

◎根据教育部最新审定教材编写◎



怎样解题

·新教材·

初中平面几何 添加辅助线的方法与技巧

CHUZHONGPINGMIANJIHE
TIANJIAFUZHUXIANGDEFANGFAYUJIQIAO

总主编 / 薛金星

第六次修订版



北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE(GROUP)



北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE



酒文化

中国酒文化 与世界酒文化的差异与比较

◎ 陈建伟 著

◎ 陈建伟 编

◎根据教育部最新审定教材编写◎



初中平面几何添加辅助线的方法与技巧

总主编 薛金星

本书主编 马晓蕊 王雨涛

第六次修订版



北京出版社出版集团
BEIJING PUBLISHING HOUSE(GROUP)



北京教育出版社
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE



诚邀全国名师加盟

金星国际教育集团专注于少儿、小学、中学和大学教育类图书的研发策划与出版发行工作,现诚邀天下名师加盟“全国名师俱乐部”,每县拟选老师1人,俱乐部会员将成为本公司长期签约作者,享受优惠稿酬,并获长期购书优惠、赠书和及时提供各类教学科研信息等优惠服务。联系地址:山东省潍坊市安顺路4399号 金星大厦 邮政信箱:山东省潍坊市 019755 号信箱 邮编:261021

恳请各位名师对我们研发、出版的图书提出各类修订建议,并提供相应的文字材料。我们将根据建议采用情况及时支付给您丰厚报酬。

诚征各位名师在教学过程中发现的好题、好方法、好教案、好学案等教学与考试研究成果,一旦采用,即付稿酬。

诚邀各位名师对我们的产品质量及营销建言献策。我们将根据贡献大小,分别给予不同形式的奖励。同时,我们也真诚欢迎广大一线师生来信、来函、来电、上网与我们交流沟通,为确保信息畅通,我们特设以下几个交流平台,供您选用:

图书邮购热线:(010)61743009 61767818

图书邮购地址:北京市天通苑邮局 6503 号信箱 邮政编码:102218

图书邮购网址:<http://www.firstedubook.com>

质量监督热线:(0536)2223237 王老师

企业网站:<http://www.bjjxsy.com>

金星教学考试网:<http://www.jxjxks.com>

图书在版编目(CIP)数据

初中平面几何添加辅助线的方法与技巧 / 薛金星主编.

—北京: 北京教育出版社, 2007.5

(怎样解题)

ISBN 978-7-5303-3999-2

I. 初... II. 薛... III. 几何课—初中—解题 IV. G634.635

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 073259 号

怎样解题·初中平面几何添加辅助线的方法与技巧

ZHENYANG JIETI·CHUZHONG PINGMIAO JIHE TIANJIA FUZHUXIANGE FANGFA YU JIQIAO

总主编 薛金星

北京出版社出版集团 出版

北京教育出版社

(北京北三环中路 6 号) 邮政编码:100120

质量投诉电话:(010)61743009 62380997 58572393

网 址:www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

各地书店经销 北京泽宇印刷有限公司

890×1240 32 开本 6.5 印张 270 000 字

2009 年 3 月第 5 版 2009 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5303-3999-2/G · 3929

定价:11.80 元



再
版
前
言

《怎样解题》丛书全面体现创新教育思想，秉承“教学研究来源于教学、服务于教学”的编写理念，本着真正教给学生学会“怎样解题”的目的，遵循实用性、针对性和可操作性的原则，组织了一批特高级骨干教师和教研员反复研究论证，精心打造而成。

本丛书具有五大亮点：

1. 与时俱进，力求创新

本丛书紧扣时代脉搏，遵循课改精神，依据考纲，以现行新教材为蓝本进行编写。在内容选材和方法问题设计上，按中考要求精心挑选，科学设计，内容丰富，难易适度；关注社会热点，追踪高考动向，创设新情景，加强开放性、探究性问题的研究，注重方法、技巧、规律的总结，培养学生的求异思维和创新思维。

