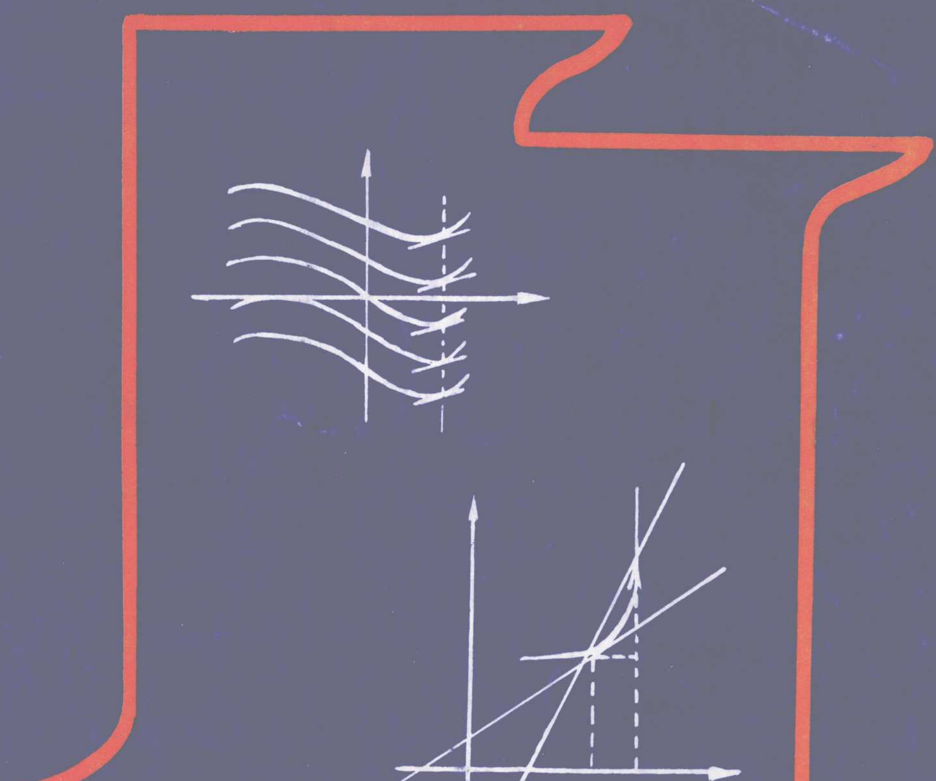
高等院校试用教材

高等数学

梁保松　刘秋香　主编



河南科学技术出版社

试用教材

高 等 数 学

梁保松 刘秋香 主编

河南科学技术出版社

一九九三年七月

豫新登字 02 号

内 容 提 要

高等数学是高等院校的一门重要基础课。内容包括：函数的极限与连续、一元函数微积分及其应用、多元函数及其微分法、二重积分、微分方程等。各章节后配有练习题，习题答案附书后，便于使用。

本书可作为高等院校农、林、医、经济管理、财会等专业的高等数学教材，也可作为农业、工矿企业科技人员、管理人员的参考书。

高 等 数 学
梁保松 刘秋香 主编
责任编辑 张 鹏
河南科学技术出版社出版发行
解放军测绘学院实习印刷厂印刷
787×1092 毫米 16 开本 14.5 印张 380 千字
1993 年 7 月第 1 版 1993 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—3，000 册
ISBN 7—5349—1212—1/T·248

定 价： 9.5 元

前　　言

随着我国社会主义经济建设和经济体制改革的深入发展，数学方法的研究和应用日益受到广大科技人员和实际工作者的重视，定量分析方法已成为科研人员的重要工具，这就对数学教学提出了更高的要求。为适应我国教育改革和四化建设的需要，我们和其他兄弟院校共同组织编写了这套教材。

这套教材共分两册：《高等数学》和《应用数学》。本教材与同类教材相比，具有以下三个特点：

一、全套教材包括了微积分、线性代数、概率论与数理统计的基本内容。全书结构严谨，重点突出，内容深入浅出，通俗易懂。在基本概念和方法的阐述上，着重于思路分析，注意培养学生的思维能力，可读性强。

