期权定价与组合选择

QiquanDingjiayuZuhexuanze

JinrongShuxueyuJinrongGongchengdeHexin

——金融数学与金融工程的核心

李时银 编译

厦门大学出版社

期权定价与组合选择

——金融数学与金融工程的核心

李时银　编译

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据
期权定价与组合选择:金融数学与金融工程的核心/李时银编译. —厦门:厦门大学出版社,2002.7
ISBN 7-5615-1903-6

Ⅰ.期… Ⅱ.李… Ⅲ.金融-经济数学 Ⅳ.F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 037071 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学 邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup@public.xm.fj.cn
三明地质印刷厂印刷
2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷
开本:787×1092 1/18 印张:18.5
字数:340 千字 印数:1-2 000 册
定价:33.00 元
如有印装质量问题请与承印厂调换

前　言

期权定价与资产组合选择理论是现代金融理论的重要内容，它构成了金融数学与金融工程的核心。为了应对我国经济和世界经济接轨所带来的挑战，我国近些年来掀起了学习西方现代金融理论的热潮。一批学者编撰和翻译了一些相应的书籍。但由于我国在这方面的学习与研究起步晚，在学术水平上与西方发达国家的差距相当大，国内所能找到的这方面的读物不能满足研究生系统深入地学习现代金融理论的需要。作为教学上的应急之举，笔者编译了这本《期权定价与组合选择》。本书内容取材于几本英文版的金融学名著——参考书列在书末，编译者对这些参考书的作者深表敬意与谢忱。至于翻译的欠准确，内容组织的不当以及其他错误的出现，概由本人负责，并衷心希望读者赐予指教。

厦门大学数学系李轮焕教授花费大量时间仔细地审阅书稿，提出了很多宝贵的意见，我谨表示衷心的感谢。

我还要感谢厦大数学系副系主任，博士生导师程立新教授和厦门大学出版社的编辑陈进才先生，是他们对我编译出版这本教材给予了鼓励和支持。

在本教材的编译过程中，我还吸取了我的几位研究生魏正元、孙坚强、王保合、刘智华以及厦门大学财经系与管理学院的几位博士生陈欣慰、叶青等的好的想法。

本书适宜作为金融数学、金融工程、金融学与经济管理等专业的研究生的教材或参考书。

李时银
2002 年春于厦大海滨

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　基本概念和数学基础

§1.1　金融衍生证券和期权

在过去的 20 多年内，世界金融市场掀起了以衍生证券的创造和交易为标志的革命．衍生证券(derivative security)又称为衍生金融工具，它的价值依赖于其他更基本的标的证券(underlying security)的价值．标的证券可以是能交易的证券，商品或股票指数等等．最常见的衍生证券是期货(futures)和期权(options)．期货(合同)是两个经济法人签订的买卖资产的协议(以期货交易所为中介)，而期权(合同)则给予合同的持有者(俗称多头，long position)在一定的时间，以事先确定的价格，从对手那里(俗称空头，short position)买进或卖出某种资产的权利(但可以放弃此权利或者说不负有义务)．买入期权(call option)的多头有权买入某种资产，而卖出期权(put option)的多头有权卖出某种资产．欧式期权的持有者只能在合同规定的某一确定的到期日(Expiry Date)以确定的价格(称为执行价 Exerise Price)或敲定价(Strike Price)买卖某种确定的资产，而美式期权的持有者则可以自行决定在未来某一段时间范围内某一时间以确定的价格买卖标的资产．期权合同的出售方(空头)承担着执行合约的义务，当合同的持有者(多头)选择买入或卖出资产时，出售方必须卖出或买入资产．因此参与期权交易的投资者分为四种类型或称为四种头寸：

