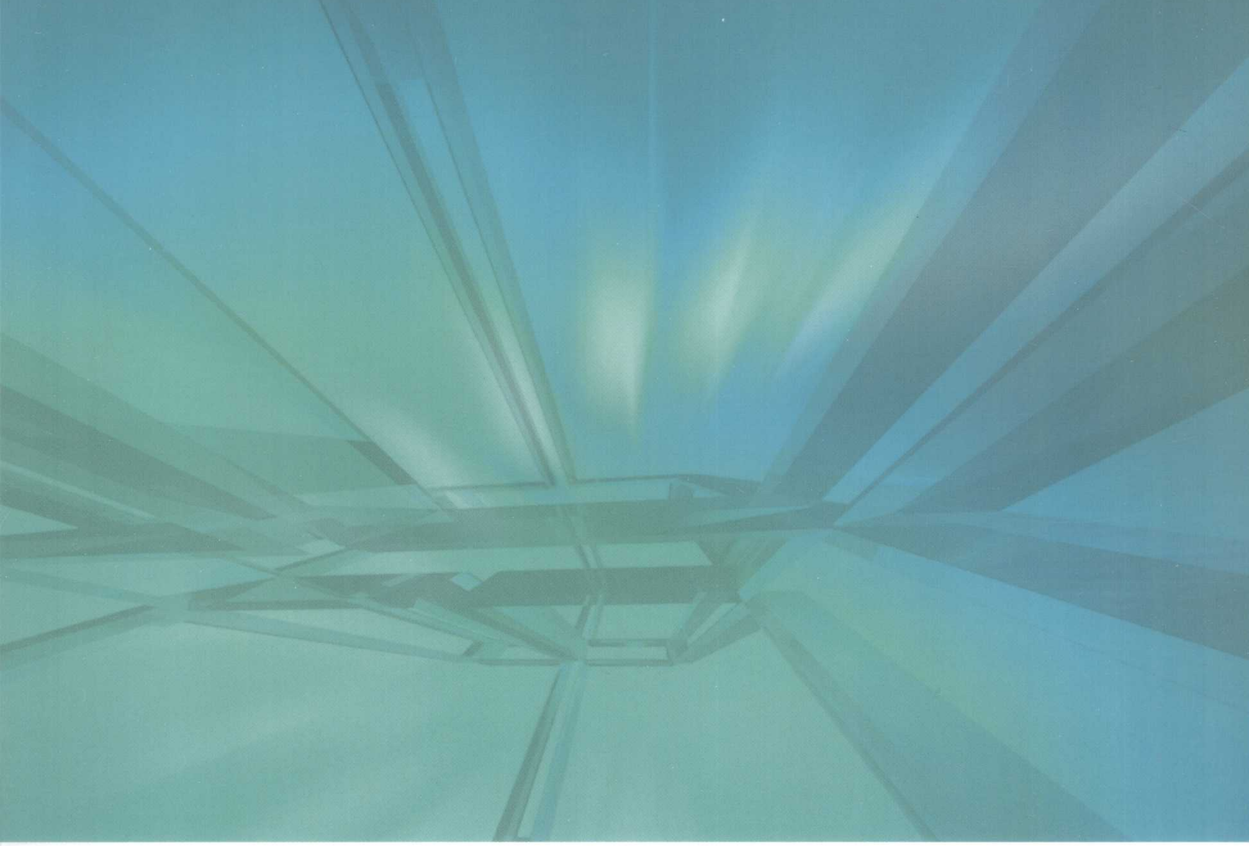
国家工科数学课程教学基地建设教材



高等数学(下册)

◎ 华南理工大学数学系
◎ 主编　王全迪　郭艾　杨立洪

高等教育出版社
Higher Education Press

国家工科数学课程教学基地建设教材

高等数学

（下册）

华南理工大学数学系
主编　王全迪　郭　艾　杨立洪
主审　陈凤平

高等教育出版社

内容提要

本书为华南理工大学数学系及其国家级工科数学课程教学基地为适应教学改革的新形势，在丰富的教学实践和研究国内外多种教材的基础上，优化教学内容，为理工科本科学生编写的《高等数学》教材。

本书概念准确，理论严谨，突出数学思想方法，既有分析论证，也讲方法技巧；力求启迪学生的创新思维，着力于数学素质与能力的培养；同时注意与中学教材的衔接，切合教学实际。