2. 技法选取，典型实用

筛选实用、典型、有一定难度的解题方法，按照先一般后特殊，先简单后复杂，先基础后综合的顺序排列，有利于您循序渐进地学习各种学习方法。

3. 贯穿学法，思维升华

在讲解和训练的过程中，适时总结方法规律，优化思维模式，跨越思维误区，并科学配以真题训练，通过完整的答案和缜密的解析，提升思维的高度；巧学妙思，点拨学法，拓宽视野，提高应用知识的能力，形成正确而巧妙的解题思路。

4. 体现方法，突出规律

强化学习方法，注重总结规律，遵循了循序渐进、由浅入深、由易到难的原则，力求讲解透彻，方法与例题结合，授之以渔，全面提升您的综合技能。

5. 方法导学，提高效率

同学们在学习过程中，往往因不知从何下手而在犹豫中浪费了很多宝贵的学习时间，既没有效率，又丧失了学习信心，而《怎样解题》让您明确学习方向，正确选择学习方法，使您以最少的时间找到学习的最佳方法，实现学习的最高效率。

本丛书帮您整合传统与现代的学习方法——给您以方法之“舟”，让您提升系统应用知识的能力——给您以“应用之径”。

一册在手，解题不愁；一套在手，中考无忧。

目 录

| | | |
|------------|------------------------|---------------|
| 第一章 | 与角平分线有关的辅助线 | (1) |
| 第一节 | 角边等,造全等 | (1) |
| 第二节 | 点分线,垂两边 | (1) |
| 第三节 | 角分垂,等腰归 | (4) |
| 第四节 | 角分平,等腰呈 | (7) |
| 第五节 | 角平分线+直角⇒相似三角形 | (9) |
| 第六节 | 与圆周角(圆心角)平分线有关的辅助线 | (11) |
| 第二章 | 有中点时常用的引辅助线方法 | (15) |
| 第一节 | 有中线,可延长 | (15) |
| 第二节 | 作斜边中线,利用斜边中线性质证题 | (20) |
| 第三节 | 有中点,构造中位线 | (22) |
| 第四节 | 有底中点,连中线(造中垂) | (25) |
| 第五节 | 与梯形中点有关的辅助线 | (27) |
| 第六节 | 有弧中点时常用的引辅助线方法 | (31) |
| 第七节 | 有弦中点时常用的引辅助线方法 | (34) |
| 第三章 | 与垂直有关的辅助线 | (38) |
| 第一节 | 与三角形的高有关的辅助线 | (38) |
| 第二节 | 构造射影型 | (40) |
| 第三节 | 有垂直,造垂直 | (42) |
| 第四节 | 有垂直,造中垂 | (45) |
| 第五节 | 圆中与垂线有关的辅助线 | (47) |
| 第四章 | 用分大、补小、化等法证不等关系 | (50) |
| 第一节 | 线段的截长补短法 | (50) |
| 第二节 | 角的截大补小法 | (53) |
| 第三节 | 弧的截长补短法 | (55) |
| 第五章 | 折半加倍法 | (57) |
| 第一节 | 角的折半加倍法 | (57) |

| | |
|---|----------------|
| 第二节 线段的折半加倍法 | (60) |
| 第三节 弧的折半加倍法 | (62) |
| 第六章 有垂直平分线时常用的引辅助线方法 | (64) |
| 第七章 平移引辅助线法 | (66) |
| 第八章 旋转引辅助线法 | (70) |
| 第九章 对称引辅助线法 | (73) |
| 第十章 证线段不等关系常用的引辅助线方法 | (76) |
| 第十一章 证角不等关系常用的辅助线 | (78) |
| 第十二章 与三角形有关的辅助线 | (80) |
| 第一节 等腰三角形常用的辅助线 | (80) |
| 第二节 直角三角形常用的辅助线 | (85) |
| 第三节 全等三角形的辅助线 | (88) |
| 第四节 相似三角形中常用的辅助线 | (100) |
| 第十三章 四边形中的辅助线 | (114) |
| 第一节 一般四边形常用的辅助线 | (114) |
| 第二节 多边形中常用的辅助线 | (120) |
| 第三节 平行四边形常用的辅助线(矩形、菱形、正方形与其相同) | (124) |
| 第四节 有关梯形的辅助线 | (134) |
| 第十四章 有关特殊角及三角函数的辅助线 | (148) |
| 第十五章 有关圆的辅助线 | (158) |
| 第一节 与圆的性质有关的辅助线 | (158) |
| 第二节 与切线有关的辅助线 | (174) |
| 第三节 与两圆有关的辅助线 | (193) |

