工 程 力 学

第一部分 理論力学

第二分册 运动学

天津大学理論力学教研室編

高等教育出版社

本書是天津市广播函授大学用的“工程力学”教材，內容包括理論力学和材料力学两大部分。

这本第一部分第二分册的內容是理論力学中的运动学，共分五章，叙述了点的直綫运动、曲綫运动和复合运动、以及剛体的平面运动。書中有不少例題，每章之末均附有習題。

本書除供紅專大学教学用之外，还可供业余大学，半工半讀学校等作为教材。采用本書作为自学的材料也很相宜。

工程力学

第一部分 理論力学

第二分册 运动学

天津大学理論力学教研室編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷 新华書店發行

統一書号15010·753 開本850×1168 1/32 印張1 10/16

字數41,000 印數3,001—12,000 定價 7) ¥0.22

1959年3月第1版 1959年5月北京第2次印刷

目　录

运 动 学

第九章 点的直綫运动

§33. 导言

現在我們开始来研究理論力学的第二部分——运动学。在这一部分里，我們将研究物体运动时在空間所占的位置和时間的关系。具体来說，即物体的位置問題、速度問題和加速度問題。

我們已經知道，宇宙間任何物体都在运动着，因此，当我們描写某个物体的运动时，总是选定另一物体作参考来观察該物体的位置的变化，我們称被作为参考的物体为参考系統。参考系統的选擇，要看問題的性質和研究的方便而定。例如我們要研究物体对地球的运动，則以地球作为参考系統最为方便，要研究地球和各行星对太阳的运动，最好选擇太阳作为参考系統。

很明显，我們描写某一物体的运动，由于参考系統的不同应有所差別。例如，一个在地面上不动的物体，如以地球作为参考系統，我們应該說它是靜止的，但如以太阳作为参考系統，我們就会發現它是随着地球一起运动。由此可見，所謂运动和靜止，乃是一个相对的概念，因而，当我們描述某一物体的运动时，就必須明确指出这一运动是相对于哪一个参考系統而說的。为了确切地說明物体相对于参考系統的位置以及其变化，我們还要选擇一个与参考系統相固結的坐标系，我們称它为参考坐标系。例如，在說明火車运动时，可以某一車站为坐标原点，然后沿鉄道标明里数，用来說明火車的位置。又如在研究物体在房子里地面上运动时，可以选定室內某一牆角作为坐标原点，以两条牆角綫分別作为 x 軸与 y 軸，用来描述物体在地面上的位置。在运动学中所謂决定一物

体的运动，它的意思就是說要决定此物体每一瞬时在所选参考坐标系中的位置。

我們知道，一切物体的运动都只能在空間和时間中进行。因此，我們除了必須选定参考坐标系以便确定运动物体的位置变化以外，还必須选定一个时間的測量方法，以便确定运动物体位置变化的先后順序。通常，时間是用鐘表或跑表来測量的，并且，在工程中采用 1 秒来作为时間的單位，1 秒等于平均太阳日的 86400 分之一。此外，在运动学里，把时間看作一个連續变化量，并且常把时間作为自变数，以 t 表示之。

在运动学中，我們經常遇到“瞬时”与“时間間隔”这两个概念，現在說明它們的区别。当点在参考坐标系中运动时，和点所占某一位置相对应的是某一瞬时，和点所走某一段路程相对应的是某一时間間隔。例如，火車从天津开出时为下午二点，这个下午正二点的一霎那是瞬时的概念。火車由天津开到北京，須經过一点四十分鐘，这里的“一点四十分鐘”是一段时間，或称为时間間隔。

通常我們所見物体的运动是比較复杂的，在物体上之各点可能有不同的运动；例如自行車的車輪在平直的道路上滚动时，軸心的运动是直綫运动，輪边緣上任意一点的运动則作曲綫运动，因此，研究物体的运动，就必須由研究点的运动开始。