二、本套教材既顾及教学大纲的要求，又考虑了高等教育教学改革的需要。教材突出实用性，注意增加了经济建设中的实例及管理技术方法。无论是基本概念还是基本运算都考虑了学用结合，摒弃了一些不必要的繁杂的推导过程。

三、为加深对基本概念的理解，掌握计算方法，提高计算能力，本书各章节后面都配有足够的习题，难易适当。书后附有答案，供教学时参考使用。

讲授《高等数学》通常需要90－100学时，《应用数学》通常需要110－120学时。书中某些章节加了“*”号，选用教材时可根据教学需要及学时适当安排或略去不讲。

本书可作为高等院校农、林、医、经济管理、财会等专业的教材，也可作为农业、工矿企业科技人员、管理人员的参考书。

本书由河南农业大学、河南医科大学、郑州轻工业学院、河北农业技术师范学院、河南建筑职工大学、河南省计划统计学校等院校联合编写。

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，欢迎使用本教材的同志批评指正。

编　者

1993年3月

《高等数学》编委会

主　　编　梁保松　刘秋香
主　　审　程　序　宋耀东
（以下以姓氏笔画为序）
副主编
王莲花　叶耀军　张学武
邱绍学　林　文　郭建富
编　　委　安宗灵　孙　翔　朱　倩
张大娥　张银鹤　郑国清
武　茜　侯云先　党耀国
曹殿立　韩可众
绘　　图　娄爱真

目　　录

第一章　函数的极限与连续性 …… (1)

§ 1.1　函数的概念 …… (1)

一、函数的定义 …… (1)

二、复合函数 …… (2)

三、初等函数 …… (2)

习题 1—1 …… (3)

§ 1.2　极限的概念 …… (4)

一、数列极限 …… (5)

二、函数极限 …… (10)

习题 1—2 …… (14)

§ 1.3　无穷大量与无穷小量 …… (15)

一、无穷大量 …… (15)

二、无穷小量 …… (16)

三、无穷小量的运算定理 …… (17)

习题 1—3 …… (18)

§ 1.4　函数极限的运算法则 …… (18)

一、函数的和、差、积、商的极限 …… (18)

二、无穷大量的运算 …… (21)

三、复合函数极限的运算法则 …… (22)

四、关于函数$[f(x)]^{g(x)}$的极限 …… (22)

习题 1—4 …… (24)

§ 1.5　两个重要极限 …… (24)

一、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ …… (24)

二、$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ …… (25)

习题 1—5 …… (26)

§ 1.6　无穷小量的比较 …… (27)

习题 1—6 …… (28)

§ 1.7　函数的连续性 …… (28)

一、连续函数的概念 …… (28)

二、函数的间断点 …… (30)

三、连续函数的运算与初等函数的连续性 …… (31)

四、闭区间上连续函数的性质 …… (33)

习题 1—7 …… (34)

第二章　导数与微分 …… (35)
§2.1　导数的概念 …… (35)
一、问题提出 …… (35)
二、导数的定义 …… (36)
三、导数的几何意义 …… (37)
四、求导数的步骤 …… (37)
五、可导性与连续性的关系 …… (38)
习题 2—1 …… (39)
§2.2　求导数的一般方法 …… (40)
一、导数的四则运算 …… (40)
二、基本初等函数的导数 …… (41)
三、反函数的导数 …… (43)
四、复合函数的导数 …… (44)
五、隐函数及由参数方程确定的函数的导数 …… (47)
习题 2—2 …… (49)
§2.3　微分 …… (51)
一、微分的定义 …… (51)
二、微分的运算法则 …… (53)
三、高阶导数与高阶微分 …… (55)
*四、微分的简单应用 …… (56)
习题 2—3 …… (58)
第三章　微分学基本定理 …… (59)
§3.1　中值定理 …… (59)
一、费尔马定理 …… (59)
二、罗尔定理 …… (59)
三、拉格朗日中值定理 …… (61)
*四、柯西定理 …… (63)
习题 3—1 …… (64)
§3.2　洛必达法则 …… (65)
一、“$\frac{0}{0}$”型 …… (65)
二、“$\frac{\infty}{\infty}$”型 …… (66)
三、其它类型的未定式 …… (67)
习题 3—2 …… (69)
*§3.3　泰勒公式 …… (69)
习题 3—3 …… (72)
第四章　导数的应用 …… (74)
§4.1　函数的增减性 …… (74)
习题 4—1 …… (76)

