



○新课程学习能力评价课题研究资源用书
○主编 刘德 林旭 编写 新课程学习能力评价课题组

学习高手

状元塑造车间

学习技术化

TECHNOLOGIZING
STUDY

配北师大版

数学 必修 4

推开这扇窗

- 全解全析
- 高手支招
- 习题解答
- 状元笔记



光明日报出版社



新课程学习能力评价课题研究资源用书

学习高手

状元塑造车间

主 编 刘 德 林 旭
本册主编 郑迎庆

配北师大版

数学 必修4

光明日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

学习高手. 数学. 4: 必修/刘德, 林旭主编. —北京: 光明日报出版社, 2009. 9
配北师大版

ISBN 978-7-5112-0177-5

I. 学… II. ①刘… ②林… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 114990 号

学习高手

数学/必修 4(北师大版)

主 编: 刘 德 林 旭

责任编辑: 温 梦
策 划: 赵保国
执行策划: 聂电春

版式设计: 邢 丽
责任校对: 徐为正
责任印制: 胡 骑

出版发行: 光明日报出版社

地 址: 北京市崇文区珠市口东大街 5 号, 100062

电 话: 010-67078249(咨询)

传 真: 010-67078255

网 址: <http://book.gmw.cn>

E-mail: gmcbs@gmw.cn

法律顾问: 北京昆仑律师事务所陶雷律师

印 刷: 淄博鲁中晨报印务有限公司

装 订: 淄博鲁中晨报印务有限公司

本书如有破损、缺页、装订错误, 请与本社发行部联系调换。

开 本: 890×1240 1/32

字 数: 280 千字

印 张: 10.5

版 次: 2009 年 9 月第 1 版

印 次: 2009 年 9 月第 1 次

书 号: ISBN 978-7-5112-0177-5

定价: 17.90 元

版权所有 翻印必究

目录

第一章 三角函数	1	高手支招 5 思考发现	32
走近学科思想	1	高手支招 6 体验成功	33
本章要点导读	1	§ 5 正弦函数的性质与图像	36
§ 1 周期现象	2	高手支招 1 细品教材	36
§ 2 角的概念的推广	2	高手支招 2 归纳整理	41
高手支招 1 细品教材	2	高手支招 3 综合探究	42
高手支招 2 归纳整理	4	高手支招 4 典例精析	43
高手支招 3 综合探究	5	高手支招 5 思考发现	47
高手支招 4 典例精析	6	高手支招 6 体验成功	47
高手支招 5 思考发现	9	§ 6 余弦函数的图像与性质	51
高手支招 6 体验成功	9	高手支招 1 细品教材	51
§ 3 弧度制	13	高手支招 2 归纳整理	53
高手支招 1 细品教材	13	高手支招 3 综合探究	54
高手支招 2 归纳整理	15	高手支招 4 典例精析	55
高手支招 3 综合探究	15	高手支招 5 思考发现	57
高手支招 4 典例精析	16	高手支招 6 体验成功	58
高手支招 5 思考发现	19	§ 7 正切函数	61
高手支招 6 体验成功	19	高手支招 1 细品教材	61
§ 4 正弦函数和余弦函数的定义与 诱导公式	23	高手支招 2 归纳整理	64
高手支招 1 细品教材	23	高手支招 3 综合探究	64
高手支招 2 归纳整理	28	高手支招 4 典例精析	66
高手支招 3 综合探究	29	高手支招 5 思考发现	69
高手支招 4 典例精析	29	高手支招 6 体验成功	69
		§ 8 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的 图像	74