在运动学中所遇到的長度，都采用工程單位制，以公尺来計算。1 公尺等于保存在巴黎国际度量衡局里的公尺原器上两端刻度綫間在 0°C 时的長度。

§34. 点的直綫运动决定法·运动方程式

动点在空間所經过的綫，称为动点的軌迹。如若动点的軌迹是直綫，則这个点的运动称为直綫运动；軌迹是曲綫則称为曲綫运动。

首先，我們来研究点的直綫运动的决定法。設有动点 M，它的

运动軌迹是一直綫(圖 136)。取这直綫为 x 軸，并在軸上任取一点 O 作为坐标原点，同时假定 x 軸的右端为正，左端为負，則該动点在軌迹上的位置即可由它的横坐标 $OM=x$ 来决定。

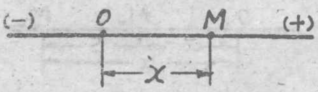

圖 136.

因为当 M 点运动时，对于每一已知瞬时 t 該点在 x 軸上都有相应的位置，又因为当 M 点由某一点运动至另一点时，这个点順次地經过介于这两点之間的一切的点，因此，M 点的横坐标必为时間 t 之單值連續函数，通常可表示为:

$$x=f(t) \tag{1}$$

这个方程式称为 M 点沿 x 軸的运动方程式。从函数 f 的各种不同形式，可得到一点沿已知直綫軌迹运动的各种形式。如已知运动方程式，則可求出任一瞬时 M 点在直綫軌迹上的位置。

現举例說明如下:

如已知某一点的运动，它的运动方程式是: $x=3+4t$, 从这个运动方程式里，很容易求得动点的位置，当 $t=0$ 时 $x=3$; $t=1$ 时，$x=7$; $t=2$ 时 $x=11$, …等等。这就說明动点在 x 軸上运动时，起始在距原点 O 为 3 公尺的地方，同时也知道，动点的横坐标随着时間的增加而成正比地增加。又如 $x=0.5t^2$, 从这一运动方程式中可以看到，动点的运动就与前例有所不同了，当 $t=0$ 时，动点的位置就在原点; $t=1$ 时 $x=0.5$; $t=2$ 时，$x=2$; $t=3$ 时，$x=4.5$, …等等。动点的横坐标随着时間的增長而迅速增長，按照与时間的平方成比例地增加。由此可見，动点在直綫軌迹上究竟如何运动，就需要进一步針对具体問題具体分析。

§35. 点的等速直綫运动·速度

設有一点在 x 軸上作等速运动(圖 137)。在瞬时 t_0 时点的位

置在 M_0, 在瞬时 t 时它的位置在 M, 如以 s 表示动点在$(t-t_0)$秒鐘內所經的路程，則得：$s=x-x_0$。

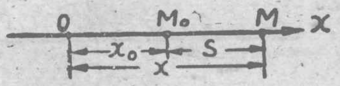

圖 137.

如果在任意一段相等的时間間隔內通过相等的路程，我們就称这种运动为点的等速运动。显然在这种运动中，通过的路程和所需的时間之比是一个常量，这个不变的比值称为等速运动中的速度，并以 v 表示之，得：

$$v=\frac{x-x_0}{t-t_0}. \tag{2}$$

通常我們取 $t_0=0$, 則上式可写成：

$$x=x_0+vt. \tag{3}$$

当 $x_0=0$ 时，則

$$x=vt. \tag{3'}$$

等式(3)、(3′)就是等速直綫运动的运动方程式。动点运动时，不仅有快慢的不同，而且方向也可以不同。动点运动的方向应由速度的方向来确定。从公式(2)可知，当 v 为正値时，$x>x_0$, 表示运动方向指向 x 軸的正向；当 v 为負値时，$x<x_0$, 表示运动方向指向 x 軸的負向。

由公式(2)可以推出速度的單位应为公尺/秒。

§36. 变速直綫运动·平均速度与瞬时速度

如动点在直綫軌迹上运动时，在相等的时間間隔內所經过的路程不等，則称为变速直綫运动。显然在这种运动中，动点所經的路程与其相当的时間間隔的比值不是一个常数。我們現在先用平均速度的概念来說明这种运动中的速度。設点运动时，在某一段时間間隔$(t-t_0)$內通过的路程是 $x-x_0$(圖 137)，那么动点在这段时間內的平均速度 v^* 应为·

$$v^*=\frac{x-x_0}{t-t_0}. \tag{4}$$

在变速直綫运动时，由于所取时間間隔不同，平均速度亦有所差別，因此在說明平均速度时，必須指出在哪一段时間間隔 $t-t_0$ 內或者在哪一段路程 s 上該点的平均速度。