§ 4.2　函数的极值…………………………………………………………(77)
习题 4—2 ……………………………………………………………(79)
§ 4.3　函数的最大值与最小值…………………………………………(80)
习题 4—3 ……………………………………………………………(82)
* § 4.4　一元函数作图法 ………………………………………………(82)
一、曲线的凹凸与拐点 ………………………………………………(82)
二、渐近线 ……………………………………………………………(84)
三、函数作图的一般程序 ……………………………………………(85)
习题 4—4 ……………………………………………………………(86)
第五章　不定积分 ……………………………………………………(87)
§ 5.1　原函数与不定积分……………………………………………(87)
一、原函数与不定积分的概念 ………………………………………(87)
二、基本积分表 ………………………………………………………(88)
三、积分法则 …………………………………………………………(89)
习题 5—1 ……………………………………………………………(90)
§ 5.2　换元积分法……………………………………………………(91)
一、第一类换元积分法 ………………………………………………(91)
二、第二类换元积分法 ………………………………………………(95)
习题 5—2 ……………………………………………………………(98)
§ 5.3　分部积分法……………………………………………………(99)
习题 5—3 ……………………………………………………………(102)
§ 5.4　几种特殊函数的积分举例 …………………………………(102)
习题 5—4 ……………………………………………………………(105)
第六章　定积分…………………………………………………………(106)
§ 6.1　定积分的概念和基本性质 …………………………………(106)
一、定积分问题举例……………………………………………………(106)
二、定积分的定义………………………………………………………(107)
三、定积分的基本性质…………………………………………………(108)
四、定积分的几何意义…………………………………………………(111)
习题 6—1 ……………………………………………………………(111)
§ 6.2　微积分学基本定理 …………………………………………(112)
一、积分上限的函数……………………………………………………(112)
二、积分学的基本公式…………………………………………………(114)
习题 6—2 ……………………………………………………………(115)
§ 6.3　定积分的换元积分法与分部积分法 ………………………(116)
一、换元积分法…………………………………………………………(116)
二、分部积分法…………………………………………………………(118)
习题 6—3 ……………………………………………………………(120)
§ 6.4　广义积分与 Gamma 函数 ……………………………………(121)

一、积分区间为无穷区间的广义积分…………(121)
二、被积函数具有无穷间断点的广义积分…………(122)
三、Gamma 函数…………(123)
习题 6—4…………(124)
§6.5 定积分的应用…………(125)
一、平面图形的面积…………(126)
二、体积…………(127)
三、变力沿直线所作的功…………(129)
习题 6—5…………(130)
第七章 多元函数及其微分学…………(131)
§7.1 空间解析几何简介…………(131)
一、空间直角坐标系…………(131)
二、空间任意两点间的距离…………(132)
三、曲面与方程…………(132)
四、柱面…………(134)
五、空间曲线及其方程…………(135)
习题 7—1…………(137)
§7.2 二元函数的概念…………(137)
一、二元函数的定义…………(137)
二、二元函数的几何图形…………(138)
习题 7—2…………(139)
§7.3 二元函数的极限与连续…………(139)
习题 7—3…………(142)
§7.4 偏导数…………(142)
一、偏导数的定义及其计算…………(142)
二、偏导数的几何意义…………(144)
三、偏导数与连续性的关系…………(144)
四、高阶偏导数…………(145)
习题 7—4…………(146)
§7.5 全微分…………(146)
习题 7—5…………(149)
*§7.6 复合函数和隐函数的微分法…………(149)
一、复合函数的微分法…………(149)
二、隐函数的微分法…………(151)
习题 7—6…………(152)
§7.7 二元函数的极值…………(153)
一、极值的定义及其求法…………(153)
*二、条件极值…………(154)
习题 7—7…………(156)