本书共分上、下两册。下册内容包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程、无穷级数，书后附有习题答案与提示。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/王全迪，郭艾，杨立洪主编．—北京：高等教育出版社，2009.7

ISBN 978-7-04-026643-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…②郭…③杨…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 087957 号

策划编辑　王　强　　**责任编辑**　张耀明　　**封面设计**　于文燕
责任绘图　尹文军　　**版式设计**　王艳红　　**责任校对**　姜国萍
责任印制　毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009 年 7 月第 1 版
印　　张	21.25	印　　次	2009 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	400 000	定　　价	23.00 元

物料号　26643-00

目　　录

第七章　多元函数微分学 …… (1)

第一节　多元函数 …… (1)

一、平面点集 …… (1)

二、多元函数的概念 …… (3)

三、多元函数的极限 …… (6)

四、多元函数的连续性 …… (8)

习题 7-1 …… (9)

第二节　偏导数 …… (10)

一、偏导数的定义及其计算方法 …… (10)

二、高阶偏导数 …… (14)

习题 7-2 …… (17)

第三节　全微分及其应用 …… (18)

一、全微分定义 …… (19)

二、全微分存在的条件 …… (20)

*三、全微分在近似计算中的应用 …… (25)

习题 7-3 …… (26)

第四节　多元复合函数的求导法则 …… (27)

一、多元复合函数求导的链式法则 …… (27)

二、复合函数的高阶偏导数 …… (32)

三、一阶全微分形式的不变性 …… (33)

习题 7-4 …… (35)

第五节　隐函数求导法 …… (36)

一、一个方程的情形 …… (36)

二、方程组的情形 …… (39)

习题 7-5 …… (42)

第六节　方向导数与梯度 …… (44)

一、方向导数 …… (44)

二、梯度 …… (47)

习题 7-6 …… (50)

第七节　偏导数的几何应用 …… (51)
一、空间曲线的切线与法平面 …… (51)
二、曲面的切平面与法线 …… (55)
习题 7-7 …… (59)
第八节　多元函数的极值 …… (60)
一、多元函数的极值 …… (61)
二、条件极值、拉格朗日乘数法 …… (64)
三、有界闭区域上函数的最值 …… (69)
习题 7-8 …… (72)
第九节　二元函数的泰勒公式 …… (73)
一、二元函数的泰勒公式 …… (73)
二、极值充分条件的说明 …… (76)
习题 7-9 …… (77)
总练习题七 …… (77)

第八章　重积分 …… (79)
第一节　二重积分的概念与性质 …… (79)
一、引例 …… (79)
二、二重积分的定义 …… (81)
三、二重积分的性质 …… (83)
习题 8-1 …… (84)
第二节　二重积分的计算 …… (85)
一、在直角坐标系下计算二重积分 …… (85)
二、在极坐标系下计算二重积分 …… (94)
三、二重积分的换元法 …… (98)
习题 8-2 …… (100)
第三节　三重积分的概念与计算 …… (102)
一、三重积分的概念 …… (102)
二、在直角坐标系下计算三重积分 …… (103)
三、在柱面坐标系下计算三重积分 …… (108)
四、在球面坐标系下计算三重积分 …… (113)
五、三重积分的换元法 …… (116)
习题 8-3 …… (117)
第四节　重积分的应用 …… (119)
一、曲面面积的计算 …… (119)

二、重积分的统一定义 …… (122)
三、重积分的物理应用 …… (122)
习题 8-4 …… (127)
总练习题八 …… (128)

第九章 曲线积分与曲面积分 …… (130)

第一节 对弧长的曲线积分 …… (130)
一、对弧长的曲线积分的概念与性质 …… (130)
二、对弧长曲线积分的计算法 …… (133)
习题 9-1 …… (137)
第二节 对坐标的曲线积分 …… (137)
一、对坐标的曲线积分的概念与性质 …… (137)
二、对坐标的曲线积分的计算法 …… (140)
三、两类曲线积分的联系 …… (146)
习题 9-2 …… (147)
第三节 格林公式及其应用 …… (148)
一、格林公式 …… (148)
二、平面上曲线积分与路径无关的条件 …… (154)
三、二元函数的全微分求积 …… (158)
习题 9-3 …… (162)
第四节 对面积的曲面积分 …… (164)
一、对面积曲面积分的概念与性质 …… (164)
二、第一型曲面积分的计算 …… (165)
习题 9-4 …… (170)
第五节 对坐标的曲面积分 …… (170)
一、有向曲面 …… (170)
二、对坐标的曲面积分的概念与性质 …… (171)
三、对坐标的曲面积分的计算法 …… (174)
四、两类曲面积分的关系 …… (179)
习题 9-5 …… (181)
第六节 高斯公式和斯托克斯公式 …… (182)
一、高斯公式 …… (182)
二、斯托克斯公式 …… (186)
习题 9-6 …… (191)
第七节 场论初步 …… (192)

