高等學校交流講義

理論力學

北京師範大學呂烈揚編

（內部交流＊僅供參考）

中央人民政府高等教育部教材編審處

2

理　論　力　學

書號(8049)

新　華　書　店　總　經　售

商　務　印　書　館　上　海　廠　印　刷

一九五四年十一月上海第一次印刷　　字數 234,000
印數 1—1,880　　定價¥14,500

理論力學目錄

理論力學

引言

力學是研究物体運動規律的科學。在物質的各種不同運動形態中，力學所研究的是最簡單的，最基本的一種，就是物体在空間相對位置的改變，這是區別於物質的其他較複雜形態的運動而言。例如分子的熱運動，表現為化學變化，電磁現象等有關的原子與電子的運動等等。

為了標識物体在空間的運動必須示明某一物体對於另一物体的位置的變化。因此在研究物体運動的規律，首先就要選定另一指定物体作標準，以標記運動物体的位置。用來當作標準的那一指定物体叫作參考系，并聯系在這物体上選定一組座標系。力學在其發展的闡過程中，至伽利略（1564——1642）廣泛地闡明了力學的基本定律，而牛頓（1642——1727）集其大成。伽利略和牛頓關於座標系的選擇是基於絕對時間和空間存在的假定，依此可以確定絕對的運動，牛頓就是根據這樣的見解發表了他的運動定律。

但是現代科學否認有絕對不動的空間，所以論及運動，必須指明運動的參考系，否則運動的概念，尤其是靜止的概念都是毫無意義的。但是在一切可能的參考系內我們可以選擇某種參考系，牛頓的基本定律對於它可以適用，這種參考系即所謂慣性系。對於有許多力學現象的研究，我們可以將任何與地面有固定關係的參考系當作慣性系。

牛頓力學或古典力學在科學上一個半世紀中佔據着主要地位。直到十九世紀中葉，人們由於觀察磁場與電荷的相互作用，才發現了有不受牛頓定律支配的力。為了研究這種電磁間的相互作用，創立了電動力學。到二十世紀初期又由於理論和觀察結果的分歧，許多事實都是牛頓力學無法解釋的，引起了狹義相對論的建立，它的推廣可以解釋萬有引力，水星近日點遷移的原因等現象，成為廣義相對論。相對論力學拒絕承認牛頓的時空見解，不過力學中所研究的運動物体的速度較之光速甚小，應用牛頓力學和相對論力學所得力學各現象的結果

顯示不出差別來的。由於放射現象研究的開始，引導我們發現了原子構造極其複雜的事實，牛頓力學是不適用於原子內微觀物体的運動的研究，試用古典力學去解决這類問題是不成功的，為解釋這類問題在本世紀的三十年代又創立了量子力學。

由此可見在十八世紀認為可以解釋一切現象的古典力學，在二十世紀已有四種力學代替它了。但是這并不否認古典力學仍然有它一定的價值。依古典力學推導，計算出的結果適用於宏觀的物体，運動速度比光速小的多的各種力學的運動的情形。在這種情形下，古典力學的科學基礎仍是佔有非常重要的地位。

這理論力學的講義是以古典力學為對象，研究的系統，分為三部份：——

一是運動學，從幾何學的觀點加入時間概念，來研究物体運動的規律，而不問引起物体運動改變的原因。運動學專討論物体的位置隨時間變化的關係，及變換參考系時，位置座標，速度，加速度各量的變化。

二是動力學，研究物体的運動及產生運動的物体間作用力的關係，這是力學中的重要內容。

三是靜力學，研究在多個力作用下，物体相對靜止的條件，可認為是動力學中的一個特殊情形。

採用這種分類方法只是為了便於對力學的研究，事實上不必要割裂開有關連各類的力學現象，機械地區別出明顯的界限來。

理論力學在其被研究　發展的過程中，相似於其他科學，為了建立起實在物体運動的規律和理論，常利用若干實物理想化的虛構的模型，使問題的研究簡化，達到可以解決的境地，但是仍然保留着問題結果的一定精確程度。為此例如對於固体受外力作用，所發生的形變微不足道時，於是便自然地在力學的研究中設想剛体的存在。當然嚴格說來並無絕對剛体的存在。但在有些情況下在可以不計及物体的形變時，問題獲得了簡化地解決，并不影响結果的精確程度。又如有時我們所注意的物体的大小和同一問題中其他同類量相比，微小至可