平均速度只能粗略地描写变速直綫运动的概念，如要精确描写变速直綫运动，我們必須知道在每一段很短时間內的运动情况。

設动点在 x 軸上运动(圖 138)，在瞬时 t 点的位置为 M，經过一段很短的时間間隔 Δt 后，动点的位置在 M'，在这一段时間內的平均速度是 $\Delta x/\Delta t$。这一个平均速度只能大概地說明动点的速度。如果我們要求动点在經过 M 位置时的眞速度，我們可以这样想，只要时間間隔 Δt 取得越短，那么由 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 求出来的平均速度将越接近于点在 M 位置时的眞速度。現令所取时間間隔 Δt 逐漸变小，而无限地趋近于零，則平均速度 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 亦趋近于某一極限值。設以 v 表示这个極限值，則得:

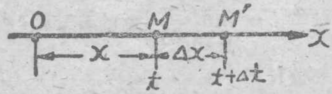

圖 138.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}. \tag{5}$$

我們称这个極限值为动点在瞬时 t 的瞬时速度。

如已知点的直綫运动方程式 $x=f(t)$，$\frac{dx}{dt}$ 用高等数学上的話来講应为动点的坐标 x 对时間的导数，它亦表示該点的眞速度。如导数 $\frac{dx}{dt}$ 在已知瞬时 t 是正值，則 x 随时間增加而增大，即此点沿 x 軸正向运动。如导数 $\frac{dx}{dt}$ 在已知瞬时 t 为負值，則 x 随时間的增加而减少，即該点沿軸的負向运动。由此可知，速度的符号可以决定运动的方向。

例如：已知动点按 $x=3+4t$ 的規律运动，我們求得动点的瞬

时速度$\frac{dx}{dt}=4$，由此得到瞬时速度为一常数，其值等于 4，因此动点的运动是等速直綫运动。

又如：动点的运动方程式是 $x=0.5t^2$，$\frac{dx}{dt}=0.5\times 2t$，即 $v=1t$。不难看出，速度 v 就随时間 t 变化而有所不同。当 $t=1$ 时，$v=1$；$t=2$ 时，$v=2$；$t=3$ 时，$v=3$，…等等。在每一瞬时速度 v 各有它对应的不同值。这样的运动，称为变速直綫运动。

附注：考虑到在解运动学問題时数学的需要，今将常見的初等函数求导数的公式介紹如下，供参考：

$x=f(t)$[x 是时間 t 的函数]；

$\frac{dx}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$[$x$ 的改变量 Δx 与自变量的改变量 Δt 之比的極限，称作 x 对 t 的导数]，

或表示为$\frac{dx}{dt}=f'(t)$.

1. $\frac{dC}{dt}=0$ [C 是常数]；
2. $\frac{dt}{dt}=1$；
3. $\frac{d}{dt}(u+v-w)=\frac{du}{dt}+\frac{dv}{dt}-\frac{dw}{dt}$；
4. $\frac{d}{dt}(Cx)=C\frac{dx}{dt}$；
5. $\frac{d}{dt}(uv)=u\frac{dv}{dt}+v\frac{du}{dt}$；
6. $\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dt}-u\frac{dv}{dt}}{v^2}$；
7. $\frac{dx}{dt}=nx^{n-1}\frac{dx}{dt}$；
8. $\frac{d}{dt}(\log e^x)=\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$；
9. $\frac{d}{dt}(e^x)=e^x\frac{dx}{dt}$；
10. $\frac{d}{dt}(\sin x)=\cos x\frac{dx}{dt}$；
11. $\frac{d}{dt}(\cos x)=-\sin x\frac{dx}{dt}$；
12. $\frac{d}{dt}(\operatorname{tg} x)=\sec^2 x\frac{dx}{dt}$；
13. $\frac{d}{dt}\sin^{-1}x=\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-x^2}}$；
14. $\frac{d}{dt}\cos^{-1}x=-\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-x^2}}$；
15. $\frac{d}{dt}\operatorname{tg}^{-1}x=-\frac{\frac{dx}{dt}}{1+x^2}$.