第八章　二重积分…………………………………………………………………… (157)
§8.1　二重积分的概念 ……………………………………………………… (157)
习题 8－1 ……………………………………………………………… (159)
§8.2　二重积分的性质 ……………………………………………………… (159)
习题 8－2 ……………………………………………………………… (160)
§8.3　二重积分的计算 ……………………………………………………… (160)
一、直角坐标系下二重积分的计算……………………………………… (160)
二、极坐标系下二重积分的计算………………………………………… (166)
习题 8－3 ……………………………………………………………… (171)
第九章　微分方程…………………………………………………………………… (173)
§9.1　微分方程的基本概念 ………………………………………………… (173)
习题 9－1 ……………………………………………………………… (176)
§9.2　一阶微分方程 ………………………………………………………… (176)
一、可分离变量的微分方程……………………………………………… (177)
二、一阶线性微分方程…………………………………………………… (181)
习题 9－2 ……………………………………………………………… (186)
§9.3　几种特殊类型的二阶微分方程 ……………………………………… (187)
一、$y''=f(x)$型的方程 ……………………………………………… (187)
二、$y''=f(x,y')$型的方程 …………………………………………… (187)
三、$y''=f(y,y')$型的方程 …………………………………………… (189)
习题 9－3 ……………………………………………………………… (191)
§9.4　二阶常系数线性微分方程 …………………………………………… (191)
一、二阶常系数齐次线性微分方程……………………………………… (191)
二、二阶常系数非齐次线性微分方程…………………………………… (194)
习题 9－4 ……………………………………………………………… (200)
附录　几种常见的曲线…………………………………………………………… (201)
习题答案……………………………………………………………………………… (205)

第一章　函数的极限与连续性

§1.1　函数的概念

一、函数的定义

函数是微积分研究的基本对象．一元函数的概念中学已学过，本节仅作简要复习和适当补充．

定义 1.1.1　设在一个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x 的变化范围内的每一个值，y 按照一定法则有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x).$$

我们称 x 为自变量，y 为因变量，f 为对应法则，x 的变化范围称为函数的定义域，因变量 y 的取值范围称为函数的值域．

由函数定义知，构成一个函数关系有两个要素：定义域和对应法则．

例 1.1.1　设有两个函数 $y=\sin x$，$y=\dfrac{x\sin x}{x}$．前者的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；后者的定义域为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$．因此，这两个函数并非相等．这个例子告诉我们，如果两个函数的定义域不一样．这两个函数也是不同的．

例 1.1.2　函数 $f(x)=x^2+2x+1$ 和 $f(t)=t^2+2t+1$ 是相同的．因为这两个函数除自变量所采用的字母不同，定义域和对应法则完全相同．

应当指出，在函数的定义中，重要的是自变量 x 在它的变化范围内每取一个值，函数 y 都有确定的值与之对应．至于表示函数的方法，定义中丝毫没有加以限制．即使函数是用公式表示的，也不是非用一个式子不可，如果实际问题需要，可以用几个公式表示一个函数．

例 1.1.3　用 w 表示信件重量，s 表示应付邮资．按邮局章程规定，对于国内外埠平信，每 20 克付邮资 20 分，不足 20 克者以 20 克计，信件重量不得超过 2 公斤．这条邮章确定了 s 是 w 的函数

$$s=\begin{cases} 20, & 0 < w \leqslant 20, \\ 20\times 2, & 20 < w \leqslant 40, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 20\times 100, & 1980 < w \leqslant 2000. \end{cases}$$

这个函数是用公式表示的，不过在 w 的不同范围内要用不同的式子．

例 1.1.4　函数

$$y=f(x)=\begin{cases} -1+x^2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1+x^2, & x>0 \end{cases}$$

是定义在整个数轴上的一个函数，该函数在自变量 x 的不同范围内用不同的式子表示（图 1 —

1).

在自变量不同变化范围内可用不同式子表示的函数,叫做分段函数.

注意

(1) 分段函数是用几个式子合起来表示的一个函数,不是几个函数.

(2) 分段函数求函数值时,应先确定自变量 x 的取值在那一段,然后代入该段相应的式子.

以例 1.1.4 为例.

$f(1)=1+1^2, f(0)=0, f(-3)=-1+(-3)^2=8$.