1. 买入期权的多头．
2. 卖出期权的多头．
3. 买入期权的空头．
4. 卖出期权的空头．

【到期收益】

用 X 表示欧式期权的执行价(敲定价)，设 S_T 为标的资产在到期日 T 的

市场价格．若 $S_T>X$，买入期权的多头将会选择执行购买标的资产，他以 X 元的代价获得价值为 S_T 元的资产，因而多头从买入期权中得到的收益是 S_T-X. 若 $S_T\leqslant X$，多头将放弃执行期权的权利，因为他可以以小于或等于执行价格 X 的价格在市场上买入该资产．故欧式买入期权多头的到期收益为

$$\max(S_T-X,0)$$

类似地，欧式卖出期权的多头的到期收益为

$$\max(X-S_T,0)$$

因为多头的收益就是空头的损失，或者反过来（这是一种零和游戏），故欧式买入期权空头的收益为

$$-\max(S_T-X,0)=\min(X-S_T,0)$$

欧式卖出期权空头的收益为

$$-\max(X-S_T,0)=\min(S_T-X,0)$$

上述四种头寸的到期收益图示如下（见图 1.0）

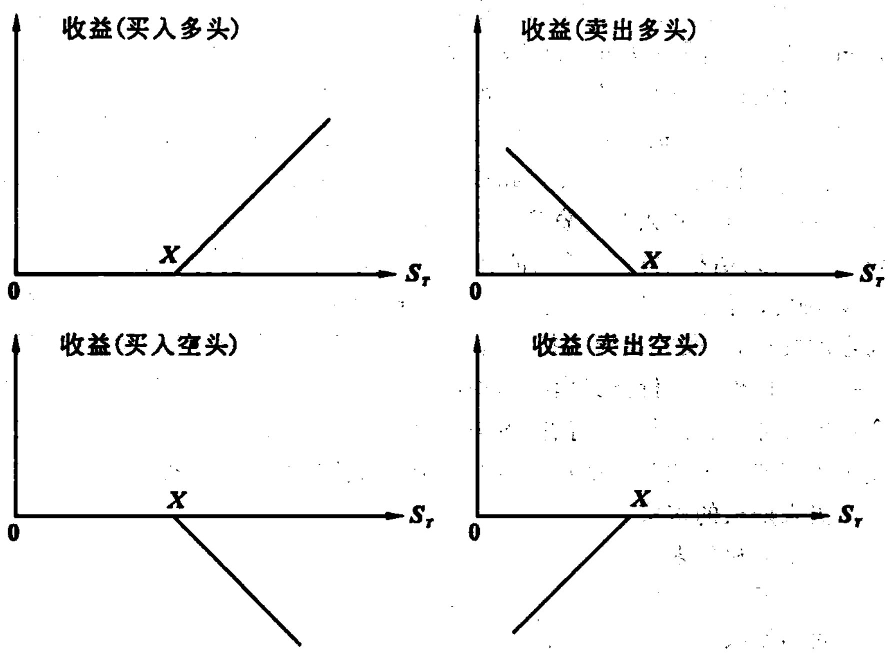

图 1.0　四种欧式期权头寸的到期收益

以上到期收益的函数表达式也说明了期权仅仅在收益为正时才会执行的性质.

【期权费用】

期权交易是一种交易双方零和游戏. 期权多头方有买(卖)标的资产的权利而不负有义务,而空头方则只有义务而无权利. 由于多头方的收益函数是非负的,从而空头方的收益函数是非正的. 因此多头方必须向空头方支付一笔费用才能使空头方进入期权游戏. 从而自然地产生这么一个问题:公平的期权费用(通常称为期权价格)应该是多少? 这是一个曾一度挑战过人类智慧的问题(类似的更为复杂的问题至今还在向人类的智慧挑战).

本书的目的是介绍各种类型的金融期权定价方法与模型. 显然,期权价格依赖于执行价格,到期时间长度和标的资产当前价格,影响期权价格的因素还有通用的利率和标的资产的随机波动程度——通常称为波动率.

【自融资策略】

假设投资者拥有一个证券组合,由期权,股票和债券组成. 随着时间的推移,组合的价值由于证券价格的变化而变化,此外,投资者的交易策略也影响组合的值. 例如,改变组合中证券的比例,增加或减少组合中的投资金额. 如果不在初始投资中额外地加入或者撤出资金,则该投资策略称为自融资的,这时组合中增加某证券数量的费用完全来源于减少同一组合中另外证券的数量而获得的资金.