§37. 等变速直綫运动·加速度

在变速直綫运动中已經看到动点的速度是随时間改变的，因

此，要进一步研究点的运动，必須說明速度改变的情形。

設动点在直綫上运动时，如在某一瞬时 t_0 的速度为 v_0，在次一瞬时 t 的速度为 v(圖 139)，那么 $v-v_0$ 就称为在 $t-t_0$ 这段时間內的速度增量。当点运动时，如在任意一段相等时間內的速度增量相等，我們就称这种运动为等变速直綫运动。显然，在这种运动中，速度增量与时間的比值是一个常量，它描写点运动时速度变化的快慢，我們称它为加速度。如以 a 表示加速度，則:

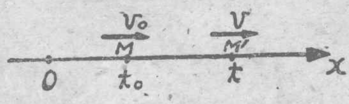

圖 139.

$$a=\frac{v-v_0}{t-t_0}. \tag{6}$$

从公式(6)可知，加速度在数值上等于單位时間內的速度增量，它的單位应为公尺/秒^2。

加速度說明速度改变的情形，因为速度有正負，所以加速度也有正負。在某瞬时速度与加速度同号时，点作加速运动；异号时，点作减速运动。

在等变速直綫运动中，公式(6)可以改写成

$$v=v_0+a(t-t_0).$$

如取 $t_0=0$，則上式可以簡化为:

$$v=v_0+at. \tag{7}$$

現在我們来考慮一下，在等变速直綫运动中，如果动点具有某一初速度 v_0 与某一加速度 a，我們将如何求得动点距离 x 与时間 t 的关系。

我們借助于作圖的方法来研究上述的問題，首先，回忆一下在等速直綫运动中的情形，如果起始位置 $x_0=0$，則根据公式 (3′) 所示 $x=vt$，此处速度为一常量。我們用时間 t 作为横坐标，速度 v 为縱坐标(如圖 140)画一条曲綫，这条曲綫，称之为速度-时間曲

綫。很容易看出，在等速直綫运动中，这条曲綫是平行于横軸的直綫。另外，由于距离等于速度和时間的乘积，因此在直綫以下的面积就等于距离 x 的数値。

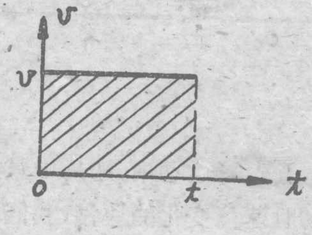

圖 140.

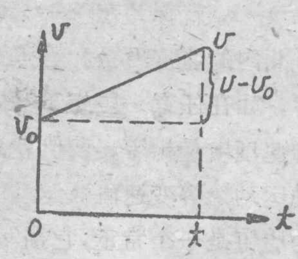

圖 141.

在等变速直綫运动中，a 是一个常量，速度-时間曲綫亦是一条直綫（圖 141）。同样的道理，动点經过某一时間間隔所通过的距离在数値上应等于該直綫以下的面积（在圖中是長方形和三角形面积之和）。由此可得：

$$x=v_0t+\frac{v-v_0}{2}t.$$

将公式(7)的 v 代入上式，得：

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2. \tag{8}$$

根据上式，就可以确定任何时刻动点的距离 x 的值。如果将公式(7)与(8)合并，消去 t，得：

$$v^2=v_0^2+2ax. \tag{9}$$

公式(7)、(8)和(9)分别表示 v、x 和 t 三个变量中每两个变量間的关系。应該注意，只有在等变速直綫运动时才能应用上述三个公式去解决問題。

在眞空中自由落体的运动是一个典型的等变速运动的例子，重力加速度 g 是一个常量，等于 9.81 公尺/秒^2，因此落体的速度是：

$$v=v_0+gt. \tag{10}$$

落体所經的路程根据公式(8),令 $a=g$ 則得:

$$s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2. \tag{11}$$

从(10)与(11)两式中联立消去 t, 得:

$$v^2=v_0^2+2gs. \tag{12}$$

物体鉛垂下落时,速度越来越大，是等加速运动;如物体鉛垂上拋时,在达到最高点以前速度越来越小,应为等减速运动，此时加速度 $a=-g$, 在公式(10)与(11)中的 g 应取負号。