第一章

与角平分线有关的辅助线

第一节 角边等，造全等

方法技巧

在角的两边上取相等的线段，构造全等三角形。

如图 1-1-1， $\angle 1 = \angle 2$ ，如取 $OE = OF$ ，并连结 DE 、 DF ，则有 $\triangle OED \cong \triangle OFD$ ，从而为我们证题创造了线段、角相等的条件。

另外，将角的一边以角的平分线为轴翻转 180° 后与另一边重合，用这种方法可构造全等三角形，使条件与结论的关系明朗化。

如图 1-1-2， AB 为 $\angle MAN$ 的平分线，将 $\triangle ABC$ 以直线 AB 为轴翻转 180° ，使 C 点落在 C' （即在 AN 上截取 $AC' = AC$ ）处使得 $\triangle ABC' \cong \triangle ABC$ 。

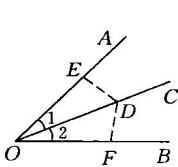


图 1-1-1

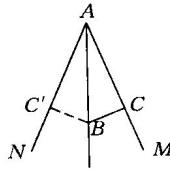


图 1-1-2

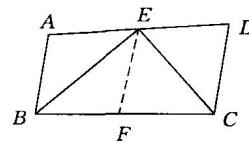


图 1-1-3

例 如图 1-1-3， $AB \parallel CD$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ， CE 平分 $\angle BCD$ ，点 E 在 AD 上，求证： $BC = AB + CD$ 。

分析

在 BC 上截取 $BF = AB$ ，连结 EF ，先证 $\triangle ABE \cong \triangle FBE$ ，再证 $\triangle CDE \cong \triangle CFE$ 。这种思路，其本质是利用 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FBE$ 关于直线 BE 对称，即以 BE 所在的直线为轴，将 $\triangle ABE$ 翻折 180° 而得到 $\triangle FBE$ 。这种方法是有角平分线时经常用到的，这是一条重要的辅助线。

证明 在直线 BC 上截取 $BF = AB$ ，连结 EF 。

$$\left. \begin{array}{l} AB = BF, \\ \angle ABE = \angle FBE, \\ BE = BE \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle FBE \Rightarrow \angle BAE = \angle BFE, \quad AB \parallel CD \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle D = \angle EFC, \\ \Rightarrow \angle FCE = \angle DCE, \\ CE = CE \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CDE \cong \triangle CFE \Rightarrow CF = CD \Rightarrow BC = BF + CF = AB + CD.$$

综合演练

1. (天津中考)如图 1-1-4 所示,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle ABC=60^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, 若 $AD=6$, 则 $CD=$ _____.

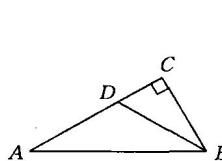


图 1-1-4

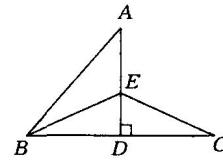


图 1-1-5

2. (陕西中考)如图 1-1-5, $\angle ABC=50^\circ$, AD 垂直平分线段 BC 于点 D , $\angle ABC$ 的平分线 BE 交 AD 于点 E , 连结 EC , 则 $\angle AEC$ 的度数是 _____.

