电动力学

汪映海 著

兰州大学出版社

电 动 力 学

兰 州 大 学 出 版 社

（甘）新登字第 08 号

内容简介

全书内容共分八章：一、数学复习和补充知识；二、静电场；三、稳恒电流的磁场；四、电磁场的普遍规律和麦克斯韦方程组；五、电磁波的传播；六、电磁波的辐射；七、狭义相对论基础；八、带电粒子与电磁场的相互作用。每章附有一定数量的例题和习题。本书可作为理工科大学、高等师范大学物理类有关专业本科生电动力学课的教材或参考书，也可供研究生，教师和科技工作者参考。

电动力学

汪映海

兰州大学出版社出版

（兰州大学校内）

甘肃[illegible]印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行

开本：850×1168 毫米　1/32　印张：17.125

1995 年 9 月第 1 版　1995 年 9 月第 1 次印刷

字数：426 千字　印数：1－1000 册

ISBN7－311－00662－7　O　91　定价：15.8 元

作 者 的 话

本书以葛墨林教授和作者长期讲授“电动力学”所编的讲义为基础，经过多次修改而写成。

电动力学是理论物理的组成部分，是物理类专业的一门重要基础理论课。本书着重阐述电动力学的基本概念、基本原理和基本方法。力求把物理图象和数学工具结合起来，用现代观点和方法表述问题；并注意介绍基本理论在各方面的应用，加强学生能力的训练和培养。对所用的数学知识，首先作了集中复习和补充。每章选配了大量的例题和习题，其中有不少是国内外研究生考试题。

在编写过程中，作者得到葛墨林教授的有益指导和热情帮助。中山大学郭硕鸿教授审阅了初稿和修改稿，提出许多宝贵意见。兰州大学出版社以及教务处、物理系为本书的出版给予关心和支持。在此谨一并致谢!

由于作者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，恳切希望读者批评指正。

一九九三年十月

引　言

电动力学是电磁现象的经典理论，是研究电磁场的基本属性、运动规律以及它和带电物质的相互作用的一门重要基础理论课。

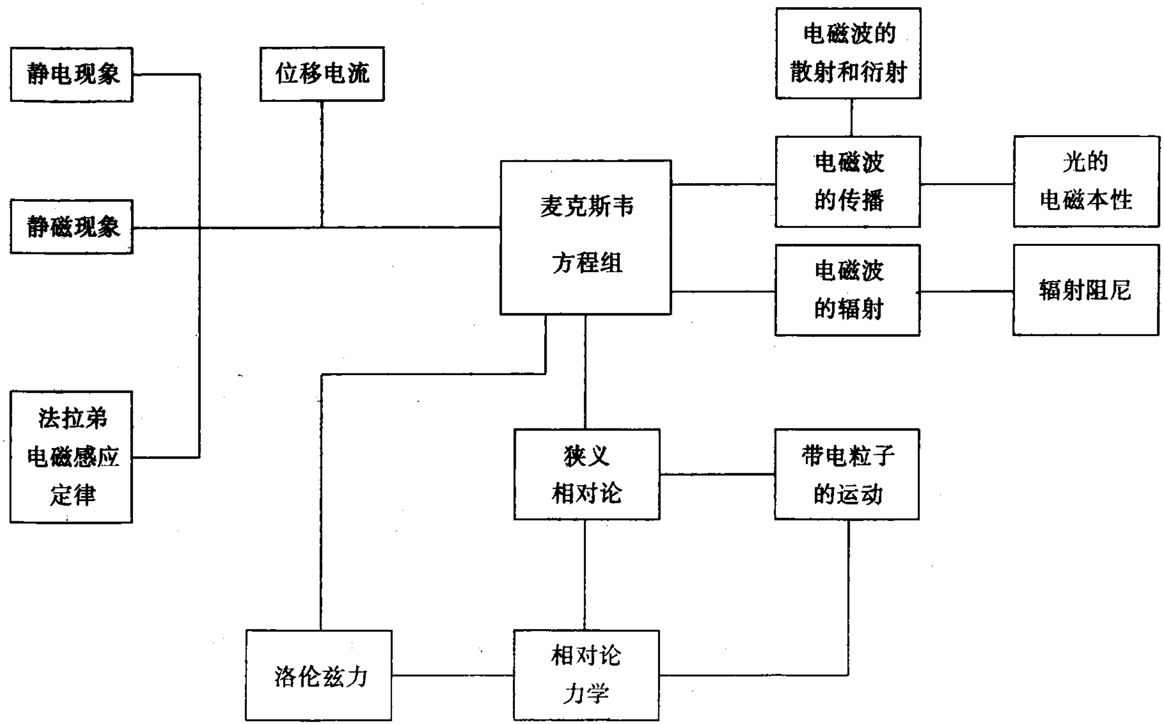
人们对于电磁现象的认识，经历了实践–理论–实践的发展过程。从 18 世纪后期到 19 世纪前半叶，人类在电磁现象的研究中积累了大量实验事实，相继建立库仑定律、安培–毕奥–萨伐尔定律、法拉弟电磁感应定律等实验定律，提出场的概念，使电磁理论得到迅速发展。在此基础上，麦克斯韦于 1860–1864 年把电磁规律总结概括为麦克斯韦方程组，预言了电磁波。20 年以后赫兹在实验上证实了电磁波，并逐渐在人类实践中得到广泛应用，从而确立了宏观电磁现象普遍的严格的理论。麦克斯韦电磁理论是牛顿力学之后又一重大的物理学理论，在物理学发展史上树立了光辉的里程碑。