以忽略不計時，於是在力學中自然地設想了質點的概念。在流体力學中我們時常認爲液体是不可壓縮的和無粘滯性的。雖然在實際的物質世界中，我們所看到遇到都是彈性体同流体。我們依然可以設想，質點，剛体，等作爲實際物体理想化或近似的模型。我們首先設想質點的存在，建立它的力學的理論，推廣至剛体再推廣至于彈性体和流体。理論力學就是利用這種精神作爲研究問題的方法，如此才可能普遍地和正確地對於力學有關問題進行分析和研究。下面的內容我們將也是按問題的性質，依次地由淺而深地對於力學的內容分爲質點運動學、質點動力學，剛体力學彈性体力學等等來研究。

第一章 質點運動學

§1—1 坐標系與單位向量

設 O X Y Z 是一右手的和觀察者相對靜止的坐標系。質點 P 的坐標是 $(x\ y\ z)$。則運動的質點 P 在坐標系內的位置是時間 t 的函數，

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t)$$

由上諸式消去 t 後便可得到質點的運動軌跡。

我們也可用另外一種方法描寫質點 P 的運動，試從坐標原點 O 向運動的質點 P 作一矢綫 $\overrightarrow{OP}$，以 $\vec{r}$ 代表動點 P 在空間的位置，$\vec{r}$ 被稱為質點 P 的位置向量。該點的運動即此向量的變化。

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} \qquad (1.1-1)$$

式中 $\hat{i}$，$\hat{j}$，$\hat{k}$ 表示沿坐標軸方向的單位向量。此等向量間有下列關係：

$$\left.\begin{array}{l}\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1\\ \hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0\end{array}\right\} \qquad (1.1-2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0\\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\qquad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}\qquad \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\end{array}\right\} \qquad (1.1-3)$$

故可見

$$\vec{r}\cdot\vec{r}=x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad (1.1-4)$$

如向量 $\vec{r}$ 與坐標軸各自相交成角度 α，β，γ 時，則 $\vec{r}$ 綫之方向餘弦為 l，m，n，

$$l=\cos\alpha=\frac{x}{r}\quad m=\cos\beta=\frac{y}{r}\quad n=\cos\gamma=\frac{z}{r} \qquad (1.1-5)$$

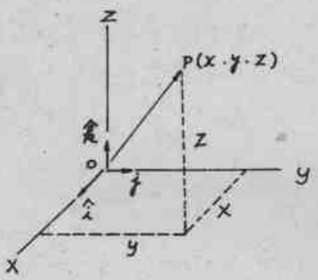
當然位置向量，可寫作，$\vec{r}=r(\hat{i}\cos\alpha+\hat{j}\cos\beta+\hat{k}\cos\gamma)$ 或

$$\frac{\vec{r}}{r}=\hat{r}_1=\hat{i}\cos\alpha+\hat{j}\cos\beta+\hat{k}\cos\gamma$$

此如 $\hat{r}_1$ 表沿 $\vec{r}$ 方向之一單位向量，由上式可見 $\vec{r}$ 之方向餘弦即等於單位向量 $\hat{r}_1$ 在坐標軸方向之三分量。

可見向量 $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$ 可以完全地確定 P 點在坐標系空間的位置。試用

(1.1—1)式用三個獨立變數 x，y，z 決定之。或用 r 與方向餘弦 α，β，γ 決定之。因 α，β，γ 只有兩個獨立的變數其間有下關係存在，



$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (1.1—7)

此關係式甚易地可由(1.1—5)式代入(1.1—4)式中得到。故P點或可用下式表示之

$$\vec{r}=\hat{i}\,r\cos\alpha+\hat{j}\,r\cos\beta+\hat{k}\,r\cos\gamma \qquad (1.1—8)$$

其中 r，與 α，β，γ 中之任意二個共有三個獨立的變數。

又可見位置向量 $\vec{r}$ 的模為

$$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (1.1—9)$$

方向餘弦又可寫作

$$\left.\begin{aligned} l&=\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ m&=\cos\beta=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ n&=\cos\gamma=\frac{z}{r}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (1.1—10)$$