3. 如图 1-1-6, 有一块直角三角形纸片, 两直角边 $AC=6$ cm, $BC=8$ cm, 现将直角边 AC 沿直线 AD 折叠, 使它落在斜边 AB 上, 且与 AE 重合, 则 CD 等于()

- A. 2 cm B. 3 cm
C. 4 cm D. 5 cm

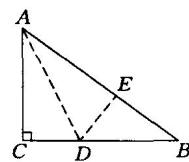


图 1-1-6

答案和提示

1. 3 2. 115° 3. B

第二节 点分线, 垂两边

方法技巧

过角平分线上一点向角两边作垂线段, 利用角平分线上的点到角两边距离相等的性质来证明问题

例 已知: 如图 1-2-1, $\angle 1=\angle 2$, P 为 BN 上一点, 且 $AB+BC=2BD$, 求证: $\angle BAP+\angle BCP=180^\circ$.

分析

证两个角的和为 180° ,由 $PD \perp BC$, $\angle 1 = \angle 2$,想到过P向BA作垂线PE,有 $PE = PD$, $BE = BD$,又由 $AB + BC = 2BD$,得 $AE = CD$,故 $\triangle APE \cong \triangle CPD$,从而有 $\angle EAP = \angle PCB$,故问题得证.

证明: 过P点作 $PE \perp BA$ 于E,

$\because PD \perp BC$, $\angle 1 = \angle 2$, $\therefore PE = PD$,

在 $\text{Rt}\triangle BPE$ 和 $\text{Rt}\triangle BPD$ 中,

$\left\{ \begin{array}{l} BP = BP(\text{公共边}), \\ PE = PD(\text{已证}). \end{array} \right.$

$\therefore \text{Rt}\triangle BPE \cong \text{Rt}\triangle BPD(\text{HL})$, $\therefore BE = BD$.

$\because AB + BC = 2BD$, $BC = CD + BD$, $AB = BE - AE$,

$\therefore AE = CD$. $\because PE \perp BE$, $PD \perp BC$, $\therefore \angle PEB = \angle PDC = 90^\circ$.

在 $\triangle PEA$ 和 $\triangle PDC$ 中, $\left\{ \begin{array}{l} PE = PD(\text{已证}), \\ \angle PEB = \angle PDC(\text{已证}), \\ AE = CD(\text{已证}), \end{array} \right.$ $\therefore \triangle PEA \cong \triangle PDC(\text{SAS})$.

$\therefore \angle PCB = \angle EAP$ (全等三角形对应角相等).

又 $\because \angle BAP + \angle EAP = 180^\circ$, $\therefore \angle BAP + \angle BCP = 180^\circ$.

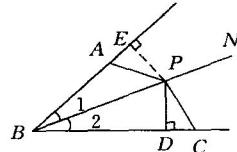


图 1-2-1

规律总结:有角平分线时,过角平分线上的一点作一边的垂线是一条重要的辅助线.

综合演练

1. (安徽中考)已知:点O到 $\triangle ABC$ 的两边AB、AC所在直线的距离相等,且 $OB = OC$.如图1-2-2若点O在BC上,求证: $AB = AC$.

2. 已知:在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle CAB$, $CD = 1.5$, $DB = 2.5$.求 AC .

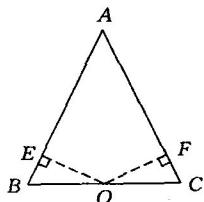


图 1-2-2

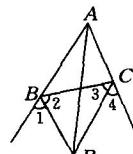


图 1-2-3

3. 已知:如图1-2-3, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.求证: AP 平分 $\angle BAC$.

