

SHUXUE

数 学

几 何 · 第二册

青年自学丛书

四川人民出版社



THE UNIVERSITY OF CHINA PRESS

数 学

上 册 + 第二册

1990年1月第1版 1990年1月第1次印刷 16开 256页 3.50元

清华大学出版社

青年自学丛书

V. 2

数 学

几 何 · 第二册

主 编 成都市教育局
编写单位 成都市锦江中学
成都市第十六中学
成都市第十三中学
成都市盐市口中学
执 笔 钟策安 朱文虎
周泰金 李维卓

四川人民出版社

一九七九年·成都

青年自学丛书 数 学 几 何 · 第二册

四川人民出版社出版 重庆印制第一厂印刷

四川省新华书店重庆发行所发行

开本 787×1092 毫米 $1/32$ 印张15.875 字数350千

1979年12月第一版 1979年12月第一次印刷

印数: 1—107,490册

书号: 13118·24

定价: 1.17 元

前 言

“一定要极大地提高整个中华民族的科学文化水平”。这是英明领袖华主席、党中央高瞻远瞩地向全党、全军、全国各族人民发出的庄严号召。这是激动人心的动员令，这是气吞山河的宣言书，这同样是对广大青年亲切的召唤。

青年是我们的希望，是我们的未来。为了适应广大青年向科学进军的需要，我们组织编写了一套“青年自学丛书”，供广大青年自学，在校中学生课外阅读和中学教师参考。

这套“青年自学丛书”的数理化部分，共十七册，即《数学》八册（《代数》三册、《几何》三册、《三角》二册）、《物理》四册、《化学》五册。考虑到这套丛书具有自学的特点，使读者学后能系统掌握基础知识和基本技能，编写时注意了基本理论、基本概念、基本规律和学习中难点的讲述，例题较详，习题较多，循序渐进，由浅入深，文字上努力做到生动活泼，明白易懂。同时，参照全国中小学通用教材教学大纲精神，还介绍了一些先进知识。要求通过对丛书的自学，使读者能达到高中或略高于高中的程度。

这是“青年自学丛书”《数学》的《几何》读本。按照平面几何、解析几何、立体几何等方面的内容，编成三册。

这套丛书的编写出版，得到中共成都市委宣传部的亲切关怀和有关学校的支持。四川师范学院数学系协助了丛书《数学》读本的审稿工作。在此，我们谨致谢意。

由于时间仓促和编者水平所限，本书内容可能有缺点或错误。鉴于当前需要迫切，先以“试用本”出版，广泛听取意见。我们热忱欢迎广大读者批评指正，以便再版时修订。

编 者

一九七八年三月

目 录

第八章 圆、轨迹与作图	(1)
一 圆	(1)
1. 点和圆的位置关系	(1)
8.1 点和圆的相关位置	
2. 圆的基本性质	(3)
8.2 垂直于弦的直径的性质 8.3 过三点作圆 8.4 三 角形的外接圆 8.5 圆心角、弧、弦、弦与弦心距的关系 和圆周角定理 8.6 圆内接四边形的性质	
3. 直线和圆的位置关系	(37)
8.7 直线和圆的相关位置 8.8 切线的判定和性质 8.9 过一点作已知圆的切线和切线长定理 8.10 三角形的内 切圆和旁切圆 8.11 圆外切四边形的性质 8.12 弦切 角定理 8.13 和圆有关的比例线段	
4. 圆和圆的位置关系	(71)
8.14 两个圆的相关位置 8.15 两圆相交的公弦的性质 8.16 两圆相切的连心线的性质 8.17 两圆的公切线 8.18 直线和圆弧的连接、圆弧与圆弧的连接	
5. 等分圆周与多边形	(97)
8.19 等分圆周 8.20 圆的内接和外切正多边形 8.21 正多边形的外接圆和内切圆 8.22 正多边形的有关计算	
6. 圆的周长和面积	(122)

8.23 圆的周长和面积 8.24 扇形和弓形的面积

二 轨迹 (140)

8.25 命题的组成形式和命题的四种形式之间的相互关系

8.26 点的轨迹的意义和轨迹的完备性与纯粹性 8.27 几个基本轨迹定理

三 作图 (159)

8.28 轨迹交截法作图 8.29 代数解析法作图

复习题 (182)

第九章 直线和平面 (196)

一 平面位置的确定 (196)

9.1 平面和平面的表示法 9.2 平面的基本性质

二 直线与直线的位置关系 (204)

