◎根据教育部最新审定教材编写◎

怎样解题

·新教材·

初中平面几何
添加辅助线的方法与技巧

CHUZHONGPINGMIANJIHE
TIANJIAFUZHUXIANDEFANGFAYUJIQIAO

总主编／薛金星

第六次修订版

北京出版社出版集团 BEIJING PUBLISHING HOUSE(GROUP)
北京教育出版社 BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

怎样解题

◎根据教育部最新审定教材编写◎

怎样解题

·新教材·

初中平面几何添加辅助线的方法与技巧

总主编　薛金星

本书主编　马晓燕　王雨涛

第六次修订版

北京出版社出版集团 BEIJING PUBLISHING HOUSE (GROUP)

北京教育出版社 BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

诚邀全国名师加盟

图书在版编目(CIP)数据
初中平面几何添加辅助线的方法与技巧 / 薛金星主编.
—北京：北京教育出版社，2007.5
(怎样解题)
ISBN 978－7－5303－3999－2
Ⅰ.初... Ⅱ.薛... Ⅲ.几何课—初中—解题 Ⅳ.G634.635
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 073259 号

怎样解题·初中平面几何添加辅助线的方法与技巧
ZENYANG JIETI·CHUZHONG PINGMIAN JIHE TIANJIA FUZHUXIANDE FANGFA YU JIQIAO
总主编　薛金星
北京出版社出版集团 北京教育出版社 出版
(北京北三环中路 6 号)　邮政编码：100120
质量投诉电话：(010)61743009　62380997　58572393
网　址：www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
各地书店经销　北京泽宇印刷有限公司
890×1240　32 开本　6.5 印张　270 000 字
2009 年 3 月第 5 版　2009 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－5303－3999－2/G·3929
定价：11.80 元

再版前言

《怎样解题》丛书全面体现创新教育思想，秉承“教学研究来源于教学、服务于教学”的编写理念，本着真正教给学生学会“怎样解题”的目的，遵循实用性、针对性和可操作性的原则，组织了一批特高级骨干教师和教研员反复研究论证，精心打造而成。

本丛书具有五大亮点：

1.与时俱进，力求创新

本丛书紧扣时代脉搏，遵循课改精神，依据考纲，以现行新教材为蓝本进行编写。在内容选材和方法问题设计上，按中考要求精心挑选，科学设计；内容丰富，难易适度；关注社会热点，追踪高考动向；创设新情景，加强开放性、探究性问题的研究，注重方法、技巧、规律的总结，培养学生的求异思维和创新思维。

2.技法选取，典型实用

筛选实用、典型、有一定难度的解题方法，按照先一般后特殊，先简单后复杂，先基础后综合的顺序排列，有利于您循序渐进地学习各种学习方法。

3.贯穿学法，思维升华

在讲解和训练的过程中，适时总结方法规律，优化思维模式，跨越思维误区；并科学配以真题训练，通过完整的答案和缜密的解析，提升思维的高度，巧学妙思，点拨学法，拓宽视野，提高应用知识的能力，形成正确而巧妙的解题思路。

4.体现方法，突出规律

强化学习方法，注重总结规律，遵循了循序渐进、由浅入深、由易到难的原则，力求讲解透彻，方法与例题结合，授之以渔，全面提升您的综合技能。

5.方法导学，提高效率

同学们在学习过程中，往往因不知从何下手而在犹豫中浪费了很多宝贵的学习时间，既没有效率，又丧失了学习信心，而《怎样解题》让您明确学习方向，正确选择学习方法，使您以最少的时间找到学习的最佳方法，实现学习的最高效率。

本丛书帮您整合传统与现代的学习方法——给您以方法之“舟”；让您提升系统应用知识的能力——给您以“应用之径”。

一册在手，解题不愁；一套在手，中考无忧。

目　录

第一章

与角平分线有关的辅助线

第一节　角边等，造全等

方法技巧

在角的两边上取相等的线段，构造全等三角形.

如图 1-1-1，$\angle 1=\angle 2$，如取 $OE=OF$，并连结 DE、DF，则有 $\triangle OED\cong\triangle OFD$，从而为我们证题创造了线段、角相等的条件.

另外，将角的一边以角的平分线为轴翻转 180°后与另一边重合，用这种方法可构造全等三角形，使条件与结论的关系明朗化.