电磁场理论关于参照系的问题引起了深刻的矛盾，矛盾的解决导致了物理学的飞跃性进展，即 1905 年爱因斯坦创立了狭义相对论。相对论同量子论一起奠定了近代物理学的基础，对整个物理学的发展有着深远的影响。本世纪以来，人们进一步研究电磁场的微观性质，将电动力学（包括相对论）与量子力学相结合，发展了量子电动力学。

一个成功的新物理理论必须具备三个条件：包含旧理论的合理内核；阐明旧理论不能解释的物理现象；预言新的物理效应，并为以后的科学实验所证实。麦克斯韦电磁理论和爱因斯坦狭义相对论完全反映了这些特点，是本课程讨论的两大理论。

电动力学的主要内容及其相互联系可以粗略地用下面框图表示：

电动力学的主要内容及其相互联系图



目　　录

第一章　数学复习和补充知识

§1.1　矢量和张量

1. 坐标与求和记号

在物理学中，我们经常遇到许多既有大小又有方向、且遵从平行四边形运算法则的物理量，它们属于矢量（矢量的严格定义后面讨论）。一般情况下，任意矢量$\vec{A}$可以是坐标与时间的函数，还可能通过坐标隐含时间，即

$$\vec{A}=\vec{A}\ (x\ (t)\ ,\ y\ (t)\ ,\ z\ (t)\ ;\ t)\ 。$$

为了较方便地表示一个矢量，常常引入正交坐标系，并且可以分为下列两类:

(a) 整体坐标系，最典型的是通常的直角坐标系。所谓"整体"，是指所选取的三个基矢$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$在空间任意点都不改变方向，因此全空间可以用一个统一的直角坐标系来描述。任何一个矢量$\vec{A}$都可以投影到它的基矢上，而用三个投影分量 A_x、A_y、A_z来表示。

(b) 局域坐标系。物理规律可以用微分方程来描述，而微分方程反映物理规律在空间任意点附近的局部性质（通常称为局域性质)，为了表示它，需要在空间任意点建立局域坐标系。典型的局域坐标系是球坐标系、圆柱坐标系等。局域坐标系与整体坐标系的区别在于，在空间不同点处，局域坐标系的基矢有不同

的方向，因而它可描述局域性质。为了强调这一特点，通常把这样的基矢称为“活动标架”，或简称为“标架”。例如球坐标系中的基矢$\vec{e}_r$、$\vec{e}_\theta$、$\vec{e}_\varphi$就是一种简单的活动标架。空间任意点p（$\vec{r}$）处的局域标架为$\vec{e}_r$（$\vec{r}$）、$\vec{e}_\theta$（$\vec{r}$）、$\vec{e}_\varphi$（$\vec{r}$），它们对于不同的p（$\vec{r}$）点方向是不同的，也就是说，它们是矢量$\vec{r}$端点的函数，简记为$\vec{r}$的函数。如果将它们向整体坐标系的基矢$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$投影，则有

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k},\\
\vec{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k},\\
\vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}。
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

对空间任意点 p 处的矢量$\vec{A}$，可以把它投影到整体坐标系上

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k};$$

也可以把它投影到局域坐标系、例如球坐标系上

$$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\varphi\vec{e}_\varphi。$$

比较上述关系式可得

$$\begin{aligned}
A_x &= A_r\sin\theta\cos\varphi + A_\theta\cos\theta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi,\\
A_y &= A_r\sin\theta\sin\varphi + A_\theta\cos\theta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi,\\
A_z &= A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta。
\end{aligned}$$

容易验证

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_r^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2 = |\vec{A}|^2,$$

即在不同的坐标系中，矢量$\vec{A}$的模不变。

由上面的讨论可以看出，在空间任意点处总可以建立一组正交基矢$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$，它们按 1、2、3 顺序满足右手螺旋法则，再沿三个基矢方向选定坐标轴，便构成一个正交坐标系。