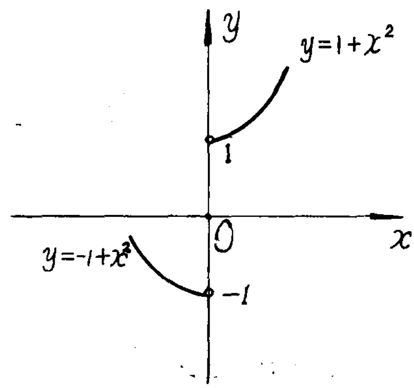


图 1—1

二、复合函数

在同一变化过程中,两个变量的联系有时不是直接的,而是通过另一个变量联系起来的.例如,y 是 u 的函数:$y=\cos u$,而 u 是 x 的函数:$u=e^x$. 这样,通过中间变量 u 的媒介,y 就成了 x 的函数:

$$y=\cos e^x.$$

这种形式的函数称为复合函数.

定义 1.1.2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U,而函数 $u=\varphi(x)$ 的定义为 X,值域为 U_1,且 $U\cap U_1$ 非空,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数. x 为自变量,y 为因变量,u 称为中间变量.

注意 定义中 $U\cap U_1$ 非空这一假设是不可缺少的,否则由 x 的值不可能确定 y 值.

例如:$y=f(u)=\arcsin u$,而 $u=\varphi(x)=x^2+2$. 则 $y=f[\varphi(x)]=\arcsin(x^2+2)$ 无意义. 这是因为 $f(u)$ 的定义域 $U=\{u\,|\,|u|\leqslant 1\}$,$u=\varphi(x)$ 的值域 $U_1=\{u\,|\,u\geqslant 2\}$,$U\cap U_1$ 为空集. 对 x 变化范围内的任何值,不能得到与之对应的 y 值.

复合函数也可以由多个函数多次复合而成.

例如,$y=f(u)$,$u=g(v)$,$v=h(x)$,则

$y=f[g(v)]=f\{g[h(x)]\}$ 可看成通过两个中间变量 u、v,经两次复合而构成的复合函数.

例 1.1.5 设 $y=u^2$,$u=\cos v$,$v=2x+1$,则 y 是 x 的复合函数:$y=\cos^2(2x+1)$.

利用复合函数的概念,可以将一个较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成的. 这常能使问题容易解决,第二章中,求复合函数的导数就是这样做的.

例 1.1.6 函数 $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 可以看成是由函数 $y=\ln u$,$u=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 复合而成的.

例 1.1.7 函数 $y=\lg^2\arccos x^2$ 可以看成是由函数 $y=u^2$,$u=\lg v$,$v=\arccos w$,$w=x^2$ 复合而成的.

三、初等函数

下列函数称为基本初等函数:

1. 常量	$y=c$,	(c 为常数)
2. 幂函数	$y=x^\alpha$,	(α 为任何实数)

3. 指数函数　　$y = a^x$,　　$(a > 0, a \neq 1)$

4. 对数函数　　$y = \log_a x$,　　$(a > 0, a \neq 1)$,

5. 三角函数　　$y = \sin x$,　$y = \mathrm{tg} x$,　$y = \sec x$,

　　　　　　　$y = \cos x$,　$y = \mathrm{ctg} x$,　$y = \csc x$.

6. 反三角函数　$y = \arcsin x$,　$y = \mathrm{arctg} x$,

　　　　　　　$y = \arccos x$,　$y = \mathrm{arcctg} x$.

这些函数及其性质,中学已学过,不再赘述.

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次函数复合过程所构成的由一个公式表达的函数.称为初等函数.

例如:$y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$,　$y = x^2\ln(1 + x)$,　$y = \mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ 等都是初等函数.

习题　1－1

1. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2$,　　$g(x) = 2\lg x$;

(2) $f(x) = x$,　　$g(x) = (\sqrt{x})^2$;

(3) $f(x) = \sqrt{x^2}$,　　$g(x) = |x|$.

2. 确定下列函数的定义域:

(1) $y = \ln\arcsin x$,　　(2) $y = \ln(1 - x) + \sqrt{x + 2}$;

(2) $y = \log_3\log_6\log_7 x$,　　(4) $y = 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{x - 2}} + \ln(2x - 3)$;

3. 求下列函数值:

(1) $F(x) = 2^{x-3}$, 求 $F(0)$, $F(1)$, $F(-3)$.

(2) $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geqslant \dfrac{\pi}{3}, \end{cases}$　求 $\varphi(\dfrac{\pi}{6})$,　求 $\varphi(\dfrac{\pi}{4})$,　$\varphi(-\dfrac{\pi}{4})$,　$\varphi(-2)$.

