SHUXUE

数学

几何·第二册

青年自学丛书

四川人民出版社

数 学

青年自学丛书　　V、2

数　　学

几　何·第二册

主　　编　成都市教育局
编写单位　成都市锦江中学
　　　　　成都市第十六中学
　　　　　成都市第十三中学
　　　　　成都市盐市口中学
执　　笔　钟策安　　朱文虎
　　　　　周泰金　　李维卓

四川人民出版社
一九七九年·成都

青年自学丛书　数学　几何·第二册

四川人民出版社出版　重庆印制第一厂印刷
四川省新华书店重庆发行所发行

开本787×1092毫米 1/32 印张15.875 字数350千
1979年12月第一版　1979年12月第一次印刷
印数：1—107,490册

书号：13118·24　定价：1.17 元

前　　言

“一定要极大地提高整个中华民族的科学文化水平”。这是英明领袖华主席、党中央高瞻远瞩地向全党、全军、全国各族人民发出的庄严号召。这是激动人心的动员令，这是气吞山河的宣言书，这同样是对广大青年亲切的召唤。

青年是我们的希望，是我们的未来。为了适应广大青年向科学进军的需要，我们组织编写了一套“青年自学丛书”，供广大青年自学，在校中学生课外阅读和中学教师参考。

这套“青年自学丛书”的数理化部分，共十七册，即《数学》八册（《代数》三册、《几何》三册、《三角》二册）、《物理》四册、《化学》五册。考虑到这套丛书具有自学的特点，使读者学后能系统掌握基础知识和基本技能，编写时注意了基本理论、基本概念、基本规律和学习中难点的讲述，例题较详，习题较多，循序渐进，由浅入深，文字上努力做到生动活泼，明白易懂。同时，参照全国中小学通用教材教学大纲精神，还介绍了一些先进知识。要求通过对丛书的自学，使读者能达到高中或略高于高中的程度。

这是“青年自学丛书”《数学》的《几何》读本。按照平面几何、解析几何、立体几何等方面的内容，编成三册。

这套丛书的编写出版，得到中共成都市委宣传部的亲切关怀和有关学校的支持。四川师范学院数学系协助了丛书《数学》读本的审稿工作。在此，我们谨致谢意。

由于时间仓促和编者水平所限，本书内容可能有缺点或错误。鉴于当前需要迫切，先以“试用本”出版，广泛听取意见。我们热忱欢迎广大读者批评指正，以便再版时修订。

编　者

一九七八年三月

目　录

第八章　圆、轨迹与作图

在第一册里，主要研究了有关直线和由直线所构成的几何图形（如平行线、三角形、四边形等）的性质，但也介绍了一点有关圆（特殊的曲线图形）的知识．例如1.11节到1.14节介绍了圆、弧和弦的定义，角的一度和弧的一度，圆心角的度数和它所对弧的度数的关系、同圆或等圆的半径（或直径）相等以及在2.12节和3.4节中，介绍了圆是轴对称图形又是中心对称图形等等．

圆在生产实践中，有着广泛的应用．例如传动轮是圆形，它不仅在传动中摩擦小，而且具有改变运动的方向作用．本章对有关圆的基本性质，点和圆、直线和圆、圆和圆的相互位置关系等给以比较系统的研究，最后研究一点轨迹与作图的基础知识，为进一步学习奠定基础．

一　圆

1．点和圆的位置关系

8.1　点和圆的相关位置

显然易知，点和圆的相关位置有三种：（1）点在圆内；（2）点在圆周上；（3）点在圆外．如图8—1．P点在圆O内，Q点在O圆周上，R点在圆O外．

设圆 O 的半径是 r， 点到圆心 O 的距离是 d，则点和圆的位置关系有下列性质定理和判定定理：

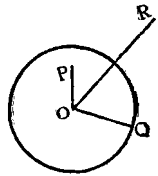

图 8—1

定理 1 （1）如果点在圆内时，则有 $d<r$；

（2） 如果点在圆周上时，则有 $d=r$；

（3） 如果点在圆外时，则有 $d>r$.