答案和提示

- 证明：过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E , 作 $OF \perp AC$ 于点 F , 则 $OE=OF$. 连结 AO , 则 AO 是 $\angle BAC$ 的平分线, 由题意知: $OB=OC$,
 $\therefore AO$ 也是 $\triangle ABC$ 的中线, $\therefore \text{Rt}\triangle OEB \cong \text{Rt}\triangle OFC$,
 $\therefore \angle B=\angle C$, $\therefore AB=AC$.
- 解: 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 则 $DE=DC=1.5$, 根据勾股定理知 $BD^2=DE^2+BE^2$, 得 $BE=2$. 设 $AC=x$, 则 $AE=x$, 根据勾股定理有 $x^2+4^2=(x+2)^2$. 解得 $x=3$. 所以 $AC=3$.
- 证明: 过 P 作 $PD \perp AB$, $PE \perp BC$, $PF \perp AC$, 垂足分别为 D 、 E 、 F , 则 $PD=PE$, $PE=PF$, 有 $PD=PF$, 那么点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上, 即 AP 平分 $\angle BAC$.

第三节 角分垂, 等腰归

方法技巧

从角的一边上的一点作角平分线的垂线, 使之与另一边相交, 则截得一个等腰三角形, 垂足为底边上的中点, 该角平分线又成为底边上的中线和高, 以利用中位线的性质与等腰三角形三线合一的性质(若题目条件中有垂直于角平分线的线段, 则延长该线段止于角的另一边)

如图 1-3-1, $\angle 1=\angle 2$, $DE \perp OE$ 于 E , 如延长 DE 交 OB 于 F ,
 则 $\triangle OED \cong \triangle OEF$, 有 $DE=EF=\frac{1}{2}DF$, $OD=OF$, $\angle ODF=\angle OFD$ 等结论.

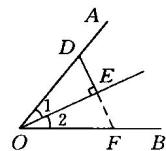


图 1-3-1

例 1 如图 1-3-2, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=3\angle C$, $\angle 1=\angle 2$, $BE \perp AE$.

求证: $AC-AB=2BE$.

证明 延长 BE 交 AC 于 M ,

$\because AE \perp BE$, $\angle 1=\angle 2$,
 $\therefore \angle 3=\angle 4$, $AB=AM$, $BE=EM$,
 $\therefore AC-AB=AC-AM=MC$, $BM=2BE$.

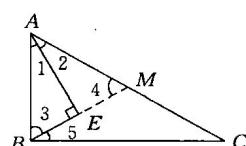


图 1-3-2

又 $\because \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 + \angle C$,

$\angle ABC = \angle 3 + \angle 5 = 3\angle C$, $\therefore \angle 5 + \angle C + \angle 5 = 3\angle C$,

$\therefore \angle 5 = \angle C$, $\therefore MB = MC$, $\therefore AC - AB = 2BE$.

规律总结:延长 BE 可与 AC 相交,则能构成等腰三角形,利用等腰三角形性质得出“三线合一”.

例 2 已知:如图 1-3-3,在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $AD = AB$, $CM \perp AD$ 交 AD 的延长线于 M . 求证: $AM = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

分析

题设中给出角平分线 AD ,自然想到以 AD 为轴作对称变换,作 $\triangle ABD$ 关于 AD 的对称 $\triangle AED$,然后只需证 $DM = \frac{1}{2}EC$ 即可,另外,由求证的结果 $AM = \frac{1}{2}(AB + AC)$,即 $2AM = AB + AC$,也可尝试作 $\triangle ACM$ 关于 CM 的对称 $\triangle FCM$,然后只需证 $DF = CF$ 即可.

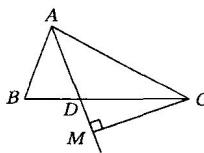


图 1-3-3

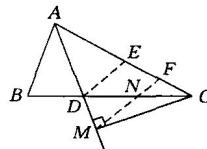


图 1-3-4

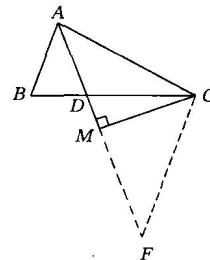


图 1-3-5

证法 1 如图 1-3-4,以 AD 为轴作 $\triangle ABD$ 的对称 $\triangle AED$,则

$AE = AB = AD$, $\angle B = \angle ADB = \angle ADE = \angle AED$.