§1—2 向量分析與直角坐標變換。

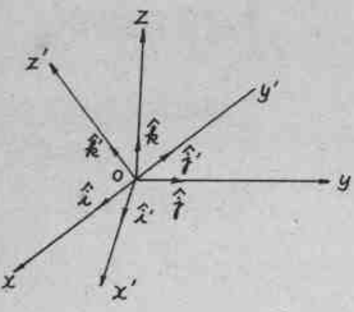
我們在討論一個向量 $\vec{r}$ 時，不僅要知道 $\vec{r}$ 在坐標系 S 內的三垂直分向量，有時為解決某些問題的需要亦須知道它在另一坐標系 S' 內三軸綫上的三垂直分向量。而第二個坐標系 S' 是從 S 坐標系繞着他們的共同原點転動得來如圖，或者二坐標系原點之間除転動外尚有移動。今討論前一情形，設 S' 的單位向量用 $\hat{i}'$，$\hat{j}'$，$\hat{k}'$，來代表。

向量 $\vec{r}$ 在 $\hat{i}'$，$\hat{j}'$，$\hat{k}'$ 方向的投影是 x'，y'，z' 則它們和 x，y，z 的關係可用下式表之，

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=x'\hat{i}'+y'\hat{j}'+z'\hat{k}' \tag{1.2-1}$$

換言之

$$\left.\begin{aligned} x&=(x'\hat{i}'+y'\hat{j}'+z'\hat{k}')\cdot\hat{i}\\ y&=(x'\hat{i}'+y'\hat{j}'+z'\hat{k}')\cdot\hat{j}\\ z&=(x'\hat{i}'+y'\hat{j}'+z'\hat{k}')\cdot\hat{k}\end{aligned}\right\}$$



$$\left.\begin{aligned} x'&=(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot\hat{i}'\\ y'&=(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot\hat{j}'\\ z'&=(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot\hat{k}'\end{aligned}\right\} \tag{1.2-2}$$

如果S坐標系的OX軸與S′坐標系的OX'，OY'，OZ'三軸之間的角度是α_1，β_1，γ_1，相似地而OY及OZ二軸同S′的三軸之間的三角度各自的等於$\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$及$\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$則(1.2—2)式可用下表表示。

	x'	y'	z'
x	$\cos\alpha_1$	$\cos\beta_1$	$\cos\gamma_1$
y	$\cos\alpha_2$	$\cos\beta_2$	$\cos\gamma_2$
z	$\cos\alpha_3$	$\cos\beta_3$	$\cos\gamma_3$

此表格即表示$x.y.z$和x'，y'，z'的關係爲：———

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\beta_1+z'\cos\gamma_1\\ y=x'\cos\alpha_2+y'\cos\beta_2+z'\cos\gamma_2\\ z=x'\cos\alpha_3+y'\cos\beta_3+z'\cos\gamma_3\end{cases} \tag{1.2-3}$$

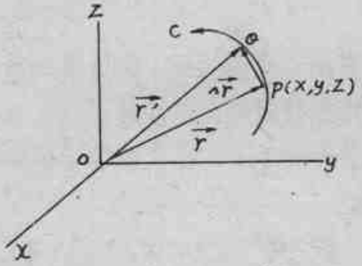
而$x'y'z'$和x，y，z的關係爲

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha_1+y\cos\alpha_2+z\cos\alpha_3\\ y&=x\cos\beta_1+y\cos\beta_2+z\cos\beta_3\\ z'&=x\cos\gamma_1+y\cos\gamma_2+z\cos\gamma_3\end{aligned} \tag{1.2-4}$$

§1-3 速度

設在時刻t質點位於P點，位置向量以$\overrightarrow{OP}=\vec{r}(t)$表示，當在時間$t+\Delta t$時，其中$\Delta t << t$，該質點運動至一鄰近於P之點Q，代表Q點的位置向量是$\overrightarrow{OQ}=\vec{r}'$則

$$\vec{r}' = \vec{r} + \overrightarrow{\Delta r} \qquad (1.3-1)$$



此處$\overrightarrow{\Delta r}=\overrightarrow{PQ}$為曲線C上P與Q兩點間的割線，我們如選取時間$\Delta t$極為暫短則P點之瞬時速度為