高手支招 1 细品教材	74
-------------------	----

高手支招 2 归纳整理	79
-------------------	----

高手支招 3 综合探究	79
-------------------	----

高手支招 4 典例精析	80
-------------------	----

高手支招 5 思考发现	85
-------------------	----

高手支招 6 体验成功	85
-------------------	----

§ 9 三角函数的简单应用	90
---------------------	----

高手支招 1 细品教材	90
-------------------	----

高手支招 2 归纳整理	92
-------------------	----

高手支招 3 综合探究	93
-------------------	----

高手支招 4 典例精析	94
-------------------	----

高手支招 5 思考发现	97
-------------------	----

高手支招 6 体验成功	97
-------------------	----

本章总结	103
------------	-----

第二章 平面向量	109
----------------	-----

走近学科思想	109
--------------	-----

本章要点导读	109
--------------	-----

§ 1 从位移、速度、力到向量	110
-----------------------	-----

高手支招 1 细品教材	110
-------------------	-----

高手支招 2 归纳整理	112
-------------------	-----

高手支招 3 综合探究	113
-------------------	-----

高手支招 4 典例精析	113
-------------------	-----

高手支招 5 思考发现	116
-------------------	-----

高手支招 6 体验成功	116
-------------------	-----

§ 2 从位移的合成到向量的加法	120
------------------------	-----

高手支招 1 细品教材	120
-------------------	-----

高手支招 2 归纳整理	122
-------------------	-----

高手支招 3 综合探究	122
-------------------	-----

高手支招 4 典例精析	123
-------------------	-----

高手支招 5 思考发现	125
-------------------	-----

高手支招 6 体验成功	125
-------------------	-----

§ 3 从速度的倍数到数乘向量	128
-----------------------	-----

3.1 数乘向量	128
----------------	-----

高手支招 1 细品教材	128
-------------------	-----

高手支招 2 归纳整理	130
-------------------	-----

高手支招 3 综合探究	131
-------------------	-----

高手支招 4 典例精析	131
-------------------	-----

高手支招 5 思考发现	134
-------------------	-----

高手支招 6 体验成功	134
-------------------	-----

3.2 平面向量基本定理	138
--------------------	-----

高手支招 1 细品教材	138
-------------------	-----

高手支招 2 归纳整理	139
-------------------	-----

高手支招 3 综合探究	139
-------------------	-----

高手支招 4 典例精析	140
-------------------	-----

高手支招 5 思考发现	142
-------------------	-----

高手支招 6 体验成功	142
-------------------	-----

§ 4 平面向量的坐标	145
-------------------	-----

高手支招 1 细品教材	145
-------------------	-----

高手支招 2 归纳整理	147	高手支招 4 典例精析	181
高手支招 3 综合探究	148	高手支招 5 思考发现	184
高手支招 4 典例精析	148	高手支招 6 体验成功	185
高手支招 5 思考发现	151	本章总结	189
高手支招 6 体验成功	151	第三章 三角恒等变形	196
§ 5 从力做的功到向量的数量积	155	走近学科思想	196
高手支招 1 细品教材	155	本章要点导读	196
高手支招 2 归纳整理	158	§ 1 同角三角函数的基本关系	197
高手支招 3 综合探究	158	高手支招 1 细品教材	197
高手支招 4 典例精析	158	高手支招 2 归纳整理	199
高手支招 5 思考发现	161	高手支招 3 综合探究	199
高手支招 6 体验成功	161	高手支招 4 典例精析	200
§ 6 平面向量数量积的坐标表示	165	高手支招 5 思考发现	206
高手支招 1 细品教材	165	高手支招 6 体验成功	206
高手支招 2 归纳整理	168	§ 2 两角和与差的三角函数	211
高手支招 3 综合探究	168	2.1 两角差的余弦函数	211
高手支招 4 典例精析	170	2.2 两角和与差的正弦、余弦函数	211
高手支招 5 思考发现	173	高手支招 1 细品教材	211
高手支招 6 体验成功	173	高手支招 2 归纳整理	216
§ 7 向量应用举例	177	高手支招 3 综合探究	216
高手支招 1 细品教材	177	高手支招 4 典例精析	218
高手支招 2 归纳整理	181	高手支招 5 思考发现	223
高手支招 3 综合探究	181		