如图 1-1-2，AB 为 $\angle MAN$ 的平分线，将 $\triangle ABC$ 以直线 AB 为轴翻转 180°，使 C 点落在 C'（即在 AN 上截取 $AC'=AC$）处使得 $\triangle ABC'\cong\triangle ABC$.

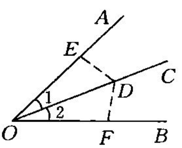

图 1-1-1

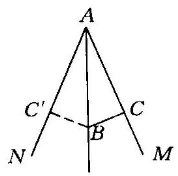

图 1-1-2

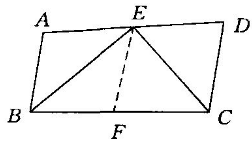

图 1-1-3

例　如图 1-1-3，$AB\parallel CD$，BE 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle BCD$，点 E 在 AD 上，求证：$BC=AB+CD$.

分析

在 BC 上截取 $BF=AB$，连结 EF，先证 $\triangle ABE\cong\triangle FBE$，再证 $\triangle CDE\cong\triangle CFE$. 这种思路，其本质是利用 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FBE$ 关于直线 BE 对称，即以 BE 所在的直线为轴，将 $\triangle ABE$ 翻折 180°而得到 $\triangle FBE$. 这种方法是有角平分线时经常用到的，这是一条重要的辅助线.

证明　在直线 BC 上截取 $BF=AB$，连结 EF.

$$\left.\begin{aligned}&AB=BF,\\&\angle ABE=\angle FBE,\\&BE=BE\end{aligned}\right\}\Rightarrow\triangle ABE\cong\triangle FBE\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\angle BAE=\angle BFE,\\&AB\parallel CD\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\angle D=\angle EFC,\\ \Rightarrow&\angle FCE=\angle DCE,\\ &CE=CE\end{aligned}\right\}\Rightarrow \triangle CDE\cong\triangle CFE\Rightarrow CF=CD\Rightarrow BC=BF+CF=AB+CD.$$

综合演练

1. (天津中考)如图 1-1-4 所示,在$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,$\angle ABC=60°$,BD平分$\angle ABC$,若$AD=6$,则$CD=$________.

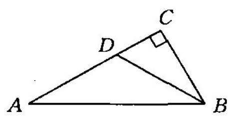

图 1-1-4

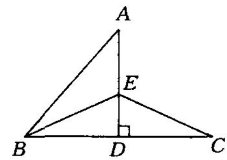

图 1-1-5

2. (陕西中考)如图 1-1-5,$\angle ABC=50°$,AD垂直平分线段BC于点D,$\angle ABC$的平分线BE交AD于点E,连结EC,则$\angle AEC$的度数是________.

3. 如图 1-1-6,有一块直角三角形纸片,两直角边$AC=6$ cm,$BC=8$ cm,现将直角边AC沿直线AD折叠,使它落在斜边AB上,且与AE重合,则CD等于(　　)

A. 2 cm　　B. 3 cm

C. 4 cm　　D. 5 cm

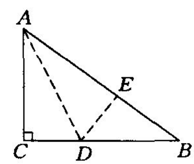

图 1-1-6

答案和提示

1. 3　2. 115°　3. B

第二节　点分线,垂两边

方法技巧

过角平分线上一点向角两边作垂线段,利用角平分线上的点到角两边距离相等的性质来证明问题

例　已知:如图 1-2-1,$\angle 1=\angle 2$,P为BN上一点,且$AB+BC=2BD$,求证:$\angle BAP+\angle BCP=180°$.

分析

证两个角的和为180°，由$PD\perp BC$，$\angle 1=\angle 2$，想到过P向BA作垂线PE，有$PE=PD$，$BE=BD$，又由$AB+BC=2BD$，得$AE=CD$，故$\triangle APE\cong\triangle CPD$，从而有$\angle EAP=\angle PCB$，故问题得证.

证明 过P点作$PE\perp BA$于E，

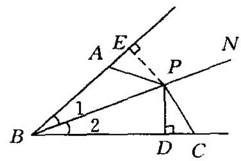

图 1-2-1

$\because PD\perp BC$，$\angle 1=\angle 2$，$\therefore PE=PD$，

在$Rt\triangle BPE$和$Rt\triangle BPD$中，

$\begin{cases} BP=BP(\text{公共边}), \\ PE=PD(\text{已证}). \end{cases}$

$\therefore Rt\triangle BPE\cong\triangle Rt\triangle BPD(HL)$，$\therefore BE=BD$.