由已知有 $\angle BAD = \angle CAD$,因为 AE 与 AC 共线,

取 DC 中点 N ,连结 MN 并延长交 AC 于 F 点.

在 $Rt\triangle DMC$ 中, $DN = MN = CN$,

所以 $\angle NMD = \angle NDM = \angle ADB = \angle ADE$,

$MF // DE$, $DM = EF = FC$.

故 $AM = AD + DM = \frac{1}{2}(AB + AE) + \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

证法2 如图1-3-5,以CM为轴作 $\triangle ACM$ 的对称 $\triangle FCM$.

因为 $AB = AD$,所以只需证 $FD = FC$.

因为 $\triangle FCM \cong \triangle ACM$,所以 $\angle F = \angle CAM$, $FC = AC$,

而 $\angle CAM = \angle BAD$,即 $\angle F = \angle BAD$,则 $FC \parallel AB$.

所以 $\angle B = \angle FCD$,且已有 $\angle B = \angle ADB = \angle FDC$,

即 $\angle FCD = \angle FDC$,则 $FC = FD$.

故 $AM = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}(AD + FD) = \frac{1}{2}(AB + FC) = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

*****规律总结:当三角形中存在与角平分线垂直的线段时,把它延长可得到中点和线段相等的关系,从而与三角形中位线或三角形全等建立起联系.*****

综合演练

- 已知:在 $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $AC=3$, D 是 BC 中点, AE 是 $\angle BAC$ 的平分线,且 $CE \perp AE$ 于 E ,连结 DE .求 DE .
- 已知:在 $\triangle ABC$ 中, BD 、 CE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $AF \perp CE$ 于 F , $AG \perp BD$ 于 G ,连结 FG .求证: $FG \parallel BC$.
- 已知:如图1-3-6, $\angle 1 = \angle 2$, $CF \perp AE$ 于 F , $BE \perp AE$ 于 E , G 为 BC 中点,连结 GE 、 GF .求证: $GF = GE$.

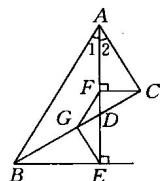


图1-3-6

答案和提示

1. $DE = 1$.

2. 证明:分别延长 AF 、 AG 交 BC 于 N 、 M ,则 $\triangle AFC \cong \triangle NFC$,有 $AF = FN$.同理 $AG = GM$,所以 $FG \parallel BC$.

3. 证明:延长 CF 交 AB 于 N ,延长 BE 交 AC 的延长线于 M ,则 $\triangle ACF \cong \triangle ANF$, $\triangle ABE \cong \triangle AME$,有 $CF = NF$, $BE = ME$.又 $BG = CG$,所以 $FG \parallel AB$, $GE \parallel AC$,从而有 $\angle 1 = \angle GFE$, $\angle 2 = \angle GEA$.又因为 $\angle 1 = \angle 2$,所以 $\angle GEA = \angle GFE$,所以 $GF = GE$.

第四节 角分平，等腰呈

方法技巧

有角平分线时，常过角平分线上一点作角的一边的平行线，从而构造等腰三角形。

如图 1-4-1, $\angle 1 = \angle 2$, $AC \parallel OB$, 则有 $\angle 3 = \angle 2$, 故 $\angle 1 = \angle 3$, 从而有 $AO = AC$.

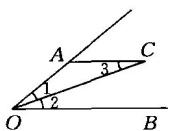


图 1-4-1

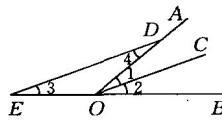


图 1-4-2

如图 1-4-2, $\angle 1 = \angle 2$, $OC \parallel DE$, 故由

$$OC \parallel DE \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle 1 = \angle 4, \\ \angle 2 = \angle 3, \\ \angle 1 = \angle 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \angle 3 = \angle 4 \Rightarrow OE = OD.$$

此基本图形可用下式表示

角平分线 + 平行线 \Rightarrow 等腰三角形

例 已知：如图 1-4-3，在 $\triangle ABC$ ($AB \neq AC$) 中，
D、E 在 BC 上，且 $DE = EC$ ，过 D 作 $DF \parallel BA$ 交 AE 于点 F，
 $DF = AC$. 求证： AE 平分 $\angle BAC$.