例 21. 两物体沿直綫相向运动，加速度 $a_1=6$ 公尺/秒^2 和 $a_2=4$ 公尺/秒^2; 初速度 $v_{01}=10$ 公尺/秒 和 $v_{02}=15$ 公尺/秒，开始时，两者間的距离 $d=750$ 公尺。問經多久后此二物体相遇?

解 以 s_1 表示第一物体在相遇前所經的路程，以 s_2 表示第二物体在相遇前所經的路程。根据公式(8):

$$s_1=10t+3t^2;\quad s_2=15t+2t^2,$$

因为 $s_1+s_2=d=750$,所以得方程式:

$$5t^2+25t=750.$$

解方程式,得所欲求的时間 $t=10$ 秒。

§38. 一般变速直綫运动·平均加速度与瞬时加速度

一般物体作直綫运动时,在相等的时間間隔內,速度的增量不一定相等,所以不是等变速直綫运动。显然在这种运动中,速度增量和时間的比不是常量。我們現在先用平均加速度的概念来說明这种运动中的加速度。設动点运动时,在某一段时間 $t-t_0$ 內的速度增量是 $v-v_0$, 那么动点在这段时間內的平均加速度是:

$$a^*=\frac{v-v_0}{t-t_0}. \tag{13}$$

在动点作一般变速运动时，平均加速度一般地因所取时間不同而有差別,所以在說明平均加速度时,必須指出是哪一段时間內的平均加速度。

为了精确地描写变速运动，我們要引入瞬时加速度的概念。

設动点在直綫 x 軸上运动(圖 142)，在瞬时 t 位于 M 的速度为 v，經过一段極短的时間間隔 Δt 以后，位于 M' 的速度变为 v'，速度的增量 $\Delta v = v' - v$，那么在这一段时間間隔內的平均加速度应为 $\Delta v/\Delta t$。現令 Δt 漸漸縮短，則速度增量 Δv 也漸漸变小。当 Δt 趋近于零时，Δv 也趋近于零，但平均加速度 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 的值，則趋近于某一極限值。設以 a 代表这个極限值，則得：

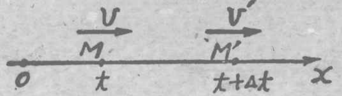

圖 142.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \tag{14}$$

我們称这个極限值 a 为动点在瞬时 t 的瞬时加速度。如速度和时間的函数关系 $v = f(t)$ 为已知，則速度对时間 t 的导数即表示加速度。在說明瞬时加速度时，也必須指出是某一瞬时的瞬时加速度。在不同瞬时，加速度 a 可以有正号或負号。当在某一瞬时 t，速度 v 和加速度 a 同号时，点作加速运动；异号时，点作減速运动。

例 22. 某点按下列規律作簡諧运动

$$x = a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

需求它的速度与加速度。

解 将这运动方程式微分得

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi a}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

由上式可知 v 隨 t 的变化而有所改变，不仅数值上可在 0 至 $v_{最大} = \frac{2\pi a}{T}$ 之間时刻改变，而且方向亦隨 t 的变化而有所改变(这是因为正弦的值是在 0 与 1 之間，同时符号亦有正、負)。現在我們再求速度 v 对时間 t 的导数，得加速度

$$w = \frac{dv}{dt} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

或

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2}x.$$

由此可知，加速度亦不是常量，并且与动点至座标原点 O 之間的距离 x 有关，当 x 为正时，加速度为負值，x 为負时，加速度即为正。另外加速度亦有一最大值等于 $\frac{4\pi^2}{T^2}a$。