$\because AB+BC=2BD$，$BC=CD+BD$，$AB=BE-AE$，

$\therefore AE=CD$. $\because PE\perp BE$，$PD\perp BC$，$\therefore \angle PEB=\angle PDC=90°$.

在$\triangle PEA$和$\triangle PDC$中，$\begin{cases} PE=PD(\text{已证}), \\ \angle PEB=\angle PDC(\text{已证}), \\ AE=CD(\text{已证}), \end{cases}$ $\therefore \triangle PEA\cong\triangle PDC(SAS)$.

$\therefore \angle PCB=\angle EAP$（全等三角形对应角相等）.

又$\because \angle BAP+\angle EAP=180°$，$\therefore \angle BAP+\angle BCP=180°$.

规律总结：有角平分线时，过角平分线上的一点作一边的垂线是一条重要的辅助线.

综合演练

1.（安徽中考）已知：点O到$\triangle ABC$的两边AB、AC所在直线的距离相等，且$OB=OC$. 如图 1-2-2 若点O在BC上，求证：$AB=AC$.

2. 已知：在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，AD平分$\angle CAB$，$CD=1.5$，$DB=2.5$. 求AC.

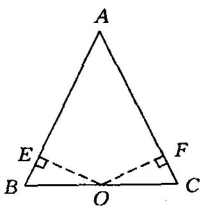

图 1-2-2

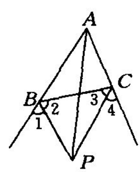

图 1-2-3

3. 已知：如图 1-2-3，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求证：AP平分$\angle BAC$.

答案和提示

1. 证明：过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E，作 $OF\perp AC$ 于点 F，则 $OE=OF$. 连结 AO，则 AO 是 $\angle BAC$ 的平分线，由题意知：$OB=OC$，
$\because$ AO 也是 $\triangle ABC$ 的中线，$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle OEB\cong\mathrm{Rt}\triangle OFC$，
$\therefore$ $\angle B=\angle C$，$\therefore$ $AB=AC$.
2. 解：过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E，则 $DE=DC=1.5$，根据勾股定理知 $BD^2=DE^2+BE^2$，得 $BE=2$. 设 $AC=x$，则 $AE=x$，根据勾股定理有 $x^2+4^2=(x+2)^2$. 解得 $x=3$. 所以 $AC=3$.
3. 证明：过 P 作 $PD\perp AB$，$PE\perp BC$，$PF\perp AC$，垂足分别为 D、E、F，则 $PD=PE$，$PE=PF$，有 $PD=PF$，那么点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上，即 AP 平分 $\angle BAC$.

第三节　角分垂，等腰归

方法技巧

从角的一边上的一点作角平分线的垂线，使之与另一边相交，则截得一个等腰三角形，垂足为底边上的中点，该角平分线又成为底边上的中线和高，以利用中位线的性质与等腰三角形三线合一的性质（若题目条件中有垂直于角平分线的线段，则延长该线段止于角的另一边）

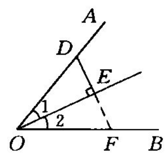

图 1-3-1

如图 1-3-1，$\angle 1=\angle 2$，$DE\perp OE$ 于 E，如延长 DE 交 OB 于 F，则 $\triangle OED\cong\triangle OEF$，有 $DE=EF=\dfrac{1}{2}DF$，$OD=OF$，$\angle ODF=\angle OFD$ 等结论.

例 1　如图 1-3-2，已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=3\angle C$，$\angle 1=\angle 2$，$BE\perp AE$.

求证：$AC-AB=2BE$.

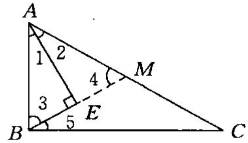

图 1-3-2

证明　延长 BE 交 AC 于 M，
$\because$ $AE\perp BE$，$\angle 1=\angle 2$，
$\therefore$ $\angle 3=\angle 4$，$AB=AM$，$BE=EM$，
$\therefore$ $AC-AB=AC-AM=MC$，$BM=2BE$.

又∵ $\angle 3=\angle 4=\angle 5+\angle C$,

$\angle ABC=\angle 3+\angle 5=3\angle C$,∴ $\angle 5+\angle C+\angle 5=3\angle C$,

∴ $\angle 5=\angle C$,∴ $MB=MC$,∴ $AC-AB=2BE$.