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \qquad (1.3-2)$$

由上式可知$\vec{V}$是一向量係沿曲線C之P點的切綫方向。$\vec{V}$的數值V叫做速率。按(1.3-2)式$\vec{V}$可以是一常數或是時間t的函數。若$\vec{V}$是一常數時則物体的運動稱作"均速運動"如果$\vec{V}$是時間t的函數時，則是"非均速運動"。

由(1.3-2)式可見速度向量在坐標軸的三分量是

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} \qquad (1.3-3)$$

故(1.3-2)式亦可寫作

$$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k} \qquad (1.3-4)$$

速度之模為

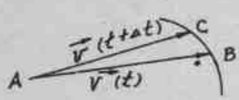
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad (1.3-5)$$

速度向量之方向餘弦是

$$\cos(\vec{V}, \hat{i}) = \frac{V_x}{V} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(\vec{V},\hat{j})=\frac{V_y}{V}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}\\ \cos(\vec{V},\hat{k})=\frac{V_z}{V}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}\end{aligned}\right\}\quad(1.3\text{-}6)$$

我們時常將各時間的$\vec{v}$首端放於一點畫出，如圖所示，則速度向量頂點的曲線稱為速端曲線。圖中，A B代表在時刻t之速度$\vec{V}(t)$，A C代表在時刻$t+\Delta t$之速度$\vec{V}(t+\Delta t)$



因此

$$\overrightarrow{BC}=\vec{V}(t+\Delta t)-\vec{V}(t)$$

代表在時間Δt內速度向量的改變。

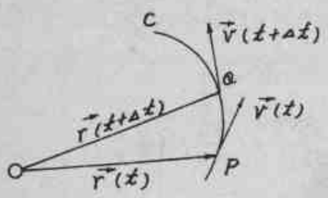
§1—4 加速度

當一物体在空間運動，若它的速度是一常數，其軌跡必是一直線反過來說若它的軌跡是一條直線，其速度却不一定是常數。因速度是一向量，它的方向雖可不變，其數值，即速率却單獨的可以是時間的函數。一般講來物体所行軌跡為一曲線，它的速度不是常數是毫無疑問的。

在圖中設在時間t時，質點位於曲線軌跡C的P點，它的速度是$\vec{V}(t)$，當時間為$(t+\Delta t)$時質點運動至Q點，它在Q點的速度是$\vec{V}(t+\Delta t)$則質點在P點的瞬時加速度是：——

$$\vec{a}=\frac{dV}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\vec{V}(t+\Delta t)-\vec{V}(t)}{\Delta t}\right]=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$=\frac{d^2x}{dt^2}\hat{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\hat{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}\quad(1.4\text{-}1)$$



物体運動的加速度可以等於零，一常數或一時間的函數，如果加速度等於零就是說物体作均速運動。

在上（1.4－1）式中

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a_x,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=a_y,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=a_z$$

代表加速度向量在坐標軸方向的分量。相似於速度情形，加速的模和方向餘弦是

$$a=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \qquad (1.4-2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\vec{a},\hat{i})&=\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}\\
\cos(\vec{a},\hat{j})&=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}\\
\cos(\vec{a},\hat{k})&=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.4-3)$$

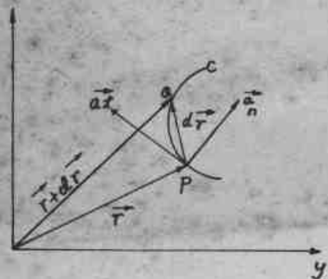
§1－5 平面曲綫運動的加速度的分量
——切綫加速度與法綫加速度。

現在將問題簡化，研究在平面上作曲綫運動的質點，由前所述其位置向量$\vec{r}$可用坐標軸之分量表示即

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j} \qquad (1.5-1)$$

此處$\hat{i}$與$\hat{j}$分別表示平面坐標，x與y軸方向之單位向量。由圖運動質點在時刻t時應在曲綫C之P點，其位置向量爲$\vec{r}$，在時刻$(t+dt)$時質點位置作一微小之變動，移至Q點，其位置向量爲$(\vec{r}+d\vec{r})$，故此微小之位移PQ可用向量$d\vec{r}$表之，如PQ之量值以ds表之。當時間間距甚爲微小，亦即當Q點無限地趨近於P點時則向量$\frac{d\vec{r}}{ds}$變爲在曲綫上P點處，沿切綫方向之單位向量。以$\hat{\tau}$表之則

$$\hat{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds} \qquad (1.5-2)$$



質點的速度為，

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\hat{i}\frac{dx}{dt}+\hat{j}\frac{dy}{dt} \qquad (1.5\text{-}3)$$