高手支招 6 体验成功	224
2.3 两角和与差的正切函数 ...	228
高手支招 1 细品教材	228
高手支招 2 归纳整理	231
高手支招 3 综合探究	231
高手支招 4 典例精析	232
高手支招 5 思考发现	237
高手支招 6 体验成功	238
§ 3 二倍角的三角函数	244

高手支招 1 细品教材	244
高手支招 2 归纳整理	250
高手支招 3 综合探究	250
高手支招 4 典例精析	252
高手支招 5 思考发现	257
高手支招 6 体验成功	258
本章总结	261
附录 教材习题点拨	269

第一章 三角函数



走近学科思想

ZOUJINXUEKESIXIANG

数形结合思想

它在高考中占有非常重要的地位,其“数”与“形”结合,相互渗透,把代数式的精确刻画与几何图形的直观描述相结合,使代数问题、几何问题相互转化,使抽象思维和形象思维有机结合.应用数形结合思想,就是充分考查数学问题的条件和结论之间的内在联系,既分析其代数意义又揭示其几何意义,将数量关系和空间形式巧妙结合,来寻找解题思路,使问题得到解决.运用这一数学思想,要熟练掌握相关概念和运算的几何意义及常见曲线的代数特征.本章通过三角函数的图像来研究其性质,会广泛应用数形结合思想.



本章要点导读

BENZHANGYAODIANDAODU

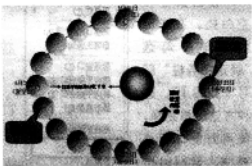
知识要点	课标要求	学习技术
任意角、弧度	了解任意角的概念和弧度制,能进行弧度与角度的互化	结合生活实例理解角的概念推广后的实用意义,从角度与长度的单位统一性方面,理解引入弧度制的价值
三角函数、诱导公式	1. 借助单位圆理解任意角三角函数定义 2. 借助单位圆中的三角函数线,推导出诱导公式	学习利用单位圆的直观性,形象领会三角函数定义、三角函数、诱导公式形式结构特征
正弦、余弦及正切函数图像和性质	借助图像理解正弦函数、余弦函数在 $[0, 2\pi]$, 正切函数在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的性质	实践体验三角函数线法或五点法绘制三角函数图像,体会其图像及性质
$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像	了解 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的实际意义,理解其图像及性质规律,观察参数 A, ω, φ 对函数图像变化的影响	结合实例,比较、对照分析变化规律,渗透数形结合思想,明确五个关键点的确定
三角函数的简单应用	会用三角函数解决一些简单的实际问题,体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型	具有周期现象的问题常建立三角函数模型,建模时应恰当引入角,结合图形或图像确定变量之间的关系



§ 1 周期现象

§ 2 角的概念的推广

观察生活周遭或长期观察日月星辰的变化,常常可以发现许多现象每隔一段时间会重复出现.像潮汐的变化,太阳升起与落下的时间,一年四季气温的变化等.在这些周而复始的现象中,隐藏着各种数量间的关系,如何透过这些现象的研究,从数学的角度分析探讨各种变化量间的关系呢?本节我们将用数学的方法研究周期现象.



地球公转(地球绕日)
运动动画演示



高手支招① 细品教材

一、周期函数

1. 周期现象

每年都有春、夏、秋、冬,每星期都是从星期一到星期日,地球每天都绕着太阳公转,公共汽车沿着固定线路一趟又一趟地往返……这一些都给我们循环、重复的感觉,可以用“周而复始”来描述,这就叫周期现象.

2. 周期函数定义

(1)一般地,对于函数 $f(x)$,如果存在一个非零的常数 T ,使得对定义域内的每一个 x 值,都满足 $f(x+T)=f(x)$,那么函数 $f(x)$ 就叫作周期函数,非零常数 T 叫作这个函数的周期.