一、场的概念 …… (192)
二、数量场的等值面与梯度 …… (192)
三、向量场的通量与散度 …… (193)
四、向量场的环流量与旋度 …… (195)
五、保守场与势函数 …… (197)
习题 9-7 …… (198)
总练习题九 …… (198)

第十章 微分方程 …… (201)
第一节 微分方程的基本概念 …… (201)
一、引例 …… (201)
二、微分方程的基本概念 …… (202)
习题 10-1 …… (204)
第二节 可分离变量的微分方程 …… (205)
习题 10-2 …… (208)
第三节 齐次方程 …… (209)
习题 10-3 …… (213)
第四节 一阶线性微分方程 …… (214)
习题 10-4 …… (219)
第五节 全微分方程 …… (219)
习题 10-5 …… (222)
第六节 可降阶的高阶微分方程 …… (222)
一、$y^{(n)}=f(x)$ 型 …… (222)
二、$y''=f(x, y')$ 型 …… (223)
三、$y''=f(y, y')$ 型 …… (225)
习题 10-6 …… (227)
第七节 线性微分方程解的结构 …… (228)
习题 10-7 …… (231)
第八节 二阶常系数齐次线性微分方程 …… (231)
习题 10-8 …… (236)
第九节 二阶常系数非齐次线性微分方程 …… (237)
习题 10-9 …… (245)
总练习题十 …… (246)

第十一章　无穷级数 …… (248)
第一节　常数项级数的概念和性质 …… (248)
一、引言 …… (248)
二、基本概念 …… (249)
三、基本性质 …… (250)
习题 11-1 …… (254)
第二节　常数项级数的收敛性及其判别法 …… (254)
一、正项级数及其收敛判别法 …… (255)
二、交错级数及其收敛判别法 …… (260)
三、绝对收敛与条件收敛 …… (262)
习题 11-2 …… (263)
第三节　幂级数的概念、性质与求和 …… (264)
一、函数项级数的一般概念 …… (265)
二、幂级数及其收敛半径 …… (265)
*三、关于一致收敛的级数及其分析性质 …… (270)
四、幂级数的分析性质与幂级数的求和 …… (274)
习题 11-3 …… (276)
第四节　函数展开成幂级数 …… (277)
一、$f(x)$ 的泰勒级数 …… (277)
二、$f(x)$ 展开成泰勒级数的条件 …… (279)
三、$f(x)$ 展开成泰勒级数的方法 …… (280)
四、幂级数展开式的应用举例 …… (284)
习题 11-4 …… (287)
第五节　傅里叶级数 …… (288)
一、问题的提出 …… (288)
二、预备知识 …… (289)
三、傅里叶级数与傅里叶系数 …… (290)
四、傅里叶级数的收敛定理 …… (292)
五、正弦级数与余弦级数 …… (298)
习题 11-5 …… (299)
第六节　一般周期函数的傅里叶级数 …… (300)
一、周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 …… (300)
*二、傅里叶级数的复数形式 …… (303)
习题 11-6 …… (304)
总练习题十一 …… (305)

习题答案与提示 …… (307)

第七章　多元函数微分学

本书上册所讨论的函数都只依赖于一个自变量，称之为一元函数．但在实际问题中经常遇到依赖多个自变量的函数，这就是本章将要讨论的多元函数．

一元函数和多元函数在概念上有许多共同点，但也存在某些本质上的差异．而二元函数和二元以上的多元函数相比较，只是形式上的不同，并没有本质的区别．因此本章着重讨论二元函数的微分学，在掌握了二元函数微分学的相关理论和方法之后，不难把它推广到一般多元函数中去．