由幾何的關係顯然地有下關係

$$d\vec{r}=\hat{i}dx+\hat{j}dy \qquad (1.5\text{-}4)$$

此處 dx 與 dy 為向量 $d\vec{r}$ 沿坐標 x 與 y 方向之分量。又質點的加速度為

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\hat{i}a_x+\hat{j}a_y=\hat{i}\frac{d^2x}{dt^2}+\hat{j}\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (1.5\text{-}5)$$

以上是作平面曲綫運動的質點的加速度沿直角坐標的分量式。但我們也可以將加速度用下列另一方法分解 即分解為沿運動質點路徑的切綫和與切綫垂直的二方向的分量因我們有下關係式

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dS}\frac{dS}{dt}=\hat{\tau}\frac{dS}{dt}=v\hat{\tau} \qquad (1.5\text{-}6)$$

此處 $\frac{dS}{dt}=v$ 表質點速度的量值故

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2=v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \qquad (1.5\text{-}7)$$

將(1.5−6)式對時間 t 微分得

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(v\hat{\tau})=\frac{dv}{dt}\hat{\tau}+v\frac{d\hat{\tau}}{dt} \qquad (1.5\text{-}8)$$

因
$$\frac{d\hat{\tau}}{dt}=\frac{d\hat{\tau}}{dS}\frac{dS}{dt}=v\frac{d\hat{\tau}}{dS} \qquad (1.5\text{-}9)$$

而
$$\frac{d\hat{\tau}}{dS}=\frac{\hat{n}}{\rho} \qquad (1.5\text{-}10)$$

此處 $\hat{n}$ 表曲綫路徑法綫方向之單位向量 ρ 表路徑之曲率半徑。此在向量分析中已講過，此處推導從畧，將(1.5−9)與(1.5−10)式代入(1.5−8)式中則得

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{n}=\frac{d^2S}{dt^2}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{n} \qquad (1.5\text{-}11)$$

故在平面作曲綫運動的質點的加速度$\vec{a}$，可用沿路徑切綫方向之分量$\frac{d^2s}{dt^2}$及垂直於切綫方向即沿曲綫路徑之法綫方向分量$\frac{v^2}{\rho}$之向量和來表示前者被稱為切綫加速度以a_t表其量值，後者被稱為法綫加速度以a_n表其量值則

$$\vec{a}=a_t\hat{\tau}+a_n\hat{n} \tag{1.5-12}$$

此處，

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2} \qquad a_n=\frac{v^2}{\rho} \tag{1.5-13}$$

顯然加速度之模為：

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{dv}{d}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \tag{1.5-14}$$

例題1.物体以初速v_0沿與水平軸ox成α角射出，不計空氣阻力。試求當物体的速度與水平軸成θ角度時物体的法綫加速度，切綫加速度及物体達最高點時軌道的曲率半徑。

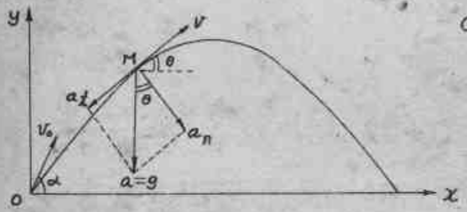
解：我們已經知道這物体的運動方程式是

$$x=v_0t\cos\alpha \qquad y=v_0t\sin\alpha\frac{1}{2}gt^2$$

微分，可見加速度分量是

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

加速度的模 $a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=g$ 現將此加速度投影於軌跡的切綫和法綫方向則



$$a_t=-a\sin\theta=-\sin\theta$$

$$a_n=a\cos\theta=g\cos\theta$$

應用法綫加速度$a_n=\frac{v^2}{\rho}$的關係式可以求得在M點的軌道曲率半徑ρ

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v^2}{g\cos\theta}$$

因 $v_x=\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha=v\cos\theta$ 可見 $v=v_0\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$代入上式故得

$$\rho=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g\cos^3\theta}$$

物体在最高點時即 $\theta=0$ 故軌道最高點之曲率半徑爲 $\rho_m=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$

