$ 的兩端 a, b 各為圓心, 以 $\overline{ab}$ 為半徑分別規 ac 及 bd 弧, 兩弧相交於 o , 連接 ao 及 bo 并適當延長之, 再以 o 為圓心, 以 $\overline{ao}$ 為半徑, 規圓與上述兩延長綫交於 e, f 點; 與 $\widehat{ac}$ 及 $\widehat{bd}$ 分別交於 c 及 d 點, 依次連接各分點, 即得所求正六边形。

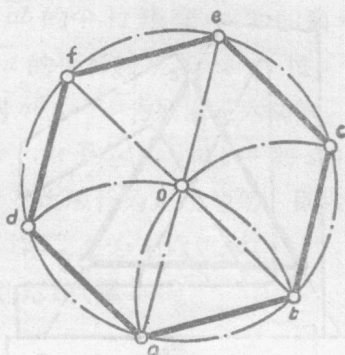


圖 2-4

解說 若連 oc , 則 $\triangle obc$ 及 $\triangle oab$ 均為正三角形, $\therefore \widehat{ab} = \widehat{bc} = 60^\circ$, 那末 $\widehat{ce} = \widehat{ae} - (\widehat{ab} + \widehat{bc}) = 60^\circ$. 同理可証得 $\widehat{ad} = \widehat{df} = \widehat{fe} = 60^\circ$, 故輔助圓周被六等分, 依次連接各分點, 即得所求正六边形。

(2.5) 用 $30^\circ-60^\circ$ 三角板分圓周為三, 六等分和作正三, 六边形法

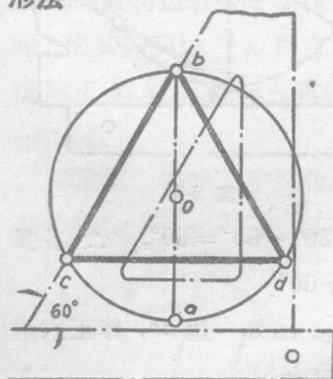


圖 2-5

(1) 已知圓 O , 作內接正三角形法(圖 2-5)

作法 先在已知圓外平置丁字尺, 過圓心 O , 用 $30^\circ-60^\circ$ 三角板作直徑 $\overline{ab}$ 垂直于丁字尺邊緣. 平移三角板使斜邊過 b 點, 作 bc 弦. 翻轉三角板, 使斜邊過 b 點, 作 bd 弦. 連接 cd , 則 $\triangle bcd$ 為圓的內接正三角形。

解說 $\because \angle abc = \angle abd = 30^\circ$, 則 $\widehat{ac} = \widehat{ad} = 60^\circ$, 故 $\widehat{bc} = \widehat{bd} = 120^\circ$. 所以, 圓周被三等分。

(2) 已知一邊 $\overline{ab}$, 作正三角形法(圖 2-6)

作法 使丁字尺邊緣平行于已知邊 $\overline{ab}$. 使 $30^\circ-60^\circ$ 三角板

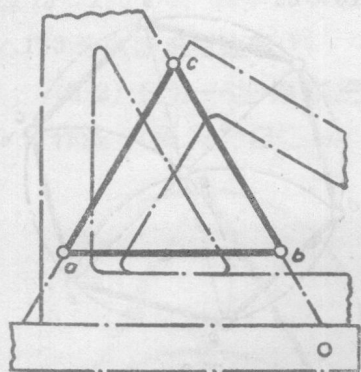


圖 2-6

斜边密合丁字尺，較短直角边过点 a 画直綫。然后轉移三角板如圖，使斜边过点 b 画直綫，两直綫相交于点 c ，則 $\triangle abc$ 为所求正三角形。

解說 各内角均为 60° ，故为等边三角形。

(3) 已知圓 O ，作内接正六边形法(圖 2-7)

作法 过圓心 O 作直徑 $\overline{ab}$

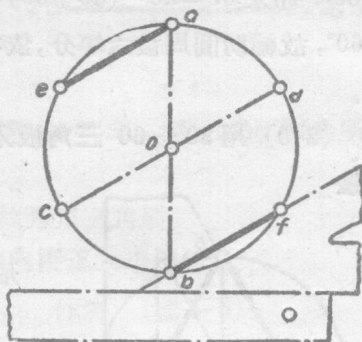


圖 2-7

垂直丁字尺邊緣。將三角板一直角边与丁字尺邊緣密合。然后平移三角板使斜边分別过 a, o, b 三点画相平行直綫，則各平行直綫分別交圓周于 e, c, d 及 f 各点。連接 ec, cb, fd, da 則得所求内接正六边形。