对多元函数微分学的讨论，主要以自变量的两种不同变化方式来进行．一种是当多个自变量同时变化时函数的变化规律，另一种是只让其中一个自变量变化，而其他自变量相对保持不变时函数的变化规律，并进一步研究两类变化规律之间的相互关系．显然，后一种情形本质上与一元函数没有区别．可见，一元函数微分学是多元函数微分学的基础．

第一节　多元函数

一、平面点集

一元函数的定义域是实轴上的点集，二元函数的定义域是平面上的点集．因此，在讨论二元函数之前，先了解有关平面点集的一些基本概念．

由平面解析几何知道，在平面直角坐标系下，所有二元有序实数组 (x, y) 与平面上的点之间建立了一一对应关系．因此，在这意义上，二元有序数组与平面上的点可以看作是完全等同的．

确定了坐标系的平面，称为坐标平面．坐标平面上具有某种性质 p 的点的集合，称为平面点集，并记作

$$E=\{(x, y) \mid (x, y) \text{ 具有性质 } p\}.$$

常把全平面视为二维空间，记作 $\mathbf{R}^2$．并用 $E\subset \mathbf{R}^2$ 表示平面点集．

1．邻域

设点 $P_0(x_0, y_0)\in \mathbf{R}^2$，$\delta>0$ 是某定实数，记

$$U(P_0, \delta)=\{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\},$$

并称 $U(P_0, \delta)$ 是以点 P_0 为中心，δ 为半径的邻域，简称为点 P_0 的 δ 邻域. 实际上，$U(P_0, \delta)$ 就是一个以 P_0 为中心，δ 为半径的圆内部.

在 $U(P_0, \delta)$ 中除去中心点 P_0 所得的点集，称为 P_0 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(P_0, \delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0, \delta)=\{(x, y) \mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在无须指明邻域的半径时，P_0 的邻域简记为 $U(P_0)$.

除以上圆形邻域外，我们还可以定义矩形邻域，即

$$U'(P_0, \delta)=\{(x, y) \mid |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}.$$

显然，在点 P_0 的圆形邻域内总有点 P_0 的矩形邻域；同样，在点 P_0 的矩形邻域内也总有点 P_0 的圆形邻域.

设 E 为平面点集，P 为平面上的点. 下面利用邻域来描述点和点集的关系.

(i) 内点

若存在点 P 的某邻域 $U(P)$，使得

$$U(P) \subset E,$$

则称点 P 是点集 E 的内点. E 中全体内点组成的集合称为 E 的内部，记作 E°.

(ii) 外点

若存在点 P 的邻域 $U(P)$，使得

$$U(P) \cap E=\varnothing,$$

则称点 P 为点集 E 的外点.

(iii) 边界点

若点 P 的任何邻域 $U(P)$ 内既含有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，即

$$U(P) \cap E \neq \varnothing \quad 且 \quad U(P) \cap \overline{E} \neq \varnothing,$$

则称 P 是点集 E 的边界点.

点集 E 的全体边界点，称为 E 的边界. 注意，E 的边界点可以属于 E，也可以不属于 E.

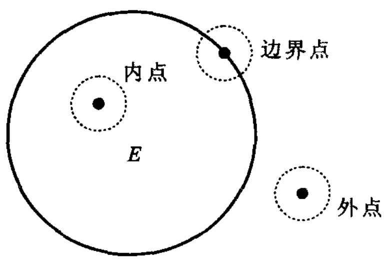


图 7-1

(iv) 聚点

若点 P 的任何去心邻域 $\mathring{U}(P)$ 内都含有 E 中的点，则称点 P 是 E 的聚点. 聚点本身可能属于 E，也可能不属于 E.

(v) 孤立点

若点 $P \in E$，但不是 E 的聚点，即存在点 P 的一个邻域 $U(P)$. 使

$$\mathring{U}(P)\cap E=\varnothing.$$

则称点 P 是 E 的孤立点.

例如，平面点集

$$E=\{(x,\ y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\},$$

满足 $1<x^2+y^2<2$ 的一切点都是 E 的内点；满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点都是 E 的边界点，它们不属于 E；满足 $x^2+y^2=2$ 的一切点也是 E 的边界点，它们都属于 E；点集 E 连同它内圆边界上的一切点都是 E 的聚点.

2. 开集

若点集 E 中的点都是 E 的内点，则称 E 为开集. 由此可知，开集的边界点不属于 E.

3. 闭集

若平面点集 E 的所有聚点都属于 E，则称 E 为闭集.

