西安交大 考研

2010版 数学考研

考点精讲 方法精练

数学三

主 编 龚冬保

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

(2010 版)

数学考研
考点精讲方法精练

(数学三)

主编　龚冬保

编著　(高等教学)龚冬保　王寿生　褚维盘
　　　(线性代数)崔荣泉
　　　(概率统计)周家良

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书是专门针对考研复习编写的教材，内容严格按教育部制订的“数学考试大纲”编写。为了适应考生“复习”的特点，本书建立了与普通教材不同的体系；针对考研的特点，突出基本功和综合运用、应试能力的训练，对于数学知识，着重于分析问题和解决问题的能力，全面而有重点地覆盖了所有考点和解题方法。本书既可作“考研辅导班”的教材，也可用于考生自学，同时也可供就读本科的各专业的大学生参考。

作者在网上为本书读者免费答疑，具体方法请见2010版前言。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研考点精讲方法精练. 数学. 3/龚冬保主编；王寿生等编. —西安：西安交通大学出版社，2009. 5

ISBN 978-7-5605-2171-8

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①龚… ②王… Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021809 号

书　　名　数学考研考点精讲方法精练(数学三)
主　　编　龚冬保
责任编辑　叶涛

出版发行　西安交通大学出版社
　　　　　(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　西安建科印务有限责任公司

开　　本　787mm×1 092mm　1/16　**印张** 23　**字数** 704 千字
版次印次　2009 年 5 月第 4 版　2009 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-2171-8/O·233
定　　价　39.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

2010 版 前 言

—— 兼评 2009 年考研试题

见到 2009 年数学的三套考研试卷，给我们的印象：还是基本功重要，今年的题看起来不难，但有的题综合性强，做起来总有些"弯"不好拐. 只有基本功过硬的考生，才能很轻松地考出好成绩. 狠抓基本功是我们所编辅导书与"模拟试卷"所坚持的一贯宗旨. 可以说，每年的数学试卷都不会使我们感到意外！下面挑几个典型题来加以说明.

例 1　当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2\ln(1 - bx)$ 是等价无穷小. 则(　　)

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$.　　(B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.　　(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$.　　(D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

解　这是三套试卷中均有的一道题.

运用我们书中强调的无穷小分析法：首先 $g(x) \sim -bx^3$ 是 x 的三阶无穷小，故 $a = 1$；由泰勒公式 $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. 即得 $b = -\frac{1}{6}$. 选(A).

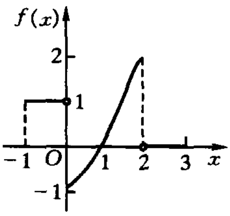
例 2　(1) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 2$，则三阶矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为________.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} =$ ________.

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (1,0,k)^{\mathrm{T}}$. 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 则 $k =$ ________.

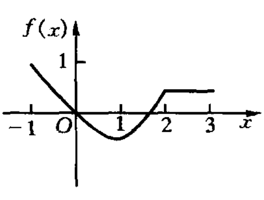
解　这三道题分别出自数学一、二、三试卷，考点与方法一样，只要解(1).

由于 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 1，因此 0 是二重特征值，而由特征值之和是矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的迹，即是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 2$. 故非零特征值就是 2；同样(2) 是(1) 的逆问题，知 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = 2$；(3) 中 $1 + 0 + k = 3$，故 $k = 2$. 这些题应不假思索即能写答案.

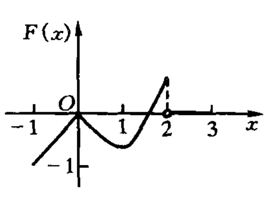


例 3　设 $y = f(x)$ 在$[-1,3]$ 上图形为(见右图)：

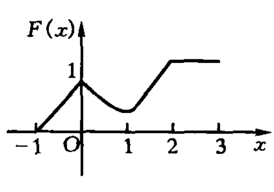
则 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 图形为(　　).



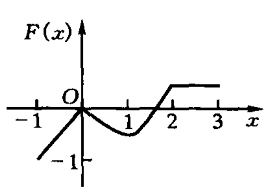
(A)



(B)



(C)



(D)

解　这是一道比较综合的好题. 这样看：在$[-1,0]$ 中，$F(x) = x$. 因此排除了(A)(C) 两选项；而 $f(x)$ 在$[-1,3]$ 上有界可积，故 $F(x)$ 连续而排除(B)，便容易选到(D).

值得注意的是，数学一、二、三共同考的关于伴随矩阵的题.