这个定理的证明比较容易，现仅把（1）的证明叙述于下，（2）和（3）的证明从略.

证：如图 8—2. 因 P 点在圆 O 内，故延长 OP 必与 O 圆周相交，令交点是 Q.

∵ $OQ=OP+PQ$ （为什么？），

∴ $OP<OQ$.

但 $OQ=r$，$OP=d$，

∴ $d<r$.

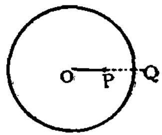

图 8—2

上述定理的逆定理，就是点和圆位置关系的判定定理. 现在叙述于下：

定理 2 （1）如果 $d<r$ 时，则点在圆内；

（2） 如果 $d=r$ 时，则点在圆周上；

（3） 如果 $d>r$ 时，则点在圆外.

这个定理的证明比较容易，现仅把（1）的证明叙述于下，（2）和（3）的证明从略.

证：∵ 点和圆的位置关系有三种情况：

（1） 点在圆内；（2）点在圆周上；（3）点在圆外. 如果点不在圆内时，则点就在圆周上或在圆外.

当点在圆周上时，则有 $d=r$；

当点在圆外时，则有 $d>r$.

以上的结论 $d=r$，$d>r$ 和已知条件 $d<r$ 是矛盾的，故知点必定在圆内．

注：这个定理的证法，是把点和圆的位置关系一一列举出来，在三种位置关系中，从推理去给以否定其中两种位置关系的不成立，只有剩下命题结论的位置关系成立的正确，这种证法叫做穷举法．

2．圆的基本性质

8.2 垂直于弦的直径的性质

在1.11节里指出：连接圆周上任意两点的线段叫做弦，通过圆心的弦叫做圆的直径．因而直径是圆的最大弦．如图 8－3 在圆 O 中，弦 AB 所对的弧有两条：一条是劣弧 AmB；另一条是优弧 AnB．通常说弦所对的弧是指劣弧而言．因此弦 AB 又叫做弧 AmB 所张的弦，弧 AmB 又叫做弦 AB 所对的弧．

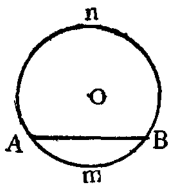

图 8—3

定理 1 垂直于弦的直径必平分这条弦和它所对的两条弧．

已知：如图 8—4．在圆 O 中，直径 $CD\perp$ 弦 AB，垂足是 E 点．

求证：$AE=EB$；$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$．

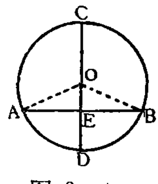

图 8—4

分析：$\because$ 圆 O 是关于直径 CD 的轴对称形，若能证明 A 与 B 两点关于 CD 是轴对称点，那么就有 $AE=EB$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$．因此，连 OA 和 OB．显然可知 OE 是等腰三角形 AOB 底

边 AB 上的高，那么 OE 就是它的对称轴，从而可知 A 和 B 两点是关于 CD 的对称点．现把证明叙述于下．

证：连接 OA 和 OB，则 $OA=OB$　（为什么？）在等腰 $\triangle AOB$ 中，$\because$　$OE\perp AB$，$\therefore$　$AE=EB$．又$\because$ CD 是 AB 的垂直平分线，$\therefore$ A 和 B 是关于 CD 成轴对称的两点．因此以 CD 为折痕，把半圆 DAC 叠置于半圆 DBC 上，则 A 点必与 B 点重合．由于圆 O 是关于直径 CD 的轴对称形，所以半圆 DAC 必与半圆 DBC 完全重合．因此 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{CB}$ 完全重合，$\overset{\frown}{AD}$ 与 $\overset{\frown}{DB}$ 完全重合．故 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$．