9.3 两直线的相关位置

三 直线与平面的位置关系 (209)

9.4 直线与平面的相关位置 9.5 直线和平面平行的判定与性质 9.6 异面直线所成的角 9.7 直线和平面垂直的判定与性质 9.8 三垂线定理 9.9 直线和平面所成的角

四 平面与平面的位置关系 (240)

9.10 两平面的相关位置 9.11 平面和平面平行的判定与性质 9.12 二面角及其平面角 9.13 平面和平面垂直的判定与性质 9.14 多面角

第十章 多面体 (283)

一 棱柱、棱锥和棱台的性质 (284)

10.1 棱柱 10.2 棱柱的定义就易知它有下面的性质 10.3 平行六面体 10.4 直棱柱的直观图 10.5 棱锥 10.6

正棱锥的性质	10.7	正棱锥的直观图	10.8	棱台	10.9	
棱台的截面	10.10	正棱台的直观图				
二 棱柱、棱锥、棱台的表面积						(309)
10.11 棱柱侧面积定理	10.12	正棱锥的表面积	10.13			
正棱台的表面积						
三 棱柱、棱锥、棱台的体积						(323)
10.14 关于体积的概念	10.15	体积的单位	10.16	长		
方体的体积	10.17	平行六面体的体积	10.18	棱柱的体		
积	10.19	棱锥的体积	10.20	棱台的体积	10.21	
祖						
暅定理	10.22	拟柱体				
四 正多面体 尤拉公式(EULER)						(364)
10.23 正多面体	10.24	正多面体的作法	10.25	正多		
面体的表面积和体积	10.26	尤拉公式				
复习题						(376)
第十一章 旋转面和旋转体						(379)
一 圆柱、圆锥、圆台、球的基本性质						(379)
11.1 旋转面和旋转体	11.2	圆柱面和圆柱	11.3	圆		
锥面和圆锥	11.4	圆台	11.5	球面和球		
二 圆柱、圆锥、圆台、球的表面积						(416)
11.6 圆柱的侧面积和全面积	11.7	圆锥的侧面积和全				
面积	11.8	圆台的侧面积和全面积	11.9	圆柱、圆锥、		
圆台的侧面积的统一公式	11.10	球冠、球带和球的面积				
三 圆柱、圆锥、圆台和球的体积						(437)
11.11 圆柱的体积	11.12	圆锥的体积	11.13	圆台的		
体积	11.14	球的体积				
复习题						(457)

第十二章 立体图与视图 (460)

一 立体图 (460)

12.1 投影的基本知识 12.2 空间直角坐标系 12.3 轴测投影 12.4 轴测图的分类与性质 12.5 立体图的画法

二 视图 (483)

12.6 正投影的基本特点 12.7 三视图 12.8 柱、锥、球的三视图 12.9 不完整基本体的三视图

第八章 圆、轨迹与作图

在第一册里，主要研究了有关直线和由直线所构成的几何图形（如平行线、三角形、四边形等）的性质，但也介绍了一点有关圆（特殊的曲线图形）的知识。例如 1.11 节到 1.14 节介绍了圆、弧和弦的定义，角的一度和弧的一度，圆心角的度数和它所对弧的度数的关系、同圆或等圆的半径（或直径）相等以及在 2.12 节和 3.4 节中，介绍了圆是轴对称图形又是中心对称图形等等。

圆在生产实践中，有着广泛的应用。例如传动轮是圆形，它不仅在传动中摩擦小，而且具有改变运动的方向作用。本章对有关圆的基本性质，点和圆、直线和圆、圆和圆的相互位置关系等给以比较系统的研究，最后研究一点轨迹与作图的基础知识，为进一步学习奠定基础。

一 圆

1. 点和圆的位置关系

8.1 点和圆的相关位置

显然易知，点和圆的相关位置有三种：（1）点在圆内；（2）点在圆周上；（3）点在圆外。如图 8—1. P 点在圆 O 内， Q 点在 O 圆周上， R 点在圆 O 外。

设圆 O 的半径是 r ，点到圆心 O 的距离是 d ，则点和圆的位置关系有下列性质定理和判定定理：

定理 1 (1) 如果点在圆内时，则有
 $d < r$;

(2) 如果点在圆周上时，则有 $d = r$;