【无套利原理】

期权定价理论中的一个基本的概念是无套利机会,又称为无套利原理. 下面举一个例子来说明什么是套利机会. 假设某支股票在交易所 A 和 B 标出的价格分别是 99 元和 101 元,再假设没有交易费用,那么人们可以以 99 元在交易所 A 买入而在交易所 B 以 101 元卖出,从而获得每股 2 元的无风险的利润. 交易者从事这样的交易称为套利. 如果金融市场功能完善,很多交易者会非常敏锐地立即利用这样的机会赢利,上面例子中的价格差将很快消失,从而我们可以认为这样的套利机会将不会发生. 然而,如果有交易费用,市场进入限制等市场摩擦,价格上的小的差别是可能存在的. 例如,若买卖股票的交易费用在 A、B 两交易所都是每股 1.5 元,那么总的交易费用是每股 3 元,这将打消套利者从价格差为 2 元的交易中寻找套利机会的努力.

使用更严谨的语言，套利机会可以定义为：在自融资条件下，没有初始投资但在交易后有正的收益或者负的收益的事情的概率不为零.

【套期保值或对冲】

如果买入期权的空头方并不同时拥有一定量的标的资产，就说他有裸露的头寸，因为在资产价格急剧上涨时他就面临亏损. 若买入期权空头同时还拥有一定量的标的资产，则当资产价格上扬时买入期权空头的损失可以由标的资产多头的赢利来补偿，这种策略称为套期保值或对冲. 此时组合的风险由于持有两种收益高度负相关的资产而得到控制. 若拥有的期权和标的资产的数量恰到好处，可以使组合的风险为零或者说形成无风险的头寸，它像无风险债券一样将获得无风险利率. 无风险对冲原理是期权定价理论的基石.

§1.1.1 期权交易策略

前面利用期权和标的资产建立了一个简单的对冲组合，可以用来控制资产的暴露风险. 现在来考察更多的用期权和标的资产为基本金融工具的组合管理策略. 我们限于讨论使用欧式买入期权和卖出期权的组合策略，至于那些更复杂的期权组合策略的分析，则需要对期权定价模型有充分的了解.

最简单的分析方法是构建组合的到期收益图，即给出组合收益与到期日的标的资产价格间的函数关系，这种方法只能用在组合中的证券的到期日相同的情况.

【有保护的买入和卖出期权】

在前面的那个对冲组合的例子中，只包含一个买入期权的空头头寸和一单位标的资产多头头寸. 这种投资策略称为卖出一个受保护的买入期权. 用 C 表示卖出此买入期权的空头方得到的收益，S_0 表示期权合同生效时资产的价格($S_0>C$)，那么此组合的初值是 S_0-C，记住买入期权的到期收益是 $\max(S_T-X,0)$，这里 S_T 是到期日的资产价格，而 X 是交割价. 在到期日，组合的值是 $S_T-\max(S_T-X,0)$，所以在到期日组合的收益是

$$S_T-\max(S_T-X,0)-(S_0-C)$$
$$=\begin{cases}C-S_0+X, & \text{当 } S_T\geqslant X\\ C-S_0+S_T, & \text{当 } S_T<X\end{cases}\tag{1}$$

可见，当 $S_T\geqslant X$ 时，收益为常数 $C-S_0+X$，而当 $S_T<X$ 时，收益随 S_T 线性增

长.有保护的买入期权在到期日的收益见图 1.1.

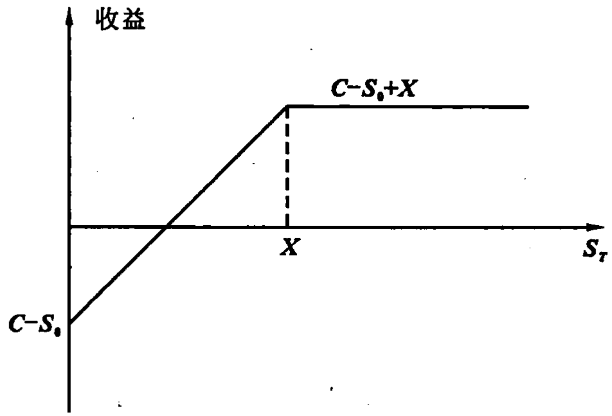

图 1.1 有保护的买入期权的到期收益

与有保护的买入期权相反的是一个由买入期权的多头和一单位资产的空头构成的组合.资产上的空头意味着组合含有资产的负债,即卖出了并不拥有的资产.借一份股票卖出去,以后买回来还给股票所有者的交易方式称为卖空.卖空者希望在价格下降前卖出,在价格下降后买进,从而在价格下降中赢利.通常股票交易所有法规限制卖空的时间和卖空的交易方式.