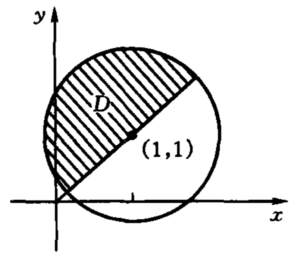
例 4 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^*$ 为（　　）.

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

解 由 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 6\boldsymbol{E} \end{pmatrix}=6\boldsymbol{E}$. 知选(B).

在我们 2009 版的书上，有与此几乎是相同的例题.

例 5 计算 $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.



例 5 图

解 这是一道要用"平移"变换的题，即令 $\begin{cases} x-1=r\cos\theta \\ y-1=r\sin\theta \end{cases}$. 如图. 则

$$I=\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}r=-\frac{4}{3}.$$

这是数学二和数学三一道 10 分题，基本功好，做起来都不用草稿. 但基本功稍差点的同学很容易将 r 的上限写作 2，或把 θ 的上下限写成 $0-\pi$，从而丢分.

例 6 a_n 为曲线 $y=x^n$ 和 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围面积，求 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$.

解 $a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\ (n=1,2,\cdots)$. 因此

$$S_1=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

而 $S_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots=1-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right)=1-\ln 2.$

这道题仅在数学一试卷上，主要是命题人以为 S_2"难求"，其实，在我们书上十分强调"五个泰勒级数"，其中之一是

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \quad \text{令 } x=1 \text{ 即得 } 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\ln 2$$

其实，本题出给数学二的考生也能作，就是用数列极限作，至于和 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$，在我们书上讲过

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C$. 故有

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\alpha_n$（$\alpha_n$ 是无穷小量）

$$\begin{aligned} \text{于是 } 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots &=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right] \\ &=\lim_{n\to\infty}[C+\ln(2n+1)+\alpha_{2n+1}-(C+\ln n+\alpha_n)] \\ &=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\ln 2. \end{aligned}$$

例 7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$，分别求使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$ 和 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的向量 $\boldsymbol{\xi}_2$ 和 $\boldsymbol{\xi}_3$，并证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

解　在解题前首先要看到$A\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，及$A$的第三列向量正是$-\boldsymbol{\xi}_1$，$r(A)=2$，便容易得到$A\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$的通解是

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}+C_1\boldsymbol{\xi}_1.\ (C_1\text{ 是任意实数})$$

$A^2=\begin{bmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{bmatrix}$，$r(A^2)=1$，解得 $\boldsymbol{\xi}_3=(\frac{1}{2},0,0)^{\mathrm{T}}+C_2\boldsymbol{\xi}_1+C_3(0,0,1)^{\mathrm{T}}$

我们用两种方法证明$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$线性无关：

证 1. $|(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)|=\begin{vmatrix}1&1+C_1&\frac{1}{2}+C_2\\-1&-1-C_1&-C_2\\2&1+2C_1&2C_2+C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\frac{1}{2}\\-1&-1&0\\2&1&C_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq 0$

故$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$线性无关.

证 2. 令$\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\lambda_3\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}$来证明$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

为此用A乘以两边得　　$\lambda_2\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_3A\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}$

两边再乘以A得$\lambda_3\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，故$\lambda_3=0$，从而有$\lambda_2=\lambda_1=0$.

由证 2，我们可以将本题的证明推广到一般情况：

设A是n阶矩阵，$\boldsymbol{\xi}_1$是n维非零向量，且$A\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，$A\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$A^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$，…，$A^{n-1}\boldsymbol{\xi}_n=\boldsymbol{\xi}_1$均存在，则$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$线性无关.

以上我们试解了 2009 年的部分试题，主要是展示基本功的重要性. 狠抓基本功训练，做到："凡是考研基本题都会做；凡是会做的题都能拿分"，便有把握取得理想的成绩.