例如集合 $E=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2<1\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集. 集合 $E=\{(x,\ y)\mid |x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集. $\mathbf{R}^2$ 既是开集又是闭集. 此外，还约定空集$\varnothing$既是开集又是闭集.

4. 连通集

若点集 E 内任何两点都可以用折线连结起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集. 直观地说，连通集的点是“连成一片”的.

5. 区域

连通的开集称为开域. 开域连同它的边界一起所构成的点集称为闭域.

开域、闭域以及半开半闭域统称为区域.

例如：

集合 $E_1=\{(x,\ y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是开域.

集合 $E_2=\{(x,\ y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭域.

集合 $E_3=\{(x,\ y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<2\}$ 是半开半闭域.

集合 E_1，E_2，E_3 都可统称为区域.

6. 有界区域

对于区域 D，如果存在正数 R_0，使得 D 内任何点到原点的距离都小于 R_0，则称这个区域为有界区域，否则称为无界区域. 也就是说，若 D 为有界区域，则存在正数 R_0，使 $D\subseteq U(0,\ R_0)$.

例如，$\{(x,\ y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是有界闭域；而 $\{(x,\ y)\mid x+y>0\}$ 是无界开域.

二、多元函数的概念

一元函数描述的是一个变量与另一个变量的对应关系；多元函数则描述了

一个变量与多个变量间的对应关系. 下面是三个简单的例子.

例 1 圆柱体的体积 V 依赖于它的底圆半径 R 和它的高 H，它们之间的关系是

$$V=\pi R^2 H(\pi \text{ 为常数}),$$

其中 V，R，H 是三个变量，当变量 R，H 在一定范围（$R>0$，$H>0$）内取定一对数值 R_0，H_0 时，根据给定的关系，V 就有一个确定的值 $V_0=\pi R_0^2 H_0$ 与之对应.

例 2 一定量的理想气体，压强 P，体积 V 和绝对温度 T 之间的关系由下面的状态方程给出：

$$V=k\frac{T}{P} \ (k \text{ 为常数}).$$

当 T，P 在它们的变化范围内取定一组值时，根据给定的关系，V 有确定的值与之对应.

例 3 球心在原点、半径为 a 的上半球面的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

撇开上述例子的具体意义，从数量对应关系来考虑，它们有共同的属性，可抽象出二元函数的定义.

定义 7.1.1 设平面点集 $D\subseteq\mathbf{R}^2$，如果有对应法则 f，使得对于 D 中的每一个点 $P(x,y)$，总有唯一的实数 $z\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的二元函数，记作

$$f:\ D\to\mathbf{R},\qquad P(x,y)\mapsto z,$$

其中 x，y 称为自变量，z 称为因变量. D 为函数 f 的定义域，点 $P(x,y)\in D$ 所对应的 z 值称为函数 f 在点 P 处的函数值，记为 $z=f(x,y)$. 习惯上，也将二元函数简写为

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in D.$$

并把数集

$$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$$

称为函数 f 的值域.

例 4 求函数 $z=\arcsin\dfrac{2}{x-y}+\ln(x-y^2)$ 的定义域.

解 要使得函数表达式有意义，(x,y) 必须满足

$$\begin{cases}\dfrac{2}{|x-y|}\leqslant 1,\ \text{且 } x-y\neq 0,\\ x-y^2>0.\end{cases}$$

解此不等式组得到函数的定义域为

$$D=\{(x, y) \mid x \geqslant y+2 \text{ 且 } x>y^2\}.$$
如图 7-2 所示的阴影部分.

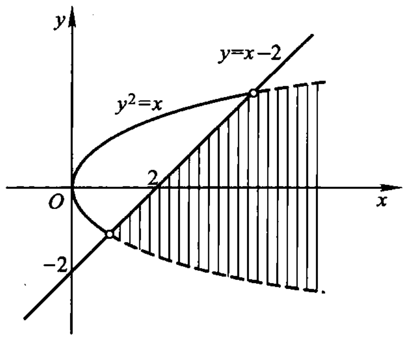


图 7-2

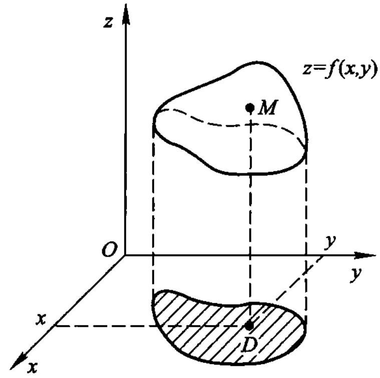


图 7-3

设二元函数 $z=f(x, y)$ 的定义域为 D. 对于 D 内任一点 $P(x, y)$, z 有确定的对应值: $z=f(x, y)$. 如果把数组 (x, y, z) 作为空间直角坐标系中点的坐标, 那么在空间便确定一点 M. 当 P 取遍 D 内所有点时, 得到一个空间点集.