拥有卖出期权的多头和标的资产的投资组合称为有保护的卖出期权.用 p 表示卖出期权持有者为购买期权支付的费用,可以同样地给出组合的到期收益为

$$S_T+\max(X-S_T,0)-(p+S_0)$$
$$=\begin{cases}-(p+S_0)+S_T, & \text{当 } S_T\geqslant X\\ -(p+S_0)+X, & \text{当 } S_T<X\end{cases} \tag{2}$$

相应的到期收益图见图 1.2.试问,构造一个包括卖出期权多头和资产的空头的意义是什么呢?这样的组合策略将没有对冲的作用.因为期权和资产的头寸在风险暴露中方向相同,当资产价格上扬时都造成亏损.

【价差组合】

价差策略指由同样类型的期权构成的组合(即两个或更多的买入期权,两个或更多的卖出期权),其中一个处于多头位置,另一个处于空头位置.两个

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

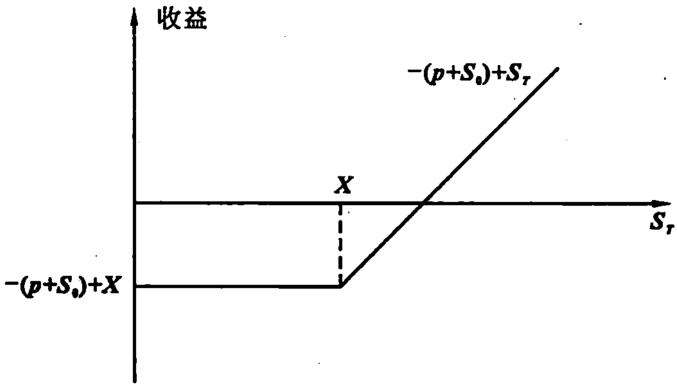

图 1.2 有保护卖出期权的到期收益

最基本的策略是垂直价差(也称为金额价差)和水平价差(也称为时间价差).在垂直价差中,买入一个期权的同时卖出一个期权,二者有相同的标的资产,相同的到期日但执行价不同.水平价差与垂直价差相类似,但执行价相同而到期日不同.

垂直价差又可分为看涨的和看跌的两类.看涨(看跌)的含义是组合在资产价格上涨(下跌)时有价差利润.看涨垂直价差组合由买入期权的多头和另一个执行价较高的买入期权空头组成.因为买入期权价格是执行价格的减函数,此组合创造了一个有上限的收益.用 X_1 和 X_2 表示这两个买入期权的执行价($X_2>X_1$),C_1 和 C_2($C_2<C_1$)分别表示其收益,两个买入期权到期收益的和为

$$\max(S_T-X_1,0)-\max(S_T-X_2,0)$$
$$=\begin{cases}0,\text{当 } S_T\leqslant X_1\\ S_T-X_1,\text{当 } X_1<S_T<X_2\\ X_2-X_1,\text{当 } S_T\geqslant X_2\end{cases}\tag{3}$$

把建立该组合的初始费用并入上面的到期收益和式,得到利用两个买入期权构造的看涨垂直价差的到期收益图如图 1.3.