(3) 如果点在圆外时，则有 $d > r$ 。

这个定理的证明比较容易，现仅把 (1) 的证明叙述于下，(2) 和 (3) 的证明从略。

证：如图 8—2。因 P 点在圆 O 内，故延长 OP 必与圆周相交，令交点是 Q 。

$\therefore OQ = OP + PQ$ (为什么?)，

$\therefore OP < OQ$ 。

但 $OQ = r$ ， $OP = d$ ，

$\therefore d < r$ 。

上述定理的逆定理，就是点和圆位置关系的判定定理。现在叙述于下：

定理 2 (1) 如果 $d < r$ 时，则点在圆内；

(2) 如果 $d = r$ 时，则点在圆周上；

(3) 如果 $d > r$ 时，则点在圆外。

这个定理的证明比较容易，现仅把 (1) 的证明叙述于下，(2) 和 (3) 的证明从略。

证： $\because$ 点和圆的位置关系有三种情况：

(1) 点在圆内；(2) 点在圆周上；(3) 点在圆外。如果点不在圆内时，则点就在圆周上或在圆外。

当点在圆周上时，则有 $d = r$ ；

当点在圆外时，则有 $d > r$ 。

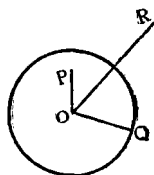


图 8—1

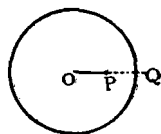


图 8—2

以上的结论 $d=r$, $d>r$ 和已知条件 $d<r$ 是矛盾的, 故知点必定在圆内.

注: 这个定理的证法, 是把点和圆的位置关系一一列举出来, 在三种位置关系中, 从推理去给以否定其中两种位置关系的不成立, 只有剩下命题结论的位置关系成立的正确, 这种证法叫做穷举法.

2. 圆的基本性质

8.2 垂直于弦的直径的性质

在1.11节里指出: 连接圆周上任意两点的线段叫做弦, 通过圆心的弦叫做圆的直径. 因而直径是圆的最大弦. 如图 8-3 在圆 O 中, 弦 AB 所对的弧有两条: 一条是劣弧 AmB ; 另一条是优弧 AnB . 通常说弦所对的弧是指劣弧而言. 因此弦 AB 又叫做弧 AmB 所张的弦, 弧 AmB 又叫做弦 AB 所对的弧.

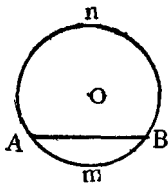


图 8-3

定理 1 垂直于弦的直径必平分这条弦和它所对的两条弧.

已知: 如图 8-4. 在圆 O 中, 直径 $CD \perp$ 弦 AB , 垂足是 E 点.

求证: $AE = EB$; $\widehat{AC} = \widehat{CB}$, $\widehat{AD} = \widehat{DB}$.

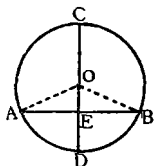


图 8-4

分析: $\because$ 圆 O 是关于直径 CD 的轴对称形, 若能证明 A 与 B 两点关于 CD 是轴对称点, 那么就有 $AE = EB$, $\widehat{AC} = \widehat{CB}$, $\widehat{AD} = \widehat{DB}$. 因此, 连 OA 和 OB . 显然可知 OE 是等腰三角形 AOB 底

边 AB 上的高，那么 OE 就是它的对称轴，从而可知 A 和 B 两点是关于 CD 的对称点。现把证明叙述于下。

证：连接 OA 和 OB ，则 $OA=OB$ 。（为什么？）
 在等腰 $\triangle AOB$ 中， $\because OE \perp AB$ ， $\therefore AE=EB$ 。又 $\because CD$ 是 AB 的垂直平分线， $\therefore A$ 和 B 是关于 CD 成轴对称的两点。因此以 CD 为折痕，把半圆 DAC 叠置于半圆 DBC 上，则 A 点必与 B 点重合。由于圆 O 是关于直径 CD 的轴对称形，所以半圆 DAC 必与半圆 DBC 完全重合。因此 $\widehat{AC}$ 与 $\widehat{CB}$ 完全重合， $\widehat{AD}$ 与 $\widehat{DB}$ 完全重合。故 $\widehat{AC}=\widehat{CB}$ ， $\widehat{AD}=\widehat{DB}$ 。