習　題　九

1. 一点按 $x=6t^2+5t$ 之規律作直綫运动，其中 t 以秒計，x 以公尺計。求从第 9 秒到 12 秒之一段时間內点的平均速度 v^*，和以上二瞬时点的眞速度。

答　$v^*=131$ 公尺/秒。

$v_1=113$ 公尺/秒。

$v_2=149$ 公尺/秒。

2. 起始时相距 100 公尺之二物体相向而运动，第一物体的速度为等速 $v_1=3$ 公尺/秒；第二物体的初速度 $v_0=7$ 公尺/秒，加速度 $a=4$ 公尺/秒^2(等加速运动)，求二物体相遇的地点。

答　5 秒后在距第一物体原来位置 15 公尺处相遇。

3. 向矿井內无初速地投下一石子，石子触地的声音在投擲后 7.7 秒听到。求矿井的深度，設声音的速度为 350 公尺/秒，而落体加速度 $g=10$ 公尺/秒^2。

答　245 公尺。

4. 列車以速度 72 公里/小时行駛，当制动时列車获得减速度 0.4 公尺/秒^2，問应在列車到站前多少时候，以及在离站多少距离处开始制动？

答　50 秒，500 公尺。

5. 一点按 $x=3+4t-5t^2$ 之規律作直綫运动，試分析一下：

i) 当 $t=0$ 时，点的运动情况。

ii) 速度如何变化？

iii) 是加速运动还是减速运动？

iv) 求 $t=5$ 秒时，瞬时速度与加速度。

第十章　点的平面曲綫运动

§39. 点的平面曲綫运动的决定法

設动点的軌迹为一平面曲綫，則这种运动我們称为点的平面曲綫运动。当点作平面曲綫运动时，首先，我們来研究一下如何决定每一瞬时它在平面內的位置。現在我們介紹两种决定法，一种是当动点在平面內的軌迹的形状为已知时，如圖 143 所示，我們可以在此軌迹上任选一点 O 作为度量弧長的参考点，并假定向某一方向度量的弧長为正値，而向另一方向度量的弧長作为負値。这样

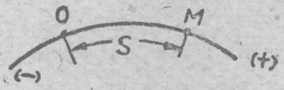

圖 143.

当动点M到O点的弧長s为已知时，則动点在此平面內的位置即可完全确定。正如同我們研究火車沿鉄道运动时一样，我們不仅需要以某一車站作为参考原点，而且必須說明是向哪一方向沿鉄道量得的距离s，才能正确的确定火車的位置，否則只能知道距車站多少公里，究竟在車站的哪一边还是不知道的。此外，当M点运动时，从M到O点的弧長s将随时間t的改变而改变，并且，由于在每一已知瞬时动点在軌迹上具有确定的位置，因而，对于每一已知瞬时t，必有其对应的，單一的s值。由此可見，当M点在其平面內运动时，M点到O点之間沿軌迹的距离s是时間t的單値連續函数，写为：

$$s=f(t). \tag{15}$$

这一方程式，称为点沿已知軌迹的运动方程式。

由上述可知，如果已知某点的軌迹及其沿此軌迹的运动方程式，則动点在每一已知瞬时在平面內的位置即可完全确定。这一种决定方法，我們称为决定点的平面曲綫运动的自然法。

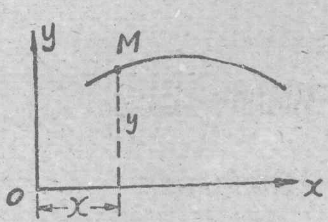

圖 144.