解說 $\widehat{ad} = \widehat{cb} = 60^\circ$ ，又 $\angle eao = \angle aod = 60^\circ$ ，(內錯角相等)， $\therefore \widehat{eb} = 120^\circ$ 。而 $\widehat{ec} = \widehat{eb} - \widehat{cb} = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ ， $\therefore$ 各弧段均为 60° 。

段均为 60° 。

(4) 已知一边 $\overline{ab}$ ，作正六边形法(圖 2-8)

作法 以丁字尺邊緣密合(或平行)于 $\overline{ab}$ ，用三角板的較短直角边与丁字尺邊緣密合，使斜边过 a 及 b 画綫 ae 及 bd 。翻轉三角板同法画綫 ac 及 bf ， ac 及

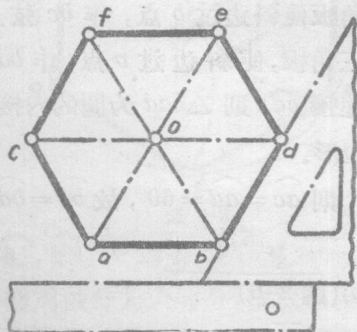


圖 2-8

bf 相交于 O , 平移丁字尺过 O 点画 $\overline{ab}$ 的平行綫交 ac 于 c , 交 bd 于 d . 再使三角板之斜边过 c , 作 $\overline{bd}$ 的平行綫交 bf 于 f , 过 d 作 $\overline{ac}$ 的平行綫交 ae 于 e , 连接 ef , 則 $abdefc$ 为所求正六边形.

解說 顯然 $\triangle oab$ 为正三边形. 由于 $\overline{bd} \parallel \overline{ao}$, $\overline{od} \parallel \overline{ab}$ 則 $\triangle bod$ 亦为正三边形. 同理可証得其余諸三边形皆为正三边形. 則六边形 $abdefc$ 各边相等, 各内角均为 120° , 必为正六边形.

(5) 已知圓 O , 作內接正十二边形法(圖 2-9)

作法 过圓心 O , 作互垂二直徑 $\overline{ab}$ 及 $\overline{cd}$, 將丁字尺邊緣平行于 $\overline{cd}$ 置于圓外, 使 $30^\circ-60^\circ$ 三角板的較長直角边密合于丁字尺, 使其斜边过 O 点画直綫交圓周于 e, f , 翻轉三角板同法作得 g, h . 然后再使較短直角边密合于丁字尺邊緣, 使其斜边过 O 点画直綫交圓周于 j, k , 又翻轉三角板同法作得 m, n . 則圓上的各点分圓为 12 等分.

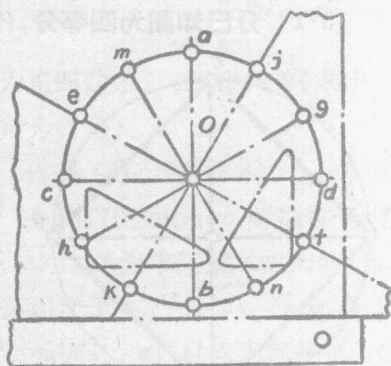


圖 2-9

解說 因为丁字尺邊緣平行于 $\overline{cd}$, 則 $\widehat{gd} = 30^\circ$, $\widehat{jd} = 60^\circ$, 而 $\widehat{jg} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$. $\widehat{aj} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. 同理可証得其余各弧段均为 30° , 故圓被分为 12 等分.

(6) 已知一边, 作正十二边形法(圖 2-10)

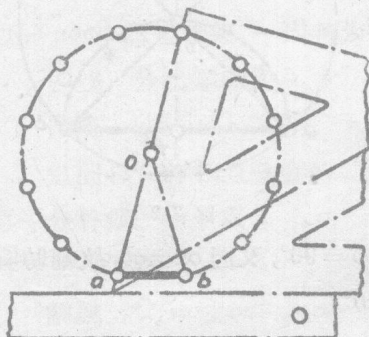


圖 2-10

作法 分別自已知边的两端 a, b 画与 $\overline{ab}$ 夾角为 75° 的直綫 (作 75° 夾角可利用 45° 及 30° 三角板拼合而得), 此二直綫相交于 O , 以 O 为圓心 $\overline{ao} = \overline{bo}$ 为半径