如果期权立即执行持有者有正的(负的)现金收入,就称期权处于盈值(亏值)状态,如果立即执行的现金收入为零则称期权处于平价状态,即当前资产价格正好等于期权执行价格.带有两个看涨期权的看涨垂直价差,当两个买入期权都处于亏值(盈值)状态时有最大的亏损额(盈利额).亏损额由价差的

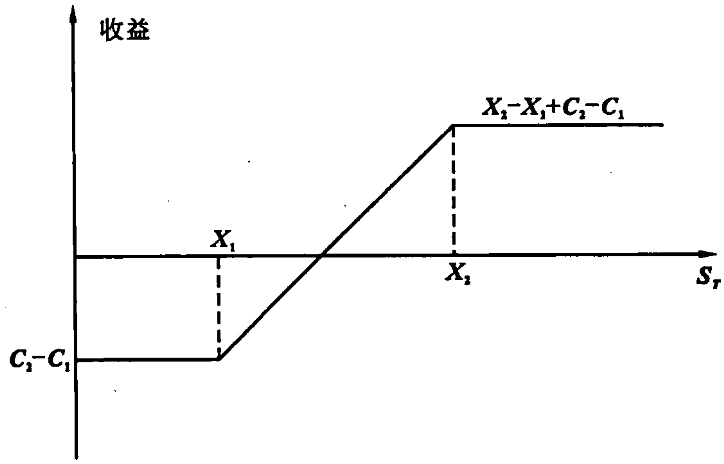

图 1.3　利用两个买入期权的看涨垂直价差的到期收益图

初始构造费用产生．

假设我们用两个买入期权构成一个新的组合，处于多头的买入期权的执行价格高于处于空头的买入期权的执行价，它们的到期日相同，这样我们就得到了看跌价差期权．与看涨垂直价差不同，看跌价差期权的现金收入流是上面收入流的镜像反射，即使用两个不同执行价的买入期权的看跌垂直价差的到期收益图与图 1.3 中的正好相反．注意看涨和看跌的垂直价差也可以用卖出期权来构造．

考虑如下组合：购买执行价为 X_1 的买入期权并购买另一个执行价为 X_3 的买入期权（设 $X_3>X_1$），再卖出两个执行价为 X_2 的买入期权，使得 $X_2=\frac{1}{2}(X_1+X_3)$，这个组合称为蝶式价差．它可以认为是一个看涨垂直价差和一个看跌垂直价差的结合．由于买入期权价格是执行价格的凸函数（参见 § 1.2），该投资策略需要先支付一笔小额费用 $C_1+C_3-2C_2$，其中 C_i 表示执行价格为 X_i 的买入期权的价格（$i=1,2,3$），这四个买入期权在到期日的收益的和为

$$\max(S_T-X_1,0)+\max(S_T-X_3,0)-2\max(S_T-X_2,0)$$
$$=\begin{cases}0, 当\ S_T\leqslant X_1\\ S_T-X_1, 当\ X_1<S_T\leqslant X_2\\ X_3-S_T, 当\ X_2<S_T\leqslant X_3\\ 0, 当\ X_3<S_T\end{cases}\qquad(4)$$

上面的和在 $S_T=X_2$ 时有最大值，而在 X_2 两侧是线性地减少的，在 $S_T=$

X_1 和 $S_T=X_2$ 时和式为零及在区间(X_1,X_3)之外,和式为零.