(2)由定义可知,若 T 是函数 $f(x)$ 的周期,则 $2T, 3T, \dots, nT, n \in \mathbf{Z}$, 都是函数的周期.

【示例】已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的周期为 5 的周期函数,且 $f(1)=2\ 005$,求 $f(11)$.

思路分析: 由周期函数的定义, $f(11)=f(6+5)=f(6)=f(1+5)=f(1)$,即可求解.

解: 因为 5 是函数 $f(x)$ 的周期,所以 $f(x+5)=f(x)$.

所以 $f(11)=f(6+5)=f(6)=f(1+5)=f(1)=2\ 005$.

(3)周期函数的定义域是一个无限集. 因为 T 为周期, x 属于定义域,那么 $x+kT$ ($k \in \mathbf{Z}$) 也属于定义域.

状元笔记

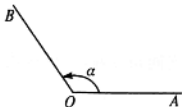
对周期函数定义的理解要掌握三个条件:

- (1)存在不为 0 的常数 T ;
- (2) x 必须是定义域内的任意值;
- (3) $f(x+T)=f(x)$ 恒成立.

二、角的概念的推广

1. 角的定义

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形. 如下图, 一条射线由原来的位置 OA , 绕着它的端点 O 按逆时针方向旋转到终止位置 OB , 就形成角 α .



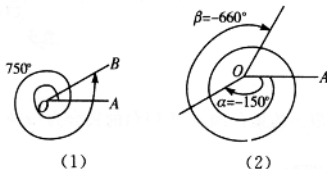
旋转开始时的射线 OA 叫作角的始边, OB 叫终边, 射线的端点 O 叫作角 α 的顶点.

2. 正角、负角、零角

我们规定: 按逆时针方向旋转所形成的角叫正角, 按顺时针方向旋转所形成的角叫负角.

如果一条射线没有做任何旋转, 我们称它形成了一个零角.

【示例】如图(1)中的角为正角, 它等于 750° ; 如图(2), 以 OA 为始边的角 $\alpha = -150^\circ$, $\beta = -660^\circ$.



3. 象限角

在直角坐标系中, 使角的顶点与坐标原点重合, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合, 则

(1) 象限角: 角的终边(端点除外)在第几象限, 我们就说这个角是第几象限角.

例如: $30^\circ, 390^\circ, -330^\circ$ 都是第一象限角; $300^\circ, -60^\circ$ 是第四象限角.

(2) 非象限角(也称象限界角、轴线角): 如角的终边在坐标轴上, 就认为这个角不属于任何象限. 例如: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 等等.

【示例】锐角是第几象限角? 第一象限的角是否都是锐角? 小于 90° 的角是锐角吗? $0^\circ \sim 90^\circ$ 的角

(1) 为了简单起见, 在不引起混淆的前提下, “角 α ” 或 “ $\angle \alpha$ ” 可简记为 α .

(2) 为了正确理解正角、负角、零角的概念, 由定义可知, 关键是抓住始边的旋转方向是逆时针、顺时针还是没有转动.

(3) 表示角时, 应注意箭头的方向不可丢掉, 因为箭头方向代表角的正负.

(1) 角的始边“与 x 轴的非负半轴重合”不能说成是“与 x 轴的正半轴重合”. 因为 x 轴的正半轴不包括原点, 就不完全包括角的始边, 角的始边是以角的顶点为其端点的射线.

(2) 讨论象限角或象限界角均有前提条件, 即角的顶点与坐标原点重合, 角的始边与 x 轴的非负半轴重合, 否则是错误的.



是锐角吗?

思路分析:关键是分清概念的内涵上的区别.

解:锐角是第一象限角,其可表示为 $\{\theta|0^\circ < \theta < 90^\circ\}$;

第一象限角不一定是锐角,如 420° . 小于 90° 的角不一定是锐角,可能是零角或负角,其可表示为 $\{\theta|\theta < 90^\circ\}$, $0^\circ \sim 90^\circ$ 的角可能是零角,其可以表示为 $\{\theta|0^\circ \leq \theta < 90^\circ\}$, 不一定是锐角.