定理 2　弦的垂直平分线必过圆心，并且平分这条弦所对的两条弧．

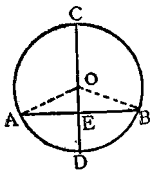

图 8—5

已知：如图 8—5．在圆 O 中，过弦 AB 的中点 E 的垂线交圆 O 于 C 和 D 两点．

求证：圆心 O 点在 CD 上，并且 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$．

证：连接 OA 和 OB．$\because OA=OB$，$\therefore$ 圆心 O 点应在 AB 的垂直平分线上．（为什么？）

但 CD 是 AB 的垂直平分线，且 AB 的垂直平分线只有一条，$\therefore$ 圆心 O 点必在 CD 上．

由于圆心 O 点在弦 CD 上，则 CD 是圆 O 的直径．$\because$　直径 $CD\perp$ 弦 AB，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$．

根据圆是关于直径的轴对称形、定理 1 和定理 2，还可以推导出下列一些性质：

（1）　由圆心作弦的垂线必平分这条弦和它所对的两条弧；

（2） 连接圆心和弦的中点的直线，必垂直于这条弦和平分它所对的两条弧；

（3） 连接圆心和弧的中点的直线，必垂直平分这条弧上所张的弦；

（4） 连接弦的中点和它所对一条弧的中点的直线必过圆心，并且垂直于这条弦.

定理 3 两条平行弦之间夹取等弧.

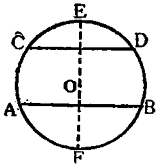

图 8—6

已知：在圆 O 中，弦 $AB \parallel$ 弦 CD.

求证：$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

证：作直径 $EF \perp$ 弦 AB.

$\because$ $AB \parallel CD$, $\therefore$ $EF \perp CD$.

（为什么？）

$\because$ 直径 $EF \perp$ 弦 AB，直径 $EF \perp$ 弦 CD，

$\therefore$ $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$, $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{ED}$.

因此 $\overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{EB} - \overset{\frown}{ED}$,

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

例 1 平分一条已知弧.

已知：如图 8—7. 一条弧 AB.

求作：在 $\overset{\frown}{AB}$ 上作一点，把 $\overset{\frown}{AB}$ 二等分.

作法：（1） 连接线段 AB；

（2） 作线段 AB 的垂直平分线 $\overset{\frown}{PQ}$，交 AB 于 C 点，则 C 点就是所求的平分点.

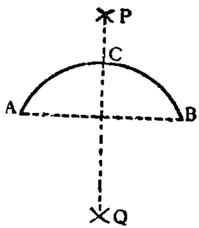

图 8—7

证：$\because$ PQ 是弦 AB 的垂直平分线，$\therefore$ PQ 必平分弦 AB 所对的弧 AB. 但 PQ 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 C 点，$\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$，所以 C 点合于所求.

例 2 一条直线与两同心圆相交，（同一个圆心半径不相等的圆叫做同心圆）则这条直线被夹在两圆之间的线段相等.

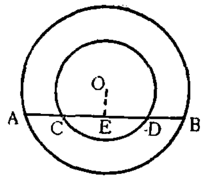

图 8—8

已知：如图 8—8. 两同心圆 O 分别交直线 AB 于 A、B 和 C、D.

求证：$AC=DB$

证：过圆心 O 点作 $OE\perp AB$，垂足是 E 点.

在大圆 O 中，$\because$ $OE\perp AB$，$\therefore$ $AE=EB$.

在小圆 O 中，$\because$ $OE\perp CD$，$\therefore$ $CE=ED$.

因此 $AE-CE=EB-CD$，$\therefore$ $AC=DB$.

例 3 如图 8—9. 在圆 O 中，弦 AB 的垂直平分线是 MN，弦 AC 的垂直平分线是 PQ. 求证 MN 与 PQ 必相交于圆心 O 点.

证：$\because$ 弦 AB 与弦 AC 相交于 A 点，

$\therefore$ 弦 AB 的垂直平分线 MN 必与弦 AC 的垂直平分线 PQ 相交.（为什么？）

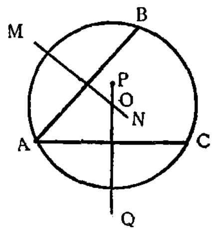

图 8—9

$\because$ MN 垂直平分弦 AB，$\therefore$ MN 必过圆心 O 点，故知圆心 O 点在 MN 上.