蝶式价差在到期日的收益等于上面和式减去相应的那笔小额费用,其到

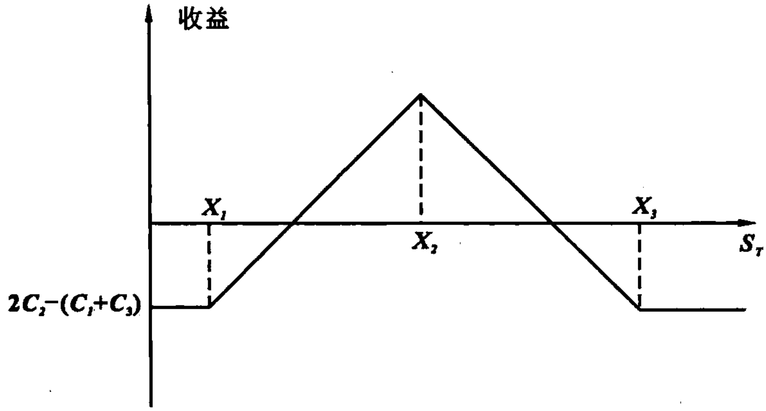

图 1.4 带有四个买入期权的蝶式价差的到期收益

期收益图见图 1.4.水平价差的分析比垂直价差更复杂,因为必须知道组合中期权有效期内的价格函数.例如考虑由两个执行价格都是 X 但到期日为 T_1 和 $T_2(T_2>T_1)$的买入期权构成的水平价差,其中有效期较短的处于空头而有效期较长的处于多头.由于有效期较长的买入期权费用较高,故持有此组合还是需要费用的.买入期权的价格可以视为标的资产价格 S_t 和时间 t 的函数,用 $C_i(S_t,t)$表示到期日为 $T_i(i=1,2)$的买入期权的价格函数,在时刻 T_1,有效期短的期权执行的收益为 $\max(S_{T1}-X,0)$,而有效期长的期权的价格由 $C_2(S_{T1},T_1)$给出,这个水平价差在时刻 T_1 的价值为 $C_2(S_{T1},T_1)-\max(S_{T1}-X,0)$,故在时刻 T_1 的收益等于组合的价值减去初始费用.假设 $C_2(S_{T1},T_1)$已知(根据本书后面章节给出的定价公式),则在较早的到期日 T_1 的收益图可以画出.

【联合】

联合是包含不同类型的期权,但标的资产相同的证券组合.一个普通的例子是底部对敲.即同时买进一个买入期权和一个卖出期权,它们有相同的执行价 X 和到期时间 T,底部对敲的到期收益图形如字母 V(见图 1.5),其到期收益是

$$\max(S_T-X,0)+\max(X-S_T,0)$$

$$=\begin{cases}X-S_T, \text{当 } S_T\leqslant X\\ S_T-X, \text{当 } S_T>X\end{cases} \tag{5}$$

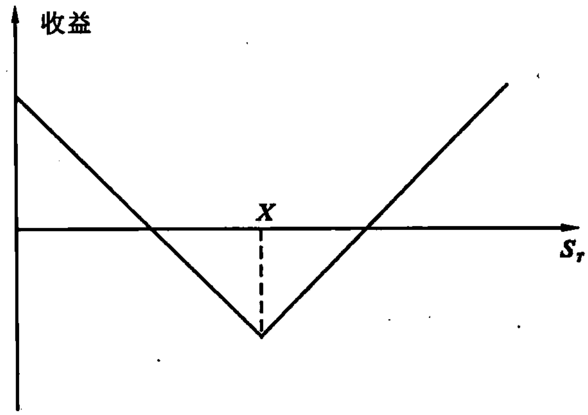

图 1.5　底部对敲的到期收益图

由于两个期权都处于多头头寸，构造底部对敲需要支付两方面的费用．

顶部对敲与底部对敲正好相反，它由卖出执行价和到期日相同的买入期权构成．在到期资产价格接近 X 时它有赢利但资产价格朝正反两方向运动远离执行价时会遭受大的损失．

其他常见的联合的例子包括看跌对敲、看涨对敲、异价对敲、篮子价差等等．

有许多构造价差和联合的方法，用这样构造出来的产品可以逼近所期望的到期收益模式，这是很有吸引力的．这是为什么交易策略多与期权挂钩而不仅仅与标的资产挂钩的原因．注意蝶式价差有三角形的到期收益特性，利用它可以逼近投资者所偏爱的任意收益特性．

注意：上面展示的收益图表示了将期权头寸持有至到期日时组合的收益．在到期日之前，收益图更为复杂，它们和定价模型有关，需要研究在各个瞬时组合的价值．

§1.2　期权价格的合理边界

在这一节我们讨论期权价格所在的范围．我们还没有讨论资产价格运动

的概率分布因而不能推出公平的期权价格．然而我们试图导出一些合理的界限，任何可接受的均衡价格都落在此范围内．这里的基本假设是投资者为财富追求者及无风险套利机会不存在．

我们首先给出资产不分红的欧式和美式期权值的合理边界，导出依赖于执行价格 X，资产价格 S 和距到期时间的长度 τ 的期权价格的数学性质．其次研究红利对这些合理边界的影响，美式期权提前执行的可能性可以从对这些期权边界的分析中得到提示．买入和卖出期权之间的关系(称为买入卖出平价关系)也被推导出来．我们还把买入卖出平价关系和对合理边界的分析结果推广到外币期权情况．