我们将于 7 月下旬至明年 1 月考前，在网上回答读者在阅读本书时所提出的问题. 并期待着听到您在 2010 年考研成功的信息！

编　者

2009 春，于西安交大

第 1 版前言

目前考研的数学辅导书很多，却没有一本专门指导考研复习使用的教材，广大考生很希望有这样的教材。为此，我们尝试编写了本教材，以帮助考生能按教育部制订的研究生入学考试的《数学考试大纲》，全面系统地、有重点地、高效率地复习数学知识，取得好成绩。

复习是重复学习，不是重新学习。考研教材应与普通教材不同。首先，普通教材必须严格地按内容的逻辑顺序来编写，而考研教材不必受此拘束，可以从读者最熟悉的内容入手。比如高等数学部分，本书采取从微分法开始，以微分带积分，以积分促微分，使微积分紧密结合，深入浅出地讲完一元微积分的全部内容。其次，普通教材着重一个一个地讲解知识单元，而考研教材则侧重于内容间的联系。如本书线性代数部分将矩阵与行列式、向量代数与线性方程组、特征值特征向量与二次型紧密结合。第三，创立了一种新的体系，在逻辑顺序上更加符合考生的认识层次，更加适合于高效的复习。如概率论部分，先讲离散型随机变量的有关概率问题，再讲连续型随机变量的问题，再讲它们间的联系。第四，本书针对考研主要是考核解题能力的特点，安排了大量的例题，采用一题多解，一题多变的方式，侧重讲解题的思路、方法和技巧，培养读者灵活的分析能力和解决数学问题的能力。第五，根据编者多年辅导考研数学的经验，本书严格按《数学考试大纲》，从内容上既照顾了全面覆盖所有的考点，又突出了重点，从方法上既介绍了数学处理问题的基本方法，又突出了主要方法，特别考虑到考研试题中 70%左右的是基本题，本教材在基本内容、基本方法上讲述的篇幅最大，对一些难题讲述，则侧重讲一道难题的思路，以及它与基本内容的联系，如何作到熟能生巧等等。第六，作为一本复习教材，本书还考虑要便于考生自学，因此，在许多题后附了不少注释，还介绍了不少自编练习题的方法。希望读者在阅读本书时，要一边看书一边自己动手推导，在读完一节后，最好将这一节书中的例题当作习题，自己独立做一遍，然后再作本章练习题，这样效果会更好。

本书既然是一本考研的复习教材，因此，书中对一些估计考生很熟悉的内容，一些定理的证明、公式的推导等略去不讲，如果想要知道相关的内容，可以在任何一本普通的教材中找到。

感谢西安交通大学出版社为本书的编辑和出版所作的努力。希望本书能受到读者的欢迎，更希望广大读者多提意见和建议，以使本书能改得更好，成为准备参加考研读者的良师益友。

编者

2006.3 修改于西安

目　录

第 1 章　一元函数微积分(一)

1.1　微积分的基本方法

本书为何从微、积分法开始，而不从函数、极限开始?这正是本书的特点. 我们认为，“复习”应当从你最熟悉、最容易提起回忆的内容入手，而不是从头再学一遍，这样效率会更高、效果会更好.

1.1.1　微积分的基本公式

定义 1.1　在某个区间 I 上，若 $F'(x) = f(x)$，便称函数 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数，而称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的不定积分(C 是任意常数).

不定积分记为$\int f(x)\mathrm{d}x$.

从运算的角度讲，不定积分是微分的逆运算. 因此，微积分运算的基础在于微分法. 利用熟悉的微分，来做不太熟悉的积分，是复习微积分运算基本功的好方法.

例 1.1　求$\int \sin 3x\mathrm{d}x$.

解　这样想：$\cos 3x$ 求导能得到 $\sin 3x$，于是求导：$(\cos 3x)' = -3\sin 3x$，从而得$\int \sin 3x\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

这就是我们说的用微分做积分题的方法，非但快，还不会出错，因为我们已经用求导验证了所得到的结果. 下一个例题更能看出将微积分联系起来的好处.

例 1.2　验证表 1.1 中的基本公式(13)′，即

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

解　做此题有一个巧妙方法

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \overset{①}{=} \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x \overset{②}{=} \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{③}{=} \int \frac{\mathrm{d}(x+\sqrt{x^2+a^2})}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \overset{④}{=} \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

这个方法是怎样得到的呢?原来它来自于求导的逆运算

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]' \overset{④'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}(x+\sqrt{x^2+a^2})' \overset{③'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$\overset{②'}{=} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}} \overset{①'}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

上面求导的倒数第 1 步即等式 ①′ 与积分的第 1 步即等式 ① 倒过来看是一样的；同样 ②′ 与 ②、③′ 与 ③、④′ 与 ④ 是对应的. 即，将求导的流程倒过来做，便得出这个积分的方法.

通过微分方法做积分题，可以让我们取得复习微积分的主动权，可以自己编题，先做微分，再反过来从微分的结果做积分.