(3) $f(x) = \dfrac{|2x - 3|}{x - 1}$;求 $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$.

4. 设 $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = 2^x$,则 $f[\varphi(x)] =$ ________.

5. 设 $\varphi(x) = x^3 + 1$,则 $\varphi(x^2) =$ ________, $[\varphi(x)]^2 =$ ________.

6. $f(x - 1) = x^2$,则 $f(x + 1) =$ ________.

7. 下列函数由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y = \sqrt{(1 + x)^2 + 1}$,　　(2) $y = 3^{(x+2)^2}$

(3) $y = \cos^2(2x + 1)$,　　(4) $y = \sqrt[3]{\ln\cos^2 x}$

(5) $y = (x^2 + 6x + 10)\ln(x^2 + 6x + 10)$

8. 设

$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$,　　$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$.

求　$\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\varphi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$.

9. 设　(1) $f(x) = ax + b$,且 $f(0) = -2$, $f(2) = 2$,求 $f[f(x)]$.

　　(2) 设 $f(\dfrac{1}{x}) = x + \sqrt{1 + x^2}$, $(x > 0)$ 求 $f(x)$.

§1.2 极限的概念

极限是微积分的一个基本概念，是微积分的基本推论工具. 在本书的第二章、第六章，读者将看到，微积分的两个重要的基本概念 —— 导数与定积分都是由极限来定义的.

极限方法的观念是简单的，可以归结如下：为了要确定某一个数量 S，我们首先加以确定的 不是 S 本身，而是它的一串近似值，$S_1,S_2,\cdots S_n,\cdots$，这是一串愈来愈准确的近似值，然后通过这个近似“过程”来确定 S.

例如，在直角坐标系中，计算抛物线 $y=x^2$、x 轴与直线 $x=1$ 所围成的“曲边三角形”OAB 的面积.

初等数学没有提供解决这种问题的方法，因为“静止”的观点造成了初等数学的局限性.

我们用分点 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$（$n$ 为大于 1 的正整数）. 将底边 OA 分成 n 个长度相等的小段，以每一小段为底作出矩形，使矩形的左上角碰到抛物线. 很明显这 n 个矩形底长都是 $\frac{1}{n}$，它们的高度分别为：

$$0,\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

这样，我们就得到图 1 — 2 中带有阴影的台阶形. 台阶形的面积 S_n 是 n 的函数. 容易算出：

$$\begin{aligned}S_n &= 0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n^3}[1^1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]\\ &= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\ &= \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\\ &= \frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right)\end{aligned}$$

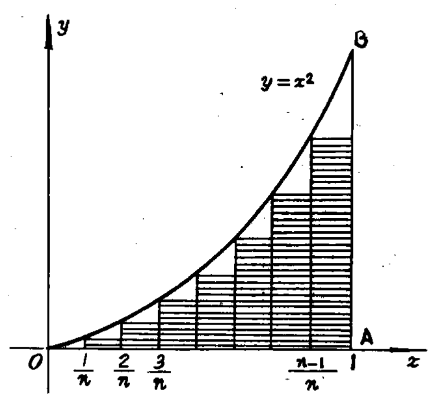


图 1—2

从几何图形看，台阶形的面积 S_n 随 n 的变化而变化，n 增大时，S_n 也在增大（参看图 1 — 3，图中带有阴影的台阶形的面积分别 S_4,S_8,S_{16}）. 当 n 无限增大时，S_n 将无限接近于“曲边三角形”的面积. 这就是说，在 n 无限增大的过程中，变量 S_n 以一个确定的数为它的变化趋势，这个确定的数就是所求的“曲边三角形”的面积.