证明 延长 FE 到 G，使 $EG = EF$ ，连结 CG. 在
 $\triangle DEF$ 和 $\triangle CEG$ 中， $ED = EC$, $\angle DEF = \angle CEG$, $FE = EG$,
 $\therefore \triangle DEF \cong \triangle CEG$, $\therefore DF = GC$, $\angle DFE = \angle G$.
 $\because DF = AC$, $\therefore GC = AC$.
 $\therefore \angle G = \angle CAE$.
 $\because DF \parallel AB$, $\therefore \angle DFE = \angle BAE$.
 $\therefore \angle BAE = \angle CAE$, 即 AE 平分 $\angle BAC$.

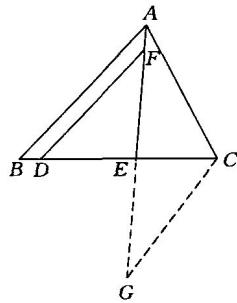


图 1-4-3

综合演练

1. 如图 1-4-4, 已知在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $BD \perp AD$, $DE \parallel AC$, 求证: $BE = AE$.

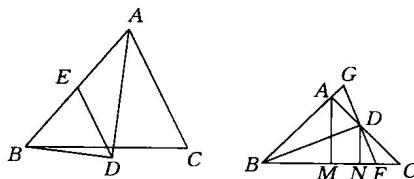


图 1-4-4

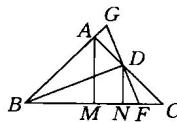


图 1-4-5

2. 如图 1-4-5, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, BD, AM 分别是 $\angle ABC, \angle BAC$ 的平分线, $DN \perp BC, GF \perp BD$. 求证: $MN = \frac{1}{4}BF$.

答案和提示

1. 证明: 如图 1-4-6, 延长 AC, BD 交于 F , 因 AD 平分 $\angle BAF$, $AD \perp BF$, 则 D 为等腰 $\triangle ABF$ 的底边 BF 的中点. 又 $DE \parallel AC$, $\therefore BE = AE$.

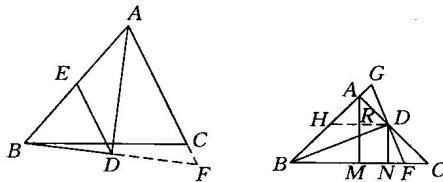


图 1-4-6

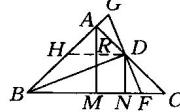


图 1-4-7

2. 证明: 如图 1-4-7, 作 $DH \parallel BC$, 交 AB 于 H , 交 AM 于 R ,
- $$\because \triangle ABC \text{ 为等腰三角形, 且 } AM \text{ 平分 } \angle BAC,$$
- $$\therefore M \text{ 为 } BC \text{ 中点, 且 } AM \perp BC.$$
- $$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC, \text{ 且 } GF \perp BD,$$
- $$\therefore \triangle FGB \text{ 为等腰三角形, 且 } D \text{ 为 } FG \text{ 的中点.}$$

又 $\because HD \parallel BF$, $\therefore HD = \frac{1}{2}BF$, 且 R 为 HD 的中点, 即 $HD = 2RD$,

可证四边形 $RMND$ 为矩形, 于是 $RD = MN$, $\therefore MN = RD = \frac{1}{2}HD = \frac{1}{4}BF$.

第五节 角平分线+直角 \Rightarrow 相似三角形

方法技巧

有角平分线时,可将等角放到直角三角形中,构造相似三角形

如图 1-5-1,已知 $\angle 1=\angle 2$,若过AO上点C作 $CD \perp ON$ 于D,过OB上点E作 $EF \perp ON$ 于F,则有 $\triangle OCD \sim \triangle OEF$.