例 1.3　我们目的是练习分部积分法，因此，编出一个题：$x^2\mathrm{e}^{-x}$，求导得$(x^2\mathrm{e}^{-x})' = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}$；再求积分：

$$\int(2x-x^2)e^{-x}dx=-(2x-x^2)e^{-x}+2\int(1-x)e^{-x}dx=x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2(1-x)e^{-x}-2\int e^{-x}dx$$
$$=x^2e^{-x}+C.$$

因为是自己编的题，先求导，再积分，既练了微分，又练了积分，不用课本也不用老师、自编、自导、自演练，何乐而不为呢！我们提倡这样的复习方法：抓住内容间的联系，把书读薄，这样能够提高复习效率，增强复习效果.

为了练习微积分基本功，先要熟悉基本公式和运算法则，而且还是将微分和积分相对照更好.（见表 1.1 和表 1.2）.

表 1.1 微积分基本公式对照表

基本导数公式	对应的不定积分公式
① $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	①′ $\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1)$
② $(\ln\|x\|)'=\frac{1}{x}$	②′ $\int\frac{dx}{x}=\ln\|x\|+C$
③ $(a^x)'=a^x\ln a\quad(a>0,a\neq1)$	③′ $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\quad(a>0,a\neq1)$
④ $(\sin x)'=\cos x$	④′ $\int\cos x dx=\sin x+C$
⑤ $(\cos x)'=-\sin x$	⑤′ $\int\sin x dx=-\cos x+C$
⑥ $(\tan x)'=\sec^2x$	⑥′ $\int\sec^2x dx=\tan x+C$
⑦ $(\cot x)'=-\csc^2x$	⑦′ $\int\csc^2x dx=-\cot x+C$
⑧ $(\arcsin\frac{x}{a})'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$	⑧′ $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$
⑨ $(\arctan\frac{x}{a})'=\frac{a}{a^2+x^2}\quad(a>0)$	⑨′ $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$
⑩ $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$	⑩′ $\int\mathrm{ch}x dx=\mathrm{sh}x+C$
⑪ $(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$	⑪′ $\int\mathrm{sh}x dx=\mathrm{ch}x+C$
⑫ $(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$	⑫′ $\int\frac{dx}{\mathrm{ch}^2x}=\mathrm{th}x+C$
⑬ $(\ln\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\|)'=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\quad(a>0)$	⑬′ $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\|+C\quad(a>0)$
⑭ $(\ln\|\frac{a+x}{a-x}\|)'=\frac{2a}{a^2-x^2}\quad(a>0)$	⑭′ $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\|\frac{a+x}{a-x}\|+C\quad(a>0)$

对此表中 14 对公式，务必记牢；以导数公式为基础，做到倒背如流.

由于紧扣微积分的联系，考虑到读者对微分熟悉，对积分较生疏，因此，我们以下主要先讲四种基本积分方法，读者应养成用微分检验积分结果的习惯.

表 1.2　微积分基本运算法则对照表

微分法(设 $F'(x)=f(x),G'(x)=g(x)$)	积分法
① 和的微分 $d[F(x)+G(x)]=f(x)dx+g(x)dx$	①′ 分项积分法 $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
② 复合微分法 $dF(u(x))=f(u)du=f(u(x))u'(x)dx$	②′ 第一类换元积分法 $\int f(u(x))u'(x)dx=\int f(u)du$
③ 复合微分法 $dF(x(t))=f(x)dx=f(x)\dot{x}(t)dt$	③′ 第二类换元积分法 $\int f(x)dx=\int f(x(t))\dot{x}(t)dt$
④ 乘积微分法 $d(uv)=udv+vdu$	④′ 分部积分法 $\int udv=uv-\int vdu$

1.1.2　分项积分法

例 1.4　$\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C.$

例 1.5　$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx=x-\arctan x+C.$

例 1.6　$\int\tan^2 xdx=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+C.$

分项积分法是最基本却又是容易被忽视的积分法，在复习中值得留意.

1.1.3　第一类换元积分法(凑微分的积分法)

例 1.7　计算$\int\sin 2xdx$.

解 1　原式$=\frac{1}{2}\int\sin 2xd(2x)=\frac{-1}{2}\cos 2x+C.$

注　这里，实际上是令 $2x=u$，但当对这样简单的复合求导逆运算熟悉时，不必写出新的积分元 u，大多数的第一类换元积分法都可以不写出 u，而是将被积表达式凑成微分形式，即如 $\sin 2xdx=d(-\frac{1}{2}\cos 2x)$，故也称凑微分法.