4. 终边相同的角

一般地,我们有:所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合

$$S = \{\beta|\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\},$$

即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

【示例】与 405° 终边相同的角是……()

A. $k \cdot 360^\circ - 45^\circ, k \in \mathbb{Z}$

B. $k \cdot 360^\circ - 405^\circ, k \in \mathbb{Z}$

C. $k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}$

D. $k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}$

思路分析:只需把角表示成 $\alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}, \alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$ 的形式,从而将问题转化为判断角 α 的象限即可.

解: $405^\circ = 360^\circ + 45^\circ$, 所以其终边相同角可写为 $k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

状元笔记

(1)角 α 为任意角.

(2) $k \cdot 360^\circ$ 与 α 之间是“+”, $k \cdot 360^\circ - \alpha$ 可理解为 $k \cdot 360^\circ + (-\alpha)$.

(3)相等的角,终边一定相同;终边相同的角不一定相等,终边相同的角有无数个,它们相差 360° 的整数倍.

(4) $k \in \mathbb{Z}$ 这一条件不能少.

答案: C

【技术提示】(1)象限角的集合:第一象限角的集合为 $\{x|k \cdot 360^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$,

第二象限角的集合为 $\{x|k \cdot 360^\circ + 90^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$,

第三象限角的集合为 $\{x|k \cdot 360^\circ + 180^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$,

第四象限角的集合为 $\{x|k \cdot 360^\circ + 270^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

(2)象限界角的集合:终边落在 x 轴的非负半轴上的角的集合为 $\{x|x = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 x 轴的非正半轴上的角的集合为 $\{x|x = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 x 轴上的角的集合为 $\{x|x = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 y 轴的非负半轴上的角的集合为 $\{x|x = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

终边落在 y 轴的非正半轴上的角的集合为 $\{x|x = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

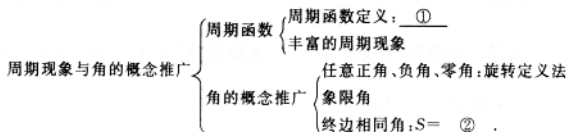
终边落在 y 轴上的角的集合为 $\{x|x = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.



高手支招② 归纳整理

通过对自然界的具体现象进行观察、类比、思考、研究,感知到大量的周期现象,

体会角的概念推广的实际意义,进而深刻领会周期的数学定义,理解角的推广定义及象限角终边相同角的意义.



答案

① $f(x+T)=f(x) (T \neq 0)$ ② $\{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$



高手支招 ③ 综合探究

确定分角所在的象限的办法

分角的象限确定往往是一个难点,常用的方法是利用不等式进行分类讨论.

如:若 α 是第二象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角?

对象限角进行和、差、倍、分运算,要注意运用不等式的性质,要进行讨论.

$$\because k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

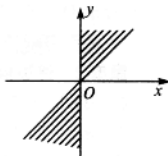
当 k 为偶数,即 $k=2n (n \in \mathbb{Z})$ 时,有 $45^\circ + n \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 90^\circ$.

这时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角;

当 k 为奇数,即 $k=2n+1 (n \in \mathbb{Z})$ 时,有 $225^\circ + n \cdot 360^\circ < \frac{\alpha}{2} < n \cdot 360^\circ + 270^\circ$.

这时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角;

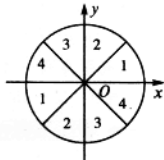
所以, $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角,其变化区域如右图中阴影部分.



由上面的讨论可知,在确定了 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围以后,偶数可以取 0,奇数可以取 1,这样便可快速判断其范围.当然本题可作进一步的探讨,下面介绍一种行之有效的方法.