规律总结:延长 BE 可与 AC 相交,则能构成等腰三角形,利用等腰三角形性质得出“三线合一”.

例 2 已知:如图 1-3-3,在△ABC 中,AD 平分$\angle BAC$,$AD=AB$,$CM\perp AD$ 交 AD 的延长线于 M.求证:$AM=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

分析

题设中给出角平分线 AD,自然想到以 AD 为轴作对称变换,作△ABD 关于 AD 的对称△AED,然后只需证 $DM=\frac{1}{2}EC$ 即可,另外,由求证的结果 $AM=\frac{1}{2}(AB+AC)$,即 $2AM=AB+AC$,也可尝试作△ACM 关于 CM 的对称△FCM,然后只需证 $DF=CF$ 即可.

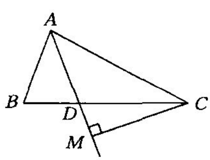

图 1-3-3

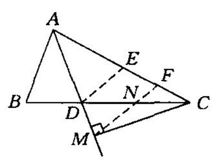

图 1-3-4

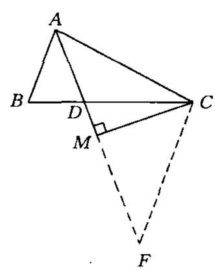

图 1-3-5

证法 1 如图 1-3-4,以 AD 为轴作△ABD 的对称△AED,则

$AE=AB=AD$,$\angle B=\angle ADB=\angle ADE=\angle AED$.

由已知有$\angle BAD=\angle CAD$,因为 AE 与 AC 共线,

取 DC 中点 N,连结 MN 并延长交 AC 于 F 点.

在 Rt△DMC 中,$DN=MN=CN$,

所以$\angle NMD=\angle NDM=\angle ADB=\angle ADE$,

$MF/\!/DE$,$DM=EF=FC$.

故 $AM=AD+DM=\frac{1}{2}(AB+AE)+\frac{1}{2}EC=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

证法 2 如图 1-3-5,以 CM 为轴作$\triangle ACM$ 的对称$\triangle FCM$.

因为 $AB=AD$,所以只需证 $FD=FC$.

因为$\triangle FCM\cong\triangle ACM$,所以$\angle F=\angle CAM$,$FC=AC$,

而$\angle CAM=\angle BAD$,即$\angle F=\angle BAD$,则 $FC/\!/AB$.

所以$\angle B=\angle FCD$,且已有$\angle B=\angle ADB=\angle FDC$,

即$\angle FCD=\angle FDC$,则 $FC=FD$.

故 $AM=\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}(AD+FD)=\frac{1}{2}(AB+FC)=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

规律总结:当三角形中存在与角平分线垂直的线段时,把它延长可得到中点和线段相等的关系,从而与三角形中位线或三角形全等建立起联系.

综合演练

1. 已知:在$\triangle ABC$ 中,$AB=5$,$AC=3$,D 是 BC 中点,AE 是$\angle BAC$ 的平分线,且 $CE\perp AE$ 于 E,连结 DE. 求 DE.
2. 已知:在$\triangle ABC$ 中,BD、CE 是$\triangle ABC$ 的角平分线,$AF\perp CE$ 于 F,$AG\perp BD$ 于 G,连结 FG. 求证:$FG/\!/BC$.
3. 已知:如图 1-3-6,$\angle 1=\angle 2$,$CF\perp AE$ 于 F,$BE\perp AE$ 于 E,G 为 BC 中点,连结 GE、GF. 求证:$GF=GE$.

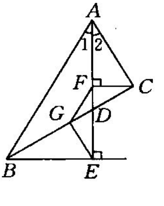

图 1-3-6

答案和提示

1. $DE=1$.
2. 证明:分别延长 AF、AG 交 BC 于 N、M,则$\triangle AFC\cong\triangle NFC$,有 $AF=FN$. 同理 $AG=GM$,所以 $FG/\!/BC$.
3. 证明:延长 CF 交 AB 于 N,延长 BE 交 AC 的延长线于 M,则$\triangle ACF\cong\triangle ANF$,$\triangle ABE\cong\triangle AME$,有 $CF=NF$,$BE=ME$. 又 $BG=CG$,所以 $FG/\!/AB$,$GE/\!/AC$,从而有$\angle 1=\angle GFE$,$\angle 2=\angle GEA$. 又因为$\angle 1=\angle 2$,所以$\angle GEA=\angle GFE$,所以 $GF=GE$.