为此我们要引入现金的时间价值概念．这是一个普通的概念，现在的一美元比将来的一美元有更高的价值，因为这笔现金可以获得正的利息．或者反过来，一笔少于一美元的资金在一段时间后由于增加了利息会变为一美元．用 $B(\tau)$表示到期日面值为一美元的无息票的无风险债券的现值，这里 τ 是距到期时间的长度(对于债券常使用到期时间而对期权则使用交割时间)．在利率为常数 r 的简单情况，债券价值 $B(\tau)$由 $e^{-r\tau}$给出，当 r 不是常数而是 τ 的已知函数时，$B(\tau)$等于 $e^{-\int_0^\tau r(u)du}$. 在债券是附息票的且利率是随机的情况下，计算 $B(\tau)$的公式会更复杂.(见 7.1 节)

在这本书中，我们总用大写字母 C 和 P 分别表示美式买入和卖出期权的价值，而用小写字母 c 和 p 表示相应的欧式期权的价值．(在不会导致混淆时，在后面为了书写方便，对欧式买入期权，也用大写的 C 表示其价值).

【无义务条件】

所有的期权价值都是非负的，即

$$C\geqslant 0,\quad P\geqslant 0,\quad c\geqslant 0,\quad p\geqslant 0$$

这些关系从期权合同的无义务性质直接得出．

【内在价值】

在交割日 $\tau=0$，期权收益(到期收益)是

$$C(S,0,X)=c(S,0,X)=\max(S-X,0) \tag{2.a}$$

$$P(S,0,X)=p(S,0,X)=\max(X-S,0) \tag{2.b}$$

进一步地，由于美式期权可以在交割日前任何时刻执行，它们的价值必然大于其内在价值，即有

$$C(S,\tau,X)\geqslant\max(S-X,0) \tag{3.a}$$

$$P(S,\tau,X)\geqslant\max(X-S,0) \tag{3.b}$$

可用反证法证明这些．假设当 $S\geqslant X$ 时 C 小于 $S-X$，那么会产生获得无风险利润的套利．这只需借 $C+X$ 数量的美元购买一个买入期权然后立即执行得到价值为 S 的资产，则无风险的利润是 $S-X-C>0$. 利用同样的无套利原理可以说明(3.b).

因为欧式期权没有早期执行的权利，条件(3.a)，(3.b)对欧式买入和卖出期权不一定成立．特别地，欧式卖出期权的价值在资产价格足够低时可以小于内在价值．

【美式期权价值至少等于相应的欧式期权价值】

美式期权除了具有欧式期权的所有权利外，还具有提前执行的权利．显然，附加的权利不会产生负的价值，因此美式期权价值至少等于相应的欧式期权价值，即有

$$C(S,\tau,X)\geqslant c(S,X,0) \tag{4.a}$$

$$P(S,\tau,X)\geqslant p(S,X,0) \tag{4.b}$$

【不同到期日的期权的价值】

考虑有不同到期时间长度 τ_1 和 $\tau_2(\tau_1>\tau_2)$ 的两个美式期权．有较长到期时间的期权值必然至少等于有较短时间的期权值．因为持有期较长的期权有额外的可在两个到期日之间执行的权利，这种额外的权利也应该有正的价值，所以有

$$C(S,\tau_1,X)>C(S,\tau_2,X)，当\ \tau_1>\tau_2 \tag{5.a}$$

$$P(S,\tau_1,X)>p(S,\tau_2,X)，当\ \tau_1>\tau_2 \tag{5.b}$$

上面的结论对欧式期权不适用，因为欧式期权不能提前执行．

【不同执行价的期权价值】

对两个买入期权，无论欧式的或美式的，有较高执行价的期望收益低于有较低执行价的，这是因为有较高执行价的期权得到正收益的机会严格地小于后者．而且即使得到执行，对应的现金收入也较少，因此买入期权价格函数是执行价格的减函数，即

$$c(S,\tau,X_2)<c(S,\tau,X_1),X_1<X_2 \tag{6.a}$$

$$C(S,\tau,X_2)<C(S,\tau,X_1),X_1<X_2 \tag{6.b}$$

与上面的结论相反，欧式和美式卖出期权价格函数是执行价格的增函数，即有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com