首先来看如何根据 α 终边所在象限,判断 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在象限.

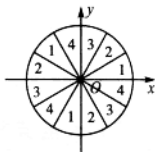
先画单位圆,如右图所示,图中直线 $x \pm y = 0$ 与坐标轴将





以原点为顶点, x 轴非负半轴为始边的周角分成 8 等分. 数字 1, 2, 3, 4 表示角 α 所在象限, 逆时针方向分别在区域内填上 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 从而数字所在区域表示 $\frac{\alpha}{2}$ 终边所在区域. 如 α 是第一象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 在第一、三象限的“1”区域内; 如 α 是第二象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 在第一、三象限的“2”区域内.

用同样的方法, 可继续探求 $\frac{\alpha}{3}$ 所在象限, 此时将每个象限三等分, 按逆时针方向标上 1, 2, 3, 4 的象限号, 如右图所示, 若 α 在第二象限, 则 $\frac{\alpha}{3}$ 在图中标号为 2 的区域. 用同样的方法, 还可以确定 $\frac{\alpha}{n}$ 所在的范围, 即将每个象限 n 等分, 按逆时针方向标上号.



同样的方法还可以确定倍角的象限和范围.



高手支招 4 典例精析

题型分类详解

题型 1 角的概念辨析

【例 1】下列命题正确的是 ()

- A. 终边相同的角一定相等 B. 第一象限角都是锐角
C. 锐角都是第一象限角 D. 小于 90° 的角都是锐角

解析: 可根据各类角的定义, 利用排除法予以解答. 对于 A, -60° 角和 300° 角是终边相同角, 但它们不相等, 排除 A; 对于 B, 390° 角是第一象限角, 但它不是锐角, 排除 B; 对于 D, -60° 角小于 90° 的角, 但它不是锐角, 排除 D.

答案: C

题型 2 终边相同角

【例 2】与 -457° 角终边相同的角的集合是 ()

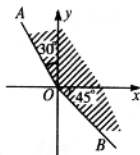
- A. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 457^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
B. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 97^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
C. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 263^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$
D. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 263^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

(高手点睛) $-457^\circ = -360^\circ - 97^\circ$, 而 $-97^\circ = -360^\circ + 263^\circ$.

解析: $\because -457^\circ = -2 \times 360^\circ + 263^\circ$, 即 -457° 角与 263° 角是终边相同角.

答案: C

【例3】如右图,终边落在OA位置时的角的集合是_____;
终边落在OB位置,且在 $[-360^\circ, 360^\circ]$ 内的角的集合是_____;
终边落在阴影部分(不含边界)的角的集合是_____.



解析: 根据终边相同的角的概念, 终边落在OA位置时的角的集合是 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$; 终边落在OB位置时的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ - 45^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 集合中在 $[-360^\circ, 360^\circ]$ 内的角有 $-45^\circ, 315^\circ$, 所以终边落在OB位置, 且在 $[-360^\circ, 360^\circ]$ 内的角的集合是 $\{-45^\circ, 315^\circ\}$; 终边落在阴影部分(不含边界)的角在 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 中的角可记为 $-45^\circ < \alpha < 120^\circ$, 因此终边落在阴影部分(不含边界)的角的集合是 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ - 45^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

答案

$$\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \quad \{-45^\circ, 315^\circ\} \quad \{\alpha | k \cdot 360^\circ - 45^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

技术感悟

在坐标平面中, 表示一个区域角的集合, 表示形式不唯一, 一般先利用确定范围内的角表示, 再通过终边相同角表示区域内所有角.

题型3 象限角

【例4】在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 间, 找出与下列各角终边相同的角, 并判定它们是第几象限角:

(1) -120° ; (2) 660° ; (3) $-950^\circ 08'$.

(高手点睛) 各角除以 360° 求余数.