除自然法以外，我們还可由坐标法来决定点的平面曲綫运动。在点运动所在的平面內任选一直角坐标系OXY（如圖144）。当动点M的两个坐标x与y为已知时，則其在平面內的位置即可完全确定，而且，当动点在此平面內运动时，上述两个坐标x与y均为时間t的單値連續函数，写为：

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t),\\ y&=f_2(t).\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

这两个方程式，称为直角坐标系中点的运动方程式。当这两个方程式为已知时，則动点在每一瞬时在平面內的位置卽可完全被确定。

当点的平面曲綫运动用坐标法决定时，就不需要再給定軌迹，并且从公式(16)中，我們可以消去时間 t，以得到 x 与 y 之間的相互关系方程式，也就是动点的軌迹方程式。

例 23. 已知动点按 $x=a\cos(\omega t)$，$y=b\sin(\omega t)$ 的規律在运动，試求其軌迹。

解 为了消去这两式中的 t，可先把它写成下列形式：

$$\frac{x}{a}=\cos(\omega t);\quad \frac{y}{b}=\sin(\omega t),$$

然后各平方后相加，卽得出軌迹方程式如下：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这是因为 $\cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t)=1$（三角公式）。从軌迹方程式，根据解析几何可知为一椭圓。椭圓的半軸是 a 和 b，因此，动点沿着椭圓軌迹在运动。

§40. 点作平面曲綫运动时的速度及加速度的概念

現在我們用自然法来研究点的平面曲綫运动。設有一动点，按照 $s=f(t)$ 規律沿某一曲綫运动（如圖 145）。設在某一瞬时 t，动点位于 M，經过一段时間間隔 Δt 以后，到达另一位置 M'。那么从 M 点到 M' 点的一段直綫称为动点在这段时間內的位移。由圖可知，位移不仅有一定的大小，而且有一定的方向。它的大小，是圖 145 中 MM' 直綫段的長度，它的方向是这段直綫在空間的方位指向由 M 到 M'，因而位移应看为向量，用 $\overrightarrow{MM'}$ 表示之。

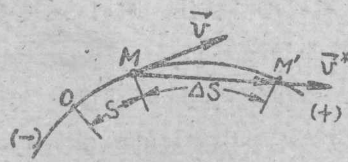

圖 145.

在直綫运动中，点的位移和它的运动軌迹重合；在曲綫运动中，运动軌迹是曲綫，位移是直綫，所以一般地說，两者不相重合。

但当所取的时間間隔 Δt 为无限小时，位移 $\overrightarrow{MM'}$ 也是无限小值，这时候位移和軌迹就完全重合。因此任何曲綫运动可以看作由无数極短的直綫运动所組成，而直綫运动中速度的概念就可应用到曲綫运动中来。所不同的，是在曲綫运动中，每一无限小位移的方向是随时間的改变而改变的，因此必須注意到它的方向。

在平面曲綫运动中，我們把位移 $\overrightarrow{MM'}$ 和其相应的时間間隔 Δt 的比值，称为点在这一段时間內的平均速度。平均速度亦是一个向量，用 $\boldsymbol{v}^*$ 表示之，它的方向与 $\overrightarrow{MM'}$ 同向，大小就等于 $\overrightarrow{MM'}$ 的大小与 Δt 的比值：

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}. \tag{17}$$

如果，我們把时間間隔取得无限小乃至趋近于零，則平均速度 $\boldsymbol{v}^*$ 也达到一極限值，这个極限值就称为动点在瞬时 t 的瞬时速度或眞速度。如以 $\boldsymbol{v}$ 表示瞬时速度，則：

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}. \tag{18}$$

首先，我們来研究一下瞬时速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向，显然应和 $\overrightarrow{MM'}$ 的極限方向相同，因为无限小时間內的位移的方向是曲綫的切綫方向，所以动点在任一瞬时，速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向应对应于軌迹上动点所在位置的切綫方向。

現在我們再来求速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小，由公式(18)可知，速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小应为无限小位移的大小与无限小时間間隔 Δt 的比值，当位移 $\overrightarrow{MM'}$ 趋近于零时，可以看出它的大小就可以用沿軌迹上所增加的弧長来代替，因而速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小可用下式求出：

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{19}$$

即：瞬时速度 $\boldsymbol{v}$ 的数値等于弧長 s 对时間 t 的一阶导数。如导数 $\frac{ds}{dt}$ 为正値，則表示 s 値随时間的增大而增大，亦即点是沿着軌迹的