第四节　角分平，等腰呈

方法技巧

有角平分线时，常过角平分线上一点作角的一边的平行线，从而构造等腰三角形.

如图 1-4-1，$\angle 1=\angle 2$，$AC/\!/OB$，则有$\angle 3=\angle 2$，故$\angle 1=\angle 3$，从而有 $AO=AC$.

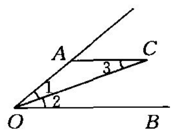

图 1-4-1

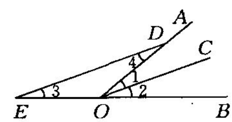

图 1-4-2

如图 1-4-2，$\angle 1=\angle 2$，$OC/\!/DE$，故由

$$\left.\begin{array}{l}OC/\!/DE\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\angle 1=\angle 4,\\ \angle 2=\angle 3,\end{array}\right.\\ \qquad\qquad\ \angle 1=\angle 2\end{array}\right\}\Rightarrow\angle 3=\angle 4\Rightarrow OE=OD.$$

此基本图形可用下式表示

$$\boxed{\text{角平分线}+\text{平行线}\Rightarrow\text{等腰三角形}}$$

例　已知：如图 1-4-3，在$\triangle ABC$（$AB\neq AC$）中，D、E 在 BC 上，且 $DE=EC$，过 D 作$DF/\!/BA$交 AE 于点 F，$DF=AC$. 求证：AE 平分$\angle BAC$.

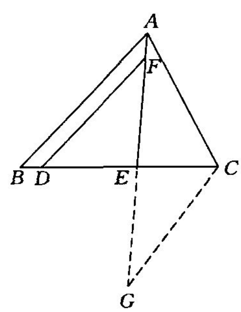

图 1-4-3

证明　延长 FE 到 G，使 $EG=EF$，连结 CG. 在$\triangle DEF$ 和$\triangle CEG$ 中，$ED=EC$，$\angle DEF=\angle CEG$，$FE=EG$，

$\therefore$ $\triangle DEF\cong\triangle CEG$，$\therefore$ $DF=GC$，$\angle DFE=\angle G$.

$\because$ $DF=AC$，$\therefore$ $GC=AC$.

$\therefore$ $\angle G=\angle CAE$.

$\because$ $DF/\!/AB$，$\therefore$ $\angle DFE=\angle BAE$.

$\therefore$ $\angle BAE=\angle CAE$，即 AE 平分$\angle BAC$.

综合演练

1. 如图 1-4-4，已知在$\triangle ABC$中，AD平分$\angle BAC$，$BD\perp AD$，$DE/\!/AC$，求证：$BE=AE$.

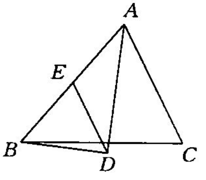

图 1-4-4

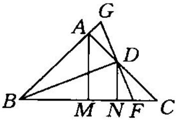

图 1-4-5

2. 如图 1-4-5，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，BD、AM分别是$\angle ABC$、$\angle BAC$的平分线，$DN\perp BC$，$GF\perp BD$. 求证：$MN=\frac{1}{4}BF$.

答案和提示

1. 证明：如图 1-4-6，延长AC、BD交于F，因AD平分$\angle BAF$，$AD\perp BF$，则D为等腰$\triangle ABF$的底边BF的中点. 又$DE/\!/AC$，$\therefore BE=AE$.

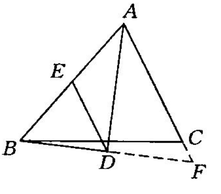

图 1-4-6

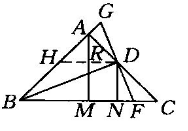

图 1-4-7

2. 证明：如图 1-4-7，作$DH/\!/BC$，交AB于H，交AM于R，

$\because$ $\triangle ABC$为等腰三角形，且AM平分$\angle BAC$，

$\therefore$ M为BC中点，且$AM\perp BC$.

$\because$ BD平分$\angle ABC$，且$GF\perp BD$，

$\therefore$ $\triangle FGB$为等腰三角形，且D为FG的中点.

又$\because$ $HD/\!/BF$，$\therefore$ $HD=\frac{1}{2}BF$，且R为HD的中点，即$HD=2RD$，

可证四边形$RMND$为矩形，于是$RD=MN$，$\therefore$ $MN=RD=\frac{1}{2}HD=\frac{1}{4}BF$.