例題 2.試討論作等速圓周運動的質點的切綫加速度和法綫加速度

解：取坐標原點在圓軌道的圓心又令 $\hat{i},\hat{j}$ 表示在圓的平面中之二單位向量則運動質點的位置向量可以寫作

$$\vec{r}=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$$

此處 $\quad x(t)=b\cos\omega\cdot t \quad y(t)=b\sin\omega t$

此處，b 是圓周的半徑，ω是一常量，因此

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-b\omega\sin\omega t\,\hat{i}+b\omega\cos\omega t\,\hat{j}$$

速度方向或軌道切綫方向之單位向量 $\hat{\tau}$ 爲

$$\hat{\tau}=\frac{\vec{v}}{|v|}=\frac{-b\omega\sin\omega t\,\hat{i}+b\omega\cos\omega t\,\hat{j}}{\sqrt{b^2\omega^2\sin^2\omega t+b^2\omega^2\cos^2\omega t}}$$

$$=-\sin\omega t\,\hat{i}+\cos\omega t\,\hat{j}$$

可見 $\quad \hat{\tau}\cdot\vec{r}=0$

又 $\quad \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-b\omega^2\cos\omega t\,\hat{i}-b\omega^2\sin\omega t\,\hat{j}=-b\omega^2\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$

求軌道的曲率半徑時 $\quad \frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}$

因 $\quad ds^2=dx^2+dy^2=(b^2\omega^2\sin\omega t+b^2\omega^2\cos^2\omega t)dt^2$

$$ds^2=b^2\omega^2dt^2$$

可見 $\quad ds=b\omega dt$

故 $\quad \frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{dx}{dt}\frac{1}{b\omega}$

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{dt}\frac{1}{b\omega}\right)=\frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{1}{b\omega}\right)=\frac{1}{b^2\omega^2}\frac{d^2x}{dt^2}$$

代入得 $\quad \frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}=\frac{1}{b^2\omega^2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{b^2\omega^2}\sqrt{(b\omega^2\sin\omega t)^2+(b\omega^2\cos\omega t)^2}=\frac{1}{b}$$

可見 $\rho = b$

又因 $\hat{n}$ 的方向是沿 $\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{d\hat{\tau}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\hat{\tau}}{dt}\frac{1}{b\omega}$ 的方向故得

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{1}{b\omega}\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{1}{b\omega}\left[-\omega\cos\omega t\,\hat{i} - \omega\sin\omega t\,\hat{j}\right] = \frac{1}{b}\left|\frac{-\vec{r}}{r}\right|$$

因 $\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{\hat{n}}{\rho}$ ∶ $\rho = b$ 故 $\hat{n} = \left[\frac{-\vec{r}}{r}\right]$,

由此可見在等速圓周運動中，切綫加速率 $\frac{dv}{dt}$ 等於零法向加速度 $\frac{v^2}{\rho}\hat{n}$

等於 $$\vec{a}_n = \frac{(b\omega)^2}{b}\left[-\frac{\vec{r}}{r}\right] = b\omega^2\left[-\frac{\vec{r}}{r}\right]$$

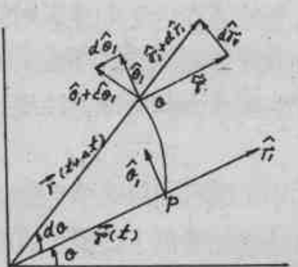
方向與 $\vec{r}$ 之方向相反，常指向圓心；我們常用 $\hat{r}_1$ 代表 $\vec{r}$ 即沿 $\vec{r}$ 方向的單位向量則 $$\vec{a} = \vec{a}_n = -b\omega^2\hat{r}_1$$