解析: 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 间, 找出与角 α 终边相同的角, 只需把角 α 除以 360° , 求余数即可. 正的角度除以 360° , 按通常除法进行; 负的角度除以 360° , 商是负数, 它的绝对值应比被除数为其相反数时相应的商大1, 以使余数为正值. 草式如下:

$$\begin{array}{r} -1 \\ 360^\circ \overline{) -120^\circ} \\ \underline{-360^\circ} \end{array}$$

(1) 的草式:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 360^\circ \overline{) 660^\circ} \\ \underline{360^\circ} \end{array}$$

(2) 的草式:

$$\begin{array}{r} -3 \\ 360^\circ \overline{) -950^\circ 08'} \\ \underline{-1080^\circ} \end{array}$$

(3) 的草式:

解: (1) $\because -120^\circ = 240^\circ - 360^\circ$, $\therefore$ 与 -120° 角终边相同的角是 240° 角, 它是第三



象限的角；

(2) $\because 660^\circ = 300^\circ + 360^\circ$, $\therefore$ 与 660° 终边相同的角是 300° , 它是第四象限的角；

(3) $-950^\circ 08' = 129^\circ 52' - 3 \times 360^\circ$, 所以与 $-950^\circ 08'$ 角终边相同的角是 $129^\circ 52'$, 它是第二象限角.

技术感悟

任意角都可以利用终边相同角公式, 转化为在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 间的一个与它终边相同的角, 此转化在今后计算中意义重大.

题型4 周期的应用

【例5】已知 $f(x)$ 是周期为2的奇函数, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = \lg x$. 设 $a = f(\frac{6}{5})$, $b = f(\frac{3}{2})$, $c = f(\frac{5}{2})$, 则..... ()

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $c < b < a$

D. $c < a < b$

解析: 解题的关键是利用函数的周期和奇偶性把自变量转化为 $(0, 1)$ 区间内, 再利用函数 $f(x) = \lg x$ 的单调性比较大小.

$$\text{由 } a = f(\frac{6}{5}) = f(2 - \frac{4}{5}) = f(-\frac{4}{5}) = -f(\frac{4}{5}),$$

$$b = f(\frac{3}{2}) = f(2 - \frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = -f(\frac{1}{2}),$$

$$c = f(\frac{5}{2}) = f(2 + \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}).$$

由函数 $f(x) = \lg x$ 的性质知: $f(\frac{1}{2}) < 0 < -f(\frac{4}{5}) < -f(\frac{1}{2})$, 故 $c < a < b$.

►►► 答案: D

技术感悟

周期函数也应注意定义域, 它实质是指在定义域内函数值周期性变化.

【例6】今天是星期六, 2010天以后那一天是星期几?

(高手点睛) 每周有七天, 从星期一到星期日, 呈周期性.

解析: $2010 = 287 \times 7 + 1$, 而今天是星期六, $\therefore$ 2010天后的那一天是星期日.

技术感悟

周期现象应用较广泛, 它是一种有规律的循环现象, 特别注意一个周期的值.

【例7】经过5小时又25分钟, 时钟的分针和时针各转了多少度?

解: 时针走一周共需12小时, 即12小时转过 -360° , 则时针每小时转过 $\frac{-360^\circ}{12}$

$= -30^\circ$. 而5小时又25分钟等于 $5\frac{5}{12}$ 小时, 从而时针转过的角度为: $5\frac{5}{12} \times (-30^\circ)$

$= -162.5^\circ$. 分针走一周共需 1 小时, 即 1 小时转过 -360° , 则分针转过的角度为:
 $5 \frac{5}{12} \times (-360^\circ) = -1950^\circ$.

技术提醒

钟表的指针是按顺时针方向旋转, 转过的角为负角.