$\because$ PQ 垂直平分弦 AC，$\therefore$ PQ 必过圆心 O 点，故知圆心 O 点在 PQ 上.

因此，圆心 O 点是 MN 和 PQ 的公共点，

故知 MN 和 PQ 必定相交于圆心 O 点.

8.3 过三点作圆

我们知道，当一个圆的圆心位置和半径的长确定后，那

么这个圆也就确定了．由于通过两点就确定一条直线，而且只能确定一条直线．这就启发人们思考要有几点才能确定一个圆呢？

显然易知，通过一点是不能确定一个圆的．因为在平面上一定点 A 之外，可以取 O_1、O_2、O_3……等若干个点为圆心，分别以线段 O_1A、O_2A、O_3A……等为半径画圆，（图 8—10）．这若干个圆都是通过 A 点的，所以通过一点的圆可以画无数个．

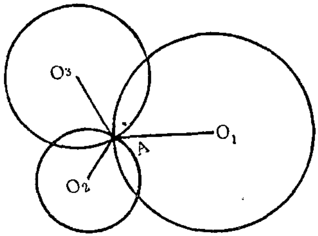

图 8—10

同样可知，通过平面上的两点也是不能确定一个圆的．因为圆心到平面上两个定点 A 和 B 的距离是相等的，所以圆心的位置必在线段 AB 的垂直平分线上，在 AB 的垂直平分线上分别取 O_1、O_2、O_3……等点为圆心，以线段 O_1A、O_2A、O_3A……等各为半径画圆，（图 8—11）．这若干圆都是通过 A 和 B 两点的，所以通过平面上两定点的圆可以画无数个．

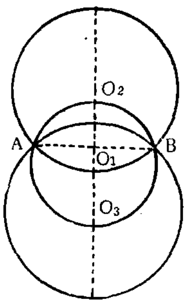

图 8—11

那么通过三个定点 A、B 和 C 能否确定一个圆呢？我们来回答这个问题．

（1） 当已知的三定点 A、B 和 C 在一条直线上时，由于圆心到 A 和 B 两点等距，所以圆心应在 AB 的垂直平分线 MN 上．同理可知，圆心也应在 BC 的垂直平分线 PQ 上．所以圆心的位置应为

MN 和 PQ 的交点．但 A、B 和 C 三点在一条直线上，则 MN 必与 PQ 平行，因此 MN 与 PQ 没有交点．这样就找不到与 A、B 和 C 三点等距的点，故知通过在一直线上的三定点 A、B 和 C 不能画出圆．（图 8—12）．

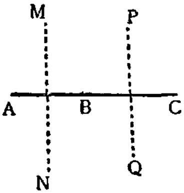

图 8—12

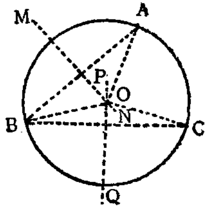

图 8—13

（2） 当已知的三定点 A、B 和 C 不在一条直线上时，那么，连接 AB 和 BC，分别作 AB 和 BC 的垂直平分线 MN 和 PQ 相交于 O 点，以 O 为圆心，OA 为半径画圆，则圆 O 必过 B 与 C 两点．（图 8—13）．

证：连结 OB、OC，∵线段 AB 与线段 BC 相交于 B 点，∴线段 AB 的垂直平分线 MN 必与线段 BC 的垂直平分线 PQ 相交于一点 O．∵O 点在线段 AB 的垂直平分线 MN 上，∴$OA=OB$．

同理可知，$OB=OC$．　　∴　$OA=OB=OC$．

故知当以 O 为圆心，OA 为半径画一个圆 O，由于 B 和 C 两点到圆心 O 的距离 OB 和 OC 都等于圆 O 的半径 OA，所以 B 和 C 两点必在 O 圆周上，即是圆 O 通过 A、B 和 C 三个定点．

由于 MN 和 PQ 相交的交点只有一个，且 OA 的长为一定，故过 A、B 和 C 三点的圆只能画一个．

因此我们可以得出结论：通过不在一条直线上的三个定