定理 2 弦的垂直平分线必过圆心，并且平分这条弦所对的两条弧。

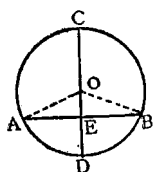


图 8-5

已知：如图 8-5。在圆 O 中，过弦 AB 的中点 E 的垂线交圆 O 于 C 和 D 两点。

求证：圆心 O 点在 CD 上，并且 $\widehat{AC}=\widehat{CB}$ ， $\widehat{AD}=\widehat{DB}$ 。

证：连接 OA 和 OB 。 $\because OA=OB$ ， $\therefore$ 圆心 O 点应在 AB 的垂直平分线上。（为什么？）

但 CD 是 AB 的垂直平分线，且 AB 的垂直平分线只有一条， $\therefore$ 圆心 O 点必在 CD 上。

由于圆心 O 点在弦 CD 上，则 CD 是圆 O 的直径。
 $\therefore$ 直径 $CD \perp$ 弦 AB ， $\therefore \widehat{AC}=\widehat{CB}$ ， $\widehat{AD}=\widehat{DB}$ 。

根据圆是关于直径的轴对称形、定理 1 和定理 2，还可以推导出下列一些性质：

(1) 由圆心作弦的垂线必平分这条弦和它所对的两条弧；

(2) 连接圆心和弦的中点的直线，必垂直于这条弦和
平分它所对的两条弧；

(3) 连接圆心和弧的中点的直线，必垂直平分这条弧
上所张的弦；

(4) 连接弦的中点和它所对一条弧的中点的直线必过
圆心，并且垂直于这条弦。

定理 3 两条平行弦之间夹取等弧。

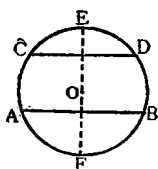


图 8—6

已知：在圆 O 中，弦 $AB \parallel$ 弦 CD 。

求证： $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

证：作直径 $EF \perp$ 弦 AB 。

$\because AB \parallel CD, \therefore EF \perp CD$ 。

(为什么?)

$\because$ 直径 $EF \perp$ 弦 AB , 直径 $EF \perp$ 弦 CD ,

$\therefore \widehat{AE} = \widehat{EB}, \widehat{CE} = \widehat{ED}$ 。

因此 $\widehat{AE} - \widehat{CE} = \widehat{EB} - \widehat{ED}$,

$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BD}$ 。

例 1 平分一条已知弧。

已知：如图 8—7。一条弧 AB 。

求作：在 $\widehat{AB}$ 上作一点，把 $\widehat{AB}$ 二等分。

作法：(1) 连接线段 AB ；

(2) 作线段 AB 的垂直平分线 PQ ，交 AB 于 C 点，则 C 点就是所求的平分点。

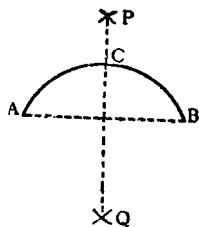


图 8—7

证： $\because PQ$ 是弦 AB 的垂直平分线， $\therefore PQ$ 必平分弦 AB 所对的弧 AB 。但 PQ 交 $\widehat{AB}$ 于 C 点， $\therefore \widehat{AC} = \widehat{CB}$ ，所以 C 点合于所求。

例 2 一条直线与两同心圆相交，
(同一个圆心半径不相等的圆叫做同心圆) 则这条直线被夹在两圆之间的线段相等。

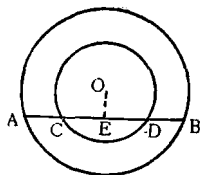


图 8—8

已知：如图 8—8. 两同心圆 O 分别交直线 AB 于 A 、 B 和 C 、 D 。

求证： $AC = DB$

证：过圆心 O 点作 $OE \perp AB$ ，垂足是 E 点。

在大圆 O 中， $\because OE \perp AB, \therefore AE = EB$ 。

在小圆 O 中， $\because OE \perp CD, \therefore CE = ED$ 。

因此 $AE - CE = EB - ED, \therefore AC = DB$ 。

例 3 如图 8—9. 在圆 O 中，弦 AB 的垂直平分线是 MN ，弦 AC 的垂直平分线是 PQ 。求证 MN 与 PQ 必相交于圆心 O 点。

证： $\because$ 弦 AB 与弦 AC 相交于 A 点，

$\therefore$ 弦 AB 的垂直平分线 MN 必与弦 AC 的垂直平分线 PQ 相交。(为什么?)