高手支招

5 思考发现

一、本节方法归纳

1. 利用周期函数定义解题要掌握三个条件, 即存在不为 0 的常数 T ; x 必须是定义域内的任意值:

$$f(x+T) = f(x).$$

2. 将角的概念推广后, 要注意区分锐角与第一象限角, 锐角集合为 $S_1 = \{\beta | 0^\circ < \beta < 90^\circ\}$, 第一象限角的集合是 $S_2 = \{\beta | k \cdot 360^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 显然锐角集合仅是第一象限角的集合的真子集.

3. 对角的概念的理解首先应抓住运动的观点, 其次应理解各种角的现实意义. 对于在平面直角坐标系下研究角, 首先应明确角的顶点与坐标原点重合, 角的始边与 x 轴的非负轴重合, 其次应正

确区分各类角, 并用符号语言准确地加以描述.

4. 利用数形结合研究角的范围既直观又简洁.

5. 由角 α 的范围, 会求 $\frac{\alpha}{2}$ 、 2α 、 $\frac{\alpha}{3}$ 等角的范围, 应注意对参数 k 的分类讨论.

二、学习本节时容易出现以下错误

1. 判断象限角、象限角、终边相同的角时, 忽视角的顶点, 始边的位置导致出错.

2. 用符号语言表示象限角、象限角、终边相同的角的集合时, $k \in \mathbb{Z}$ 这一条件易忘写出来.

3. 求函数的周期时, 忽视定义域导致出错.



高手支招

6 体验成功

基础巩固

1. 某市绿化委员会为了庆祝国庆节, 要在道路的两侧摆放花卉, 其中一侧需摆放红、黄、紫、白四种颜色的花, 并且按红、黄、紫、白、红、黄、紫、白……的顺序摆放, 那么第 2 008 盆应为什么颜色的花 ()

A. 红 B. 黄 C. 紫 D. 白

2. 下列角中终边与 330° 相同的角是 ()

A. 30° B. -30° C. 630° D. -630°

3. -1120° 角所在象限是 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4. 把 -1485° 转化为 $\alpha + k \cdot 360^\circ (0^\circ \leq \alpha < 360^\circ, k \in \mathbb{Z})$ 的形式是 ()



A. $45^\circ - 4 \times 360^\circ$

B. $-45^\circ - 4 \times 360^\circ$

C. $-45^\circ - 5 \times 360^\circ$

D. $315^\circ - 5 \times 360^\circ$

5. 下列命题是真命题的是 ()

A. 三角形的内角必是一、二象限内的角

B. 第一象限的角必是锐角

C. 不相等的角终边一定不同

D. $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ \pm 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\alpha | \alpha = n \cdot 180^\circ + 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$

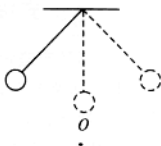
6. 如右图, 一个质点在平衡位置 O 点附近摆动, 如果不计阻力, 可将此摆动看作周期运动, 若质点从 O 点开始向左摆动时开始计时, 且周期为 1 s, 则质点第 5 次经过 O 点所需要的时间为 ()

A. 1.5 s

B. 2 s

C. 2.5 s

D. 3 s



7. 若 α 是第四象限的角, 则 $180^\circ - \alpha$ 是 ()

A. 第一象限的角

B. 第二象限的角

C. 第三象限的角

D. 第四象限的角

8. 若角 α 与角 β 的终边相同, 则有 ()

A. $\alpha - \beta = 180^\circ$

B. $\alpha + \beta = 0$

C. $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$

D. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$

综合应用

9. 若角 α 的终边为第二象限的角平分线, 则 α 的集合为 _____.

10. 在 0° 到 360° 范围内, 与角 -60° 的终边在同一条直线上的角为 _____.

11. 设集合 $A = \{x | k \cdot 360^\circ + 60^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 300^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | k \cdot 360^\circ - 210^\circ < x < k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$.

探究创新

12. 已知 α, β 终边互为反向延长线, 求 α, β 之间满足的关系.

一试身手

13. 已知 α 为第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限是 ()

A. 第一或第二象限

B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限

D. 第二或第四象限