$$\{(x, y, z) \mid z=f(x, y), (x, y) \in D\},$$

称此点集为二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形. 一般情况下, 二元函数的图形是一张曲面, 而函数的定义域 D 则是这张曲面在 xOy 面上的投影, 如图 7-3.

例如, 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在几何上表示以原点 $O(0, 0, 0)$ 为顶点、z 轴为对称轴的圆锥面的上半部分.

类似于二元函数的概念, 我们可以定义一般的 n 元函数. 为此先介绍 n 维欧氏空间概念.

我们知道, 全体实数表示数轴上一切点的集合, 即直线 $\mathbf{R}$. 所有有序二元实数组 (x, y) 表示平面上一切点的集合, 即平面 $\mathbf{R}^2$. 所有有序三元实数组 (x, y, z) 则表示空间一切点的集合, 即三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$. 一般地, 称 n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体为 n 维欧氏空间 (以下简称为 n 维空间), 记为 $\mathbf{R}^n$. 每个 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点 P, 数 x_i 称为点 P 的第 i 个坐标. 在 $\mathbf{R}^n$ 中, 点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与点 $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的距离定义为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

以点 P_0 为中心, δ 为半径的邻域表示为

$$U(P_0, \delta)=\{P \mid |P_0P|<\delta, P \in \mathbf{R}^n\}.$$

以邻域为基础, 类似于平面点集, 可以定义一般的 n 维空间的点集的内点、外

点、边界点、聚点以及区域等一系列概念.

定义 7.1.2 设点集 $D\subseteq\mathbf{R}^n$，如果对于 D 中的每一个点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，变量 u 按照一定的法则 f 有确定的值与之对应，则称 f 是定义在 D 上的 n 元函数，记为

$$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \text{或} \quad u=f(P).$$

点集 D 称为函数 f 的定义域.

三、多元函数的极限

首先讨论二元函数 $z=f(x, y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$，即点 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 时的极限.

与一元函数的极限类似，如果当 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 时，对应的函数值 $f(x, y)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x,, y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限.

值得一提的是，这里 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 是指点 P 到点 P_0 的距离趋于零，这时动点 $P(x, y)$ 将以任何方式趋于定点 $P_0(x_0, y_0)$. 下面给出二元函数极限的"ε-δ"定义.

定义 7.1.3 设 $f(x, y)$ 是定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的二元函数，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点，A 是一个常数. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于 D 中满足不等式

$$0<|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x, y)$，都有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A \quad \text{或} \quad f(x, y)\to A(x\to x_0, y\to y_0).$$

称上述二元函数的极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ 为 $f(x, y)$ 在点 P_0 (x_0, y_0) 的二重极限.

在定义 7.1.3 中，点 P_0 是 D 的聚点，函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 处可以有定义，也可以无定义，但在 P_0 的任一去心邻域 $\mathring{U}(P_0)$ 内应有无数个使 $f(x, y)$ 有定义的点. 只要对 D 中适合不等式 $0<|P_0P|<\delta$ 的一切点 P，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$ 成立，则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A$.

例 5 设 $f(x, y)=\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$，求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=2$.

证 函数$f(x, y)$的定义域是

$$D=\{(x, y) \mid xy\neq 0, xy\geqslant -1\}.$$

坐标原点$O(0, 0)$是D的聚点.