解 2　原式$=2\int\sin x\cos xdx=2\int\sin xd(\sin x)=\int d\sin^2 x=\sin^2 x+C.$

解 3　原式$=2\int\cos x\sin xdx=-2\int\cos xd(\cos x)=-\cos^2 x+C.$

复合求导是最重要的微分法则，因此，**凑微分法是积分的最重要的方法.**

例 1.8　求$\int\frac{dx}{\cos x}$.

解 1　$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}dx=\int\frac{d(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}=\boxed{\ln|\tan x+\sec x|+C}$

解 2　$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=\boxed{\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+C}$

解 3　$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\boxed{\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C}$

解 4 $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}=\int\frac{d(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}=\int\frac{\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}d(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$

$$=\boxed{\ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right|+C}$$

以上 4 个方框的结果都是计算$\int\frac{dx}{\cos x}$的公式,读者可用微分还原.

例 1.9 求$\int\frac{dx}{1+e^x}$.

解 1 $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{(1+e^x-e^x)dx}{1+e^x}=x-\ln(1+e^x)+C$

解 2 $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)}=\int(\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x})e^x dx=x-\ln(1+e^x)+C$

解 3 $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=-\ln(1+e^{-x})+C$

1.1.4 第二类换元积分法

这一类是地道的换元法,第一类换元是凑微分,可以不作"换元",第二类是假设被积函数 $f(x)$ 的原函数不易看出,而令 $x=x(t)$. 这样

$\int f(x)dx=\int f(x(t))\dot{x}(t)dt$,使 $F(t)=f(x(t))\dot{x}(t)$ 比较简单. 通常,**这类换元一个最重要思路是有理化被积表达式.**

例 1.10 求$\int x\sqrt{1-2x}dx$.

解 令 $1-2x=t^2$. 则 $x=\frac{1}{2}(1-t^2)$, $dx=-tdt$.

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int(t^2-1)t^2dt=\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{6}t^3+C$$

$$=\frac{1}{30}[3(1-2x)^{5/2}-5(1-2x)^{3/2}]+C$$

例 1.11 求$\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

解 1 令 $x=a\sin t$,则 $dx=a\cos t dt$.

$$\text{原式}=a^2\int\cos^2 t dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C\text{(可以当成基本公式)}.$$

解 2 (分部积分法).

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-I+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad\text{(移项,解出 }I\text{)}$$

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

解 3 (主要也是分部积分法).

$$I=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-I\quad\text{(移项)}$$

故 $$I = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

例 1.12 求$\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$.

解 1 （第一类换元）.

$$原式 = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

解 2 $原式 = -2\int \frac{d\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - (\sqrt{1 - x})^2}} = -2\arcsin\sqrt{1 - x} + C = 2\arccos\sqrt{1 - x} + C.$

注 遇到函数，首先要想到定义域．本题被积函数的定义域是(0,1)，故我们只是在(0,1)内求它的原函数.

解 3 （直接用公式）.

$$原式 = \int \frac{d(x - \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} = \arcsin(2x - 1) + C.$$

解 4（换元积分法） 令 $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin t$

$$原式 = \int dt = t + C = \arcsin(2x - 1) + C.$$

解 5 由 $0 < x < 1$ 知，可令 $x = \sin^2 t, 1 - x = \cos^2 t, dx = 2\sin t\cos t dt.$

$$原式 = 2\int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

解 6（有理化变换）考虑被积函数.

由 $$\frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1 - x}},$$

令 $\frac{x}{1 - x} = t^2$， 则 $x = \frac{t^2}{1 + t^2}, dx = \frac{2t}{(1 + t^2)^2}dt$

$$原式 = 2\int \frac{dt}{1 + t^2} = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{\frac{x}{1 - x}} + C.$$

1.1.5 分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

将被积函数是 $u(x)v'(x)$ 的积分，化为 $v(x)u'(x)$ 的积分．要求表达式 $v(x)u'(x)$ 不比 $u(x)v'(x)$ 更复杂.

例 1.13 求$\int \ln x dx$.

解 $原式 = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

例 1.14 求$\int x^2 \arcsin x dx$.

解
$$\begin{aligned}原式 &= \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{6}\int \frac{x^2 dx^2}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{6}\int (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} d(1 - x^2) - \frac{1}{6}\int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1 - x^2) \\ &= \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{9}(1 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + C.\end{aligned}$$

例 1.15 求$\int x^2 e^x dx$.

解 1 原式$=x^2e^x-2\int xe^x dx = x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$.