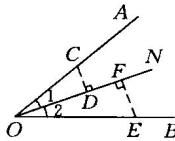


图 1-5-1

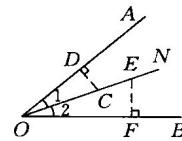


图 1-5-2

如图 1-5-2,已知 $\angle 1=\angle 2$,若分别过ON上点C、E作 $CD \perp OA$ 于D, $EF \perp OB$ 于F,则有 $\triangle CDO \sim \triangle EFO$.

以上基本图形可用下式表示

角平分线+直角 \Rightarrow 相似三角形

例 如图 1-5-3,在 $\triangle ABC$ 中,AD是 $\angle A$ 的平分线,AD的垂直平分线交AD于E,交BC的延长线于F.

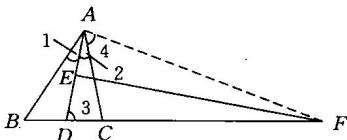


图 1-5-3

求证: $\triangle ABF \sim \triangle CAF$.

证明 连接AF, \because EF是AD的垂直平分线,

$\therefore FD=FA$, $\therefore \angle 3=\angle FAD$,

又 $\because \angle B=\angle 3-\angle 1$, $\therefore \angle 4=\angle FAD-\angle 2$. 而 $\angle 1=\angle 2$, $\therefore \angle B=\angle 4$.

又 $\because \angle AFB=\angle CFA$, $\therefore \triangle ABF \sim \triangle CAF$.

*****规律总结:有角平分线,连结AF,则形成 $\angle AEF=90^\circ$,根据两角对应相等,*****

*****得出两三角形相似.*****

综合演练

1. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, AD 平分 $\angle CAB$,交 BC 于 D ,

$CD:BD=3:5$, $AB=10$.求 BC 的长.

2. 已知:如图1-5-4, $\angle XOY=120^\circ$, OE 平分 $\angle XOY$,

直线 PRQ 分别交 OX 、 OE 、 OY 于点 P 、 R 、 Q .

$$\text{求证: } \frac{1}{OP} + \frac{1}{OQ} = \frac{1}{OR}.$$

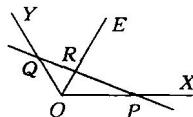


图 1-5-4

答案和提示

1. 解法1:过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ,则 $CD=DE$,易得 $\triangle BDE \sim \triangle BAC$,有 $\frac{DE}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}.$$

又有 $AB=10$,故 $AC=6$,所以 $BC=8$.

解法2:过 C 、 B 分别作 $CN \perp AD$ 于 N , $BM \perp AD$ 的延长线于 M ,

$$\text{则有 } CN \parallel BM, \text{ 故 } \frac{CN}{BM} = \frac{CD}{BD} = \frac{3}{5}.$$

又由 $\triangle ACN \sim \triangle ABM$,

$$\text{有 } \frac{AC}{AB} = \frac{CN}{BM} = \frac{3}{5}, \text{ 故 } AC=6, \text{ 则 } BC=8.$$

2. 证法1:过 P 作 $PN \parallel OR$ 交 QO 的延长线于 N ,则有

$$PN \parallel OR \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{OR}{OQ} = \frac{PN}{QN}, \\ \frac{OR}{PN} = \frac{OQ}{QN}, \\ \angle QOR = \angle N = 60^\circ, \\ \angle ROP = \angle OPN = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle N = \angle OPN = 60^\circ \Rightarrow ON = OP = NP$$

$$\Rightarrow \frac{OR}{OQ} + \frac{OR}{OP} = \frac{PN}{QN} + \frac{OQ}{QN} = \frac{ON+OQ}{QN} = 1 \Rightarrow \frac{1}{OQ} + \frac{1}{OP} = \frac{1}{OR}.$$

证法2:过 P 作 QO 的平行线.(略)

证法3:过 Q 作 OR 或 OP 的平行线也能证出来.(略)