于是任意矢量$\vec{A}$可以向该坐标系的基矢投影，相应的分量可记为A_1、A_2、A_3:

$$\vec{A}=A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3。 \tag{1.1.2}$$

具体的$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$及投影分量有多种选择的可能性，例如:

对直角坐标系

$$\vec{e}_1=\vec{i},\ \vec{e}_2=\vec{j},\ \vec{e}_3=\vec{k};$$

$$A_1=A_x,\ A_2=A_y,\ A_3=A_z。$$

对球坐标系

$$\vec{e}_1=\vec{e}_r,\ \vec{e}_2=\vec{e}_\theta,\ \vec{e}_3=\vec{e}_\varphi;$$

$$A_1=A_r,\ A_2=A_\theta,\ A_3=A_\varphi。$$

对圆柱坐标系

$$\vec{e}_1=\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_2=\vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_3=\vec{e}_z;$$

$$A_1=A_\rho,\ A_2=A_\varphi,\ A_3=A_z。$$

为方便起见，还可将（1.1.2）式写成更简洁的形式

$$\vec{A}=\sum_{i=1}^{3}A_i\vec{e}_i=A_i\vec{e}_i, \tag{1.1.3}$$

这里约定凡是相重的指标代表从 1 到 3 求和，此运算称为指标的收缩，如果不代表求和需作特殊说明。

引入克罗内克记号δ_{ij}，定义如下:

$$\begin{aligned}&\delta_{ij}=0,\ 当 i\neq j\\&\delta_{ij}=1,\ 当 i=j\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

其性质

$$\delta_{ij}=\delta_{ji},\ \delta_{ii}=3,\ \delta_{il}\delta_{lj}=\delta_{ij}。\tag{1.1.5}$$

δ_{ij}的矩阵形式是

$$[\delta_{ij}]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}。\tag{1.1.6}$$

结合相重指标代表求和的约定，可以得到以下的表示：

(a)　基矢正交归一性

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij},\tag{1.1.7}$$

例如

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0,\ \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=1。$$

(b)　矢量标积（也称点乘积或数量积）

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_i\vec{e}_i)\cdot(B_j\vec{e}_j)=\delta_{ij}A_iB_j=A_iB_i,\tag{1.1.8}$$

即

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3。$$

例如对直角坐标系

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z。$$

(c)　凡是求和的指标可称为“哑标”，由于它们都代表从1到3求和，所以表示哑标的字母可任意改动而不影响求和，即

$$A_iB_i=A_jB_j=A_lB_l=\cdots,\quad (i、j、l=1,\ 2,\ 3)。\tag{1.1.9}$$

2. 空间变换性质和物理量的分类

(1) 三维空间的正交变换

当坐标原点不变、坐标变换时，空间长度不变的变换称为正交变换。由于坐标系作转动变换时，任意一点离开原点的距离（或者说任意一点的矢径的长度）保持不变，所以坐标系转动属

于正交变换。

首先讨论二维平面上的坐标系转动，如图 1.1 所示，设坐标系$\sum'$相对于坐标系$\sum$旋转了角 θ，平面上一点 P 的坐标在$\sum$系为（x_1，x_2），在$\sum'$系为（x_1'，x_2'）。新旧坐标之间有线性变换关系

$$x'_1 = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta,$$
$$x'_2 = -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta。\tag{1.1.10}$$

长度$\overrightarrow{OP}$的平方为

$$\overrightarrow{OP}^2 = x_1^2 + x_2^2$$
$$= x_1'^2 + x_2'^2 = \text{不变量},\tag{1.1.11}$$

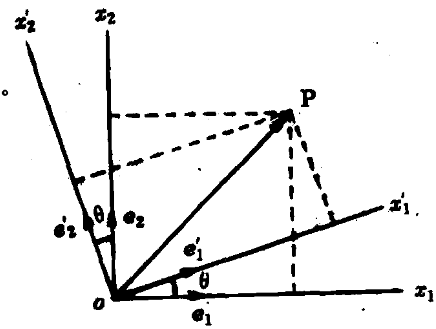


图 1.1

引入标记

$$\lambda_{\alpha\beta} = \cos\left(\vec{e}'_\alpha,\ \vec{e}_\beta\right) \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2)\ , \tag{1.1.12}$$

上述变换关系可表示为

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2, \\ x'_2 &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2。\end{aligned}\tag{1.1.13}$$

设$\vec{v}$为平面上的任意矢量，$\vec{v}$在$\sum$系和$\sum'$系中的分量分别为 v_x，v_y 和 v'_x，v'_y。容易得出，这些分量也满足形如（1.1.10）和（1.1.11）的关系式，说明矢量的分量与坐标具有相同的变换形式。

现在推广到三维空间的坐标系转动，坐标变换一般具有形式

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$