对任意$(x, y)\in D$，有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}-2\right|=\left|\sqrt{xy+1}-1\right|$$

$$=\frac{|xy|}{\sqrt{xy+1}+1}<|xy|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}.$$

对任意给定的$\varepsilon>0$，取$\delta=\sqrt{2\varepsilon}$，则对任意$(x, y)\in D\cap U(O, \delta)$，都有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}-2\right|<\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=2.$$

根据二重极限的定义，在去心邻域$\mathring{U}(P_0, \delta)$内，动点$(x, y)$趋于点$(x_0, y_0)$的方式是任意的. 因此，如果动点$(x, y)$仅以某一特殊方式，例如沿某条指定直线或曲线趋于点$(x_0, y_0)$时，即使函数能无限接近于某一确定值，也不能由此断定函数的极限存在. 但反过来，如果当动点(x, y)以不同方式趋于点(x_0, y_0)时，函数$f(x, y)$趋于不同的值，则可断定该函数的极限不存在. 当然，如果存在一种$P\to P_0$的方式，使得$f(x, y)$不趋于确定值，则$f(x, y)$的极限不存在.

例 6 讨论极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$是否存在.

解 当点(x, y)沿直线$y=kx$趋于点$(0, 0)$时，因

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

其结果随着k取值的不同而异，故极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$不存在.

例 7 讨论极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$是否存在.

解 当点(x, y)沿直线$y=x$趋于点$(0, 0)$时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x^2}{2x^6}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x^2)^2}{2x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty,$$

所以，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$不存在.

与二元函数的极限类似，可以定义一般的 n 元函数的极限.

定义 7.1.4 设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为 D，P_0 是 D 的聚点，A 是一个常数. 如果对于任给的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于 D 中满足不等式

$$0<|P_0P|<\delta$$

的一切点 P，都有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为 n 元函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

这个极限也称为 n 重极限.

四、多元函数的连续性

与一元函数的连续性类似，可以定义二元函数的连续性.

定义 7.1.5 设函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点，并且 $P_0(x_0, y_0)\in D$，若当 $P(x, y)\in D$ 时有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0),$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续.

若 $f(x, y)$ 在 D 中的每一点都连续，则称函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续. 此时，我们说 f 是 D 上的连续函数.

函数 $f(x, y)$ 的不连续点称为间断点.

与一元函数一样，二元连续函数的和、差 、积、商（除去分母为零的点）与复合仍为二元连续函数.

闭区间上的一元连续函数有许多很好的性质，这些性质可推广到多元函数，并且证明方法也与一元函数类似.

性质 1（最大值与最小值定理） 有界闭区域 D 上的多元连续函数 $f(P)$ 在 D 上必能取得最大值和最小值.

性质 1 的结论就是说，在 D 上必存在点 P_1 和点 P_2，使得 $f(P_1)$ 为最小值，$f(P_2)$为最大值. 即对于任意的 $P\in D$，有

$$f(P_1)\leqslant f(P)\leqslant f(P_2).$$

性质 2（介值定理） 有界闭区域 D 上的多元连续函数 $f(P)$，如果有两点 P_1，$P_2\in D$，使 $f(P_1)<f(P_2)$，则对介于 $f(P_1)$ 与 $f(P_2)$ 之间的任意实数 μ，必存在点 $Q\in D$，使 $f(Q)=\mu$.

这里，$f(P_1)$ 可以是 $f(P)$ 的最小值，$f(P_2)$ 可以是 $f(P)$ 的最大值.

例 8 讨论函数$f(x, y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$的连续性.

解 函数$f(x, y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$由两个函数$z=\sin u$与$u=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$复合而成，而$z=\sin u$是连续函数，$u=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$除圆周$x^2+y^2=1$上的点外都连续. 故复合函数$f(x, y)$在它的定义域$D=\{(x, y)\mid x^2+y^2\neq 1\}$上是连续的，圆周$x^2+y^2=1$上的点都是间断点，称该圆周是函数的间断线.

例 9 讨论函数$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{xy}, & xy\neq 0,\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$的连续性.

解 函数$f(x, y)$在平面上除两坐标轴外（不包含坐标原点）处处有定义. 它在平面上不含坐标轴的各部分区域上连续. 又在坐标原点（0, 0）处，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{xy}=1=f(0, 0).$$

所以函数$f(x, y)$在坐标原点（0, 0）处也连续，故函数$f(x, y)$在它的定义域上是连续的.

例 10 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{y}=\mathrm{e}^2.$

习题 7-1

1. 确定并画出下列函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$；　　(6) $u=\sqrt{2^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$.

2. 作出下列函数的图形，并指出图形的名称：

(1) $z=x+2y-1$；　　(2) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$；

(3) $z=\sqrt{3x^2+2y^2}$；　　(4) $z=xy$；

(5) $z=6-2x^2-3y^2$；　　(6) $z=x^2$.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$；