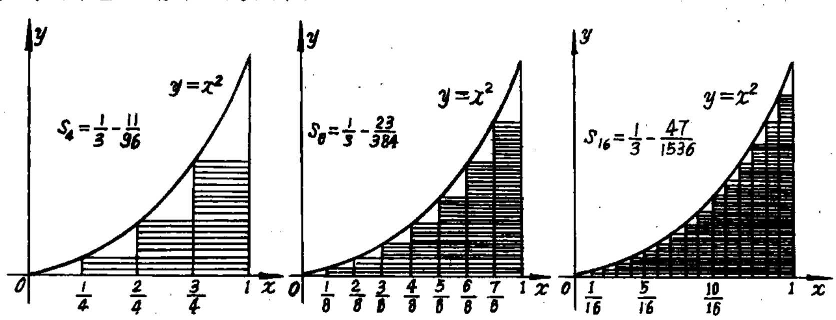


图 1—3

从 S_n 的数学表达式看，S_n 是 n 的函数，它的值随 n 的确定而确定，当 n 无限增大时，$\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}$ 无限地接近于 0. 从而 S_n 无限地接近于$\frac{1}{3}$. 这就是说，在 n 无限增大的过程中，变量 S_n 以$\frac{1}{3}$为它的变化趋势. 这个数$\frac{1}{3}$ 就是这"曲边三角形" 的面积值.

这样，我们就求得了这"曲边三角形" 的面积.

撇开这一问题的实际意义，抽象地看我们是在研究：在自变量的某个变化过程中，函数以一个确定的数为它的变化趋势. 这正是本节所要研究的极限问题.

一、数列极限

在中学已讲过数列及其极限的概念. 数列实质上是定义域为自然数集的函数：$x_n = f(n)$. 数列的第 k 项就是当 $n = k$ 时，$f(n)$ 的函数值 $f(k)$. 因此，在讲一般的函数（定义域不限于自然数集）极限概念之前，先复习一下数列极限并作适当深化.

定义 1.2.1　如果对于任意给定的正数 ε，总有正整数 N 存在，使得当 $n > N$ 时，

$$|f(n) - A| < \varepsilon \qquad ①$$

恒成立. 则称数列 $\{f(n)\}$ 当 n 无限增大时以定数 A 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

$$\text{或}\quad x_n \to A \quad (n \to +\infty)$$

如果数列 $\{f(n)\}$ 的极限存在，就说 $\{f(n)\}$ 收敛，（收敛于它的极限 A），否则，就说 $\{f(n)\}$ 发散.

这里我们强调一下，在数列 $\{f(n)\}$ 以 A 为极限的定义中，必须注意：

ε 是任意的，对于给定的 ε，定义中的 N，是按照"只要 $n > N$，上面不等式 ① 恒成立" 这一要 求来定的. 至于对于小于 N 的 n，不等式 ① 是否成立，可以不考虑. 因此，依照定义，为说明 $f(n) \to A(n \to +\infty)$，我们应当指出这样的 N 确实存在，而不要求找出"最小" 的 N 来. 换句话说，这样的 N 不是唯一的，取 $N = 100$ 符合要求，取 $N > 100$ 当然也符合要求.

数列 $\{f(n)\}$ 以 A 为极限的几何意义是：对于任意给定的正数 ε，不管它多么小，总存在着一个正整数 N，数列 $\{f(n)\}$ 中从第 $N+1$ 项起的一切项所表示的点，即

$$f(N+1), f(N+2), f(N+3), \cdots\cdots$$

所表示的点，都落在点 A 的 ε 邻域，即区间 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 内（图 1 － 4）.

例 1.2.1　证明数列 $f(n) = \frac{n}{n+1}$ 的极限是 1.

证　由于 $|f(n) - 1| = |\frac{n}{n+1} - 1|$

$= \frac{1}{n+1}$

对任意给定的正数 ε，要使不等式

$$|f(n) - 1| < \varepsilon$$

成立. 只要使不等式

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \qquad \text{即 } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

成立即可.

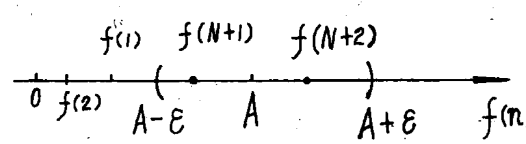


图　1—4

故取 $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 1$，当 $n > N$ 时，就有

$$|f(n) - 1| = |\frac{1}{n+1} - 1| < \varepsilon.$$

总成立. 据定义 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

例 1.2.2 证明数列 $\{f(n)\}$：

$$0.1, 0.11, 0.111, \cdots, 0.\overbrace{111\cdots1}^{n\text{个}}, \cdots$$

以 $\frac{1}{9}$ 为极限.