$\because MN$ 垂直平分弦 $AB, \therefore MN$ 必过圆心 O 点，故知圆心 O 点在 MN 上。

$\because PQ$ 垂直平分弦 $AC, \therefore PQ$ 必过圆心 O 点，故知圆心 O 点在 PQ 上。

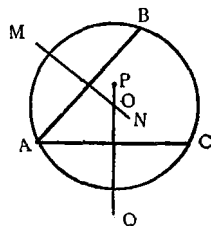


图 8—9

因此，圆心 O 点是 MN 和 PQ 的公共点，

故知 MN 和 PQ 必定相交于圆心 O 点。

8.3 过三点作圆

我们知道，当一个圆的圆心位置和半径的长确定后，那

么这个圆也就确定了。由于通过两点就确定一条直线，而且只能确定一条直线。这就启发人们思考要有几点才能确定一个圆呢？

显然易知，通过一点是不能确定一个圆的。因为在平面上一定点 A 之外，可以取 O_1 、 O_2 、 O_3 ……等若干个点为圆心，分别以线段 O_1A 、 O_2A 、 O_3A ……等为半径画圆，（图 8—10）。这若干个圆都是通过 A 点的，所以通过一点的圆可以画无数个。

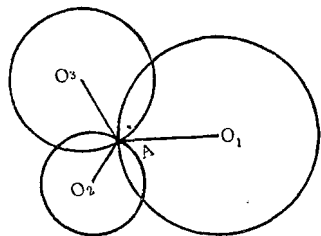


图 8—10

同样可知，通过平面上的两点也是不能确定一个圆的。因为圆心到平面上两个定点 A 和 B 的距离是相等的，所以圆心的位置必在线段 AB 的垂直平分线上，在 AB 的垂直平分线上分别取 O_1 、 O_2 、 O_3 ……等点为圆心，以线段 O_1A 、 O_2A 、 O_3A ……等各为半径画圆，（图 8—11）。这若干圆都是通过 A 和 B 两点的，所以通过平面上两定点的圆可以画无数个。

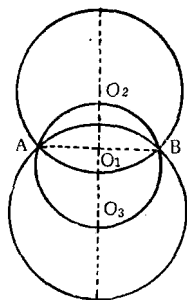


图 8—11

那么通过三个定点 A 、 B 和 C 能否确定一个圆呢？我们来回答这个问题。

（1）当已知的三定点 A 、 B 和 C 在一条直线上时，由于圆心到 A 和 B 两点等距，所以圆心应在 AB 的垂直平分线 MN 上。同理可知，圆心也应在 BC 的垂直平分线 PQ 上。所以圆心的位置应为

MN 和 PQ 的交点. 但 A 、 B 和 C 三点在一条直线上, 则 MN 必与 PQ 平行, 因此 MN 与 PQ 没有交点. 这样就找不到与 A 、 B 和 C 三点等距的点, 故知通过在一一直线上的三定点 A 、 B 和 C 不能画出圆. (图 8-12).

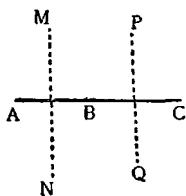


图 8-12

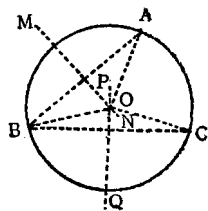


图 8-13

(2) 当已知的三定点 A 、 B 和 C 不在一条直线上时, 那么, 连接 AB 和 BC , 分别作 AB 和 BC 的垂直平分线 MN 和 PQ 相交于 O 点, 以 O 为圆心, OA 为半径画圆, 则圆 O 必过 B 与 C 两点. (图 8-13).

证: 连结 OB 、 OC , $\because$ 线段 AB 与线段 BC 相交于 B 点, $\therefore$ 线段 AB 的垂直平分线 MN 必与线段 BC 的垂直平分线 PQ 相交于一点 O . $\because O$ 点在线段 AB 的垂直平分线 MN 上, $\therefore OA=OB$.

同理可知, $OB=OC$. $\therefore OA=OB=OC$.

故知当以 O 为圆心, OA 为半径画一个圆 O , 由于 B 和 C 两点到圆心 O 的距离 OB 和 OC 都等于圆 O 的半径 OA , 所以 B 和 C 两点必在 O 圆周上, 即是圆 O 通过 A 、 B 和 C 三个定点.

由于 MN 和 PQ 相交的交点只有一个, 且 OA 的长为一定, 故过 A 、 B 和 C 三点的圆只能画一个.

因此我们可以得出结论: 通过不在一条直线上的三个定