第五节　角平分线＋直角⇒相似三角形

方法技巧

有角平分线时，可将等角放到直角三角形中，构造相似三角形

如图 1-5-1，已知$\angle 1=\angle 2$，若过 AO 上点 C 作 $CD\perp ON$ 于 D，过 OB 上点 E 作 $EF\perp ON$ 于 F，则有$\triangle OCD\backsim\triangle OEF$.

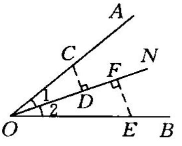

图 1-5-1

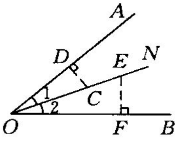

图 1-5-2

如图 1-5-2，已知$\angle 1=\angle 2$，若分别过 ON 上点 C、E 作 $CD\perp OA$ 于 D，$EF\perp OB$ 于 F，则有$\triangle CDO\backsim\triangle EFO$.

以上基本图形可用下式表示

$\boxed{\text{角平分线＋直角⇒相似三角形}}$

例　如图 1-5-3，在$\triangle ABC$ 中，AD 是$\angle A$ 的平分线，AD 的垂直平分线交 AD 于 E，交 BC 的延长线于 F.

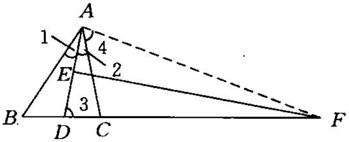

图 1-5-3

求证：$\triangle ABF\backsim\triangle CAF$.

证明　连结 AF，$\because$ EF 是 AD 的垂直平分线，

$\therefore$ $FD=FA$，$\therefore$ $\angle 3=\angle FAD$，

又$\because$ $\angle B=\angle 3-\angle 1$，$\therefore$ $\angle 4=\angle FAD-\angle 2$. 而$\angle 1=\angle 2$，$\therefore$ $\angle B=\angle 4$.

又$\because$ $\angle AFB=\angle CFA$，$\therefore$ $\triangle ABF\backsim\triangle CAF$.

规律总结：有角平分线，连结 AF，则形成$\angle AEF=90°$，根据两角对应相等，得出两三角形相似.

综合演练

1. 已知在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，AD平分$\angle CAB$，交BC于D，$CD:BD=3:5$，$AB=10$. 求BC的长.

2. 已知：如图 1-5-4，$\angle XOY=120^\circ$，OE平分$\angle XOY$，直线PRQ分别交OX、OE、OY于点P、R、Q.

   求证：$\dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ}=\dfrac{1}{OR}$.

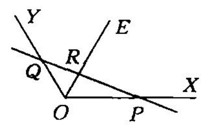

图 1-5-4

答案和提示

1. 解法 1：过D作$DE\perp AB$于E，则$CD=DE$，易得$\triangle BDE\backsim\triangle BAC$，有$\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{5}$.

   又有$AB=10$，故$AC=6$，所以$BC=8$.

   解法 2：过C、B分别作$CN\perp AD$于N，$BM\perp AD$的延长线于M，

   则有$CN/\!/BM$，故$\dfrac{CN}{BM}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{3}{5}$.

   又由$\triangle ACN\backsim\triangle ABM$，

   有$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CN}{BM}=\dfrac{3}{5}$，故$AC=6$，则$BC=8$.

2. 证法 1：过P作$PN/\!/OR$交QO的延长线于N，则有

$$PN/\!/OR\Rightarrow\left.\begin{cases}\dfrac{OR}{OQ}=\dfrac{PN}{QN},\\[2mm]\dfrac{OR}{PN}=\dfrac{OQ}{QN},\\[2mm]\left.\begin{array}{l}\angle QOR=\angle N=60^\circ,\\\angle ROP=\angle OPN=60^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\angle N=\angle OPN=60^\circ\Rightarrow ON=OP=NP\end{cases}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{OR}{OQ}+\frac{OR}{OP}=\frac{PN}{QN}+\frac{OQ}{QN}=\frac{ON+OQ}{QN}=1\Rightarrow\frac{1}{OQ}+\frac{1}{OP}=\frac{1}{OR}.$$

   证法 2：过P作QO的平行线.（略）

   证法 3：过Q作OR或OP的平行线也能证出来.（略）