解 2 (待定系数法). 设 $(x^2+bx+c)e^x$ 是要求的一个原函数.

则 $[(x^2+bx+c)e^x]' = [x^2+(b+2)x+(b+c)]e^x = x^2e^x$.

故 $b=-2, c=-b=2$. 即 $\int x^2e^x dx = (x^2-2x+2)e^x+C$.

以上分部积分法的第一个作用,是**依次化简被积函数直至求出原函数**,分部积分的第二个作用是**产生递推公式**.

例 1.16 求$\int \sin^4 x dx$.

解 记$\int \sin^n x dx = I_n$

$$I_4 = -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x\cos^2 x dx$$

$$= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x dx - 3\int \sin^4 x dx \quad (\text{将 } 3I_4 \text{ 移到等号左边}).$$

$$I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}I_2.$$

$$I_2 = \int \sin^2 x dx = -\sin x\cos x + \int dx - I_2 \quad (\text{将 } I_2 \text{ 移到等号左边}).$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}I_0 = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x + C$$

从而

$$I_4 = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{4}x + C.$$

读者可以推导一般的 $I_n = \int \sin^n x dx$ 和 $I_n = \int \cos^n x dx$ 的递推公式.

例 1.17 求 $I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

解 我们采用**倒推的方法**. 由

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2I_1 - 2I_2.$$

故 $I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C.$

分部积分的第三个主要作用是产生**循环公式**而得出积分结果.

例 1.18 求 $I = \int e^x \cos x dx$.

解 $I = e^x\cos x + \int e^x \sin x dx = e^x\cos x + e^x\sin x - I$ (将 I 移到等号左边)

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

例 1.19 求 $I = \int \sqrt{a^2+x^2} dx \quad (a>0)$.

解 1 $I = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - I + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ (移项)

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C.$$

解 2 $I = \int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + x\sqrt{a^2+x^2} - I$ (移项)

$$I=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C\text{（此结果也可当公式用）}$$

读者还可用换元积分做本题.

有理函数的积分主要是用**分项积分**.其关键是化一个分式为部分分式，而化一个分式为部分分式的关键是将分母分解因式.三角有理函数从理论上讲用万能变换：即设 $\tan\frac{x}{2}=t$，可将三角有理函数化为有理函数的积分.但一般做题用万能变换往往十分麻烦，要利用三角函数间的关系灵活去做题，也往往要综合运用以上四种基本的积分方法.

例 1.20 求 $\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$.

解 本题中 $\frac{x+5}{x^2-6x+13}$ 已是部分分式了，请注意以下分部积分的技巧：

由 $(x^2-6x+13)'=2x-6$，化 $x+5=\frac{1}{2}(2x-6)+8$.于是

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+\int\frac{8}{(x-3)^2+4}\mathrm{d}(x-3)=\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+13|+4\arctan\frac{x-3}{2}+C.$$

例 1.21(2000，二)① 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\mathrm{e}^t$，得 $f(t)=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$，则 $f(x)=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}$.

$$\text{原式}=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$$

例 1.22(2000，四) 求 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 1 原式 $=2\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.$

解 2 令 $x=\sin^2t$.则

$$\text{原式}=2\int t\cos t\mathrm{d}t=2t\sin t-2\int\sin t\mathrm{d}t=2t\sin t+2\cos t+C=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.$$

例 1.23(2001，一) 求 $\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

解 1
$$\text{原式}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x})}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$
$$=-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\arctan\mathrm{e}^x)+C.$$

解 2 令 $\mathrm{e}^x=\tan t$.则 $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\tan t$.

$$\text{原式}=\int\frac{t}{\tan^3t}\mathrm{d}\tan t=-\frac{1}{2}\frac{t}{\tan^2t}+\frac{1}{2}\int\cot^2t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tan^2t}-\int\csc^2t\mathrm{d}t+\int\mathrm{d}t\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tan^2t}+\cot t+t+C\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}+\mathrm{e}^{-x}+\arctan\mathrm{e}^x+C\right).$$

例 1.24(2001，二) 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 令 $x=\tan t$.则 $\mathrm{d}x=\sec^2t\mathrm{d}t$.

$$\text{原式}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\sin^2t}=\arctan\sin t+C=\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

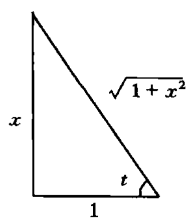


图 1.1

① (2000，二)表示 2000 年数学二的试题.下同.