§1.6 平面曲綫運動加速度的極座標分量式 ——徑向加速度與橫向加速度。

當研究平面上質點之運動時，用極座標 (r, θ) 有時甚為便利設 $\hat{r}_1$ 與 $\hat{\theta}_1$ 分別地表示沿半徑向量及垂直於半徑向量且沿 θ 之增加方向的二單位向量。且

$$\vec{r} = \hat{r}_1 \quad (1.6-1)$$

為質點P之位置向量，則 $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{r}_1\frac{dr}{dt} + \frac{dr}{dt}r \quad (1.6-2)$$



此處，$\frac{d\theta}{dt}$ 因當質點自P移至Q點時 $\hat{r}_1$ 之方向有所改變。因 $\hat{r}_1$ 為一單位向量故 $d\hat{r}_1$ 與 $\hat{r}_1$ 垂直，由圖可見 $d\hat{r}_1$ 為沿 $\hat{\theta}_1$ 之方向且其量值為 $d\theta$ 故 (1.6-2) 式化為

$$\vec{v} = \hat{r}_1\frac{dr}{dt} + \hat{\theta}_1 r\frac{d\theta}{dt} \quad (1.6-3)$$

上式表示用徑向速度和橫向速度所表示的速度關係式，求加速度時則

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{r}_1\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{d\hat{r}_1}{dt}\frac{dr}{dt} + \hat{\theta}_1 r\frac{d^2\theta}{dt^2} + \hat{\theta}_1\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\hat{\theta}_1}{dt}r\frac{d\theta}{dt} \quad (1.6-4)$$

由圖可見 $d\hat{\theta}_1$ 與 $\hat{r}_1$ 之方向相反且具有量值 $d\theta$ 故

$$\frac{d\hat{r}_1}{dt}=\hat{\theta}_1\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{d\hat{\theta}_1}{dt}=-\hat{r}_1\frac{d\theta}{dt} \tag{1.6-5}$$

將(1.6-5)式代入(1.6-4)式得

$$\vec{a}=\hat{r}_1\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]+\hat{\theta}_1\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d^2\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] \tag{1.6-6}$$

如以 a_r 表徑向加速度之量值，以 a_θ 表橫向加速度之量值則上式又可寫作

$$\vec{a}=\hat{r}_1 a_r+\hat{\theta}_1 a_\theta \tag{1.6-7}$$

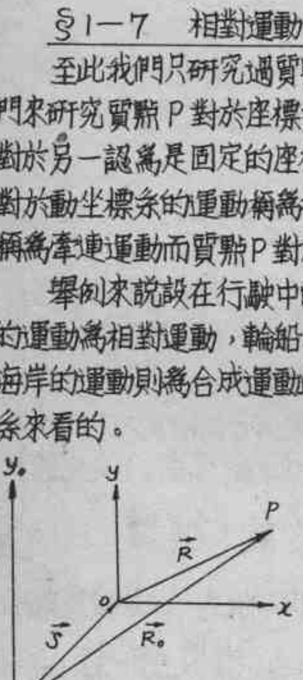
此處，

$$\begin{cases} a_r=\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta=2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}+r\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left[r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right]=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{cases} \tag{1.6-8}$$

§1-7 相對運動

至此我們只研究過質點對於任意一固定的座標系的運動。現在我們來研究質點 P 對於座標系 $oxyz$ 的運動，而坐標系 $oxyz$ 本身對於另一認為是固定的座標系 $o_0x_0y_0z_0$ 又有其一定的運動。質點 P 相對於動坐標系的運動稱為相對運動。動座標系對於固定坐標系的運動稱為牽連運動而質點 P 對於固定座標系的運動則為合成運動。

舉例來說設在行駛中的輪船甲板上有旅客在行走則旅客對於輪船的運動為相對運動，輪船本身的運動為牽連運動而旅客相對於固定的海岸的運動則為合成運動此時輪船為動坐標系而將地球當作固定坐標系來看的。



在本節中先講較簡單的情形動坐標系的運動只有移動的情形下節講一般的情形動坐標系的運動是任意的。

設質點 P 對於 xoy，與 $x_0o_0y_0$ 二坐標系的位置向量為

$\vec{R}=\vec{oP}$ 與 $\vec{R}_0=\vec{o_0P}$ 動坐標系的原點 o 對於