证 由于 $|f(n) - \frac{1}{9}| = |0.\overbrace{111\cdots1}^{n\text{个}} - \frac{1}{9}|$

$$= |\frac{\overbrace{111\cdots1}^{n\text{个}}}{10^n} - \frac{1}{9}|$$

$$= |\frac{\overbrace{999\cdots9}^{n\text{个}} - 10^n}{9 \cdot 10^n}| = |\frac{-1}{9 \cdot 10^n}| = \frac{1}{9 \cdot 10^n}$$

$$< \frac{1}{n}.$$

对任意给定的正数 ε，要使不等式

$$|f(n) - \frac{1}{9}| < \varepsilon.$$

成立，只要使不等式

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \text{即 } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

成立即可，故取 $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$，则当 $n > N$ 时，恒有

$$|f(n) - \frac{1}{9}| < \varepsilon.$$

成立. 据定义 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = \frac{1}{9}$

例 1.2.3 证明数列 $S_n = \frac{1}{3} - (\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2})$ 的极限为 $\frac{1}{3}$.

证 由于 $|S_n - \frac{1}{3}| = |-(\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2})| = \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$

$$< \frac{1}{2n}$$

对于任意给定的正数 ε，要使不等式

$$|S_n - \frac{1}{3}| < \varepsilon$$

成立，只要使不等式

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon, \text{即 } n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

成立即可，故取 $N \geqslant \frac{1}{2\varepsilon}$，当 $n > N$ 时，就恒有

$$|S_n - \frac{1}{3}| < \varepsilon$$

据定义，$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$

例 1.2.4　证明数列 $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$ 发散.

证　因 $1, -1$，在数列中交错出现，如果该数列有极限 A，那么对于任意给定的正数 ε，1 与 -1 这两个点的距离应小于 2ε. 这是不可能的，因为对于 $\varepsilon = \frac{1}{4}$ 这个结论就不成立. 所以，数列 $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$ 发散.

例 1.2.5　数列 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots, n^2, \cdots$ 发散.

因为对于任何数值 A. 当 n 充分大时，$f(n)$ 的绝对值都会超过 A.

我们称这种数列 $\{f(n)\}$ 趋向于无穷大或发散为无穷大. 记为

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$$

为方便起见，也称数列 $\{f(n)\}$ 的极限为 ∞（祥见 §1.3）.

到目前为止，要判断一个给定的数列 $\{f(n)\}$ 到底有无极限，除了直接根据定义进行检验外，还无别的办法. 下面给出在这方面常对我们有帮助的定理.

为叙述方便，先给出两个定义.

定义 1.2.2　（单调数列）如果数列 $\{f(n)\}$ 的项满足关系

$$f(1) \leqslant f(2) \leqslant \cdots \leqslant f(n) \leqslant f(n+1) \leqslant \cdots$$

则称 $\{f(n)\}$ 是递增数列. 如果满足关系

$$f(1) \geqslant f(2) \geqslant \cdots \geqslant f(n) \geqslant f(n+1) \geqslant \cdots$$

则称 $\{f(n)\}$ 是递减数列.

递增数列和递减数列，统称为单调数列.

定义 1.2.3　（有界数列）若存在两个数 $A, B(A < B)$，数列 $\{f(n)\}$ 中的每一个项都在闭区间 $[A, B]$ 内，即 $A \leqslant f(n) \leqslant B (n = 1, 2, \cdots)$ 则称 $\{f(n)\}$ 为有界数列。这时称 A 为它的下界，B 为它的上界。否则，称 $\{f(n)\}$ 为无界数列。

容易知道，有界数列有无穷多个上界和无穷多个下界.

例 1.2.6　数列

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots \frac{n}{n+1}, \cdots \qquad ②$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots \frac{1}{2^n}, \cdots \qquad ③$$

是有界数列. -1 是数列 ① 的下界，1 是其上界，$\frac{1}{2}$ 是数列 ② 的下界，1 是其上界；0 是数列 ③ 的下界 0，$\frac{1}{2}$ 是其上界.

$$2, 4, 6, 8, \cdots 2n, \cdots \qquad ④$$

$$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \cdots n^{(-1)^{n+1}}, \cdots \qquad ⑤$$

是无界数列.