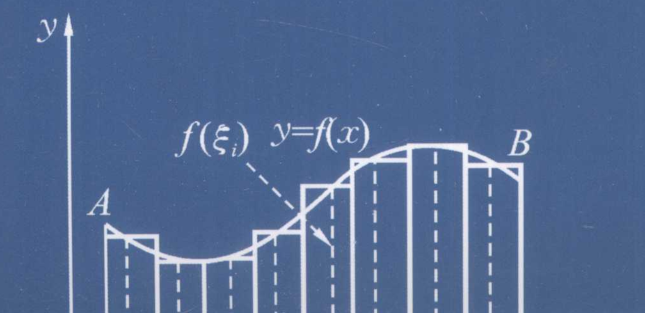
新编高等院校公共基础课系列规划教材

高等数学

（下册）

Gaodeng Shuxue

主　编　任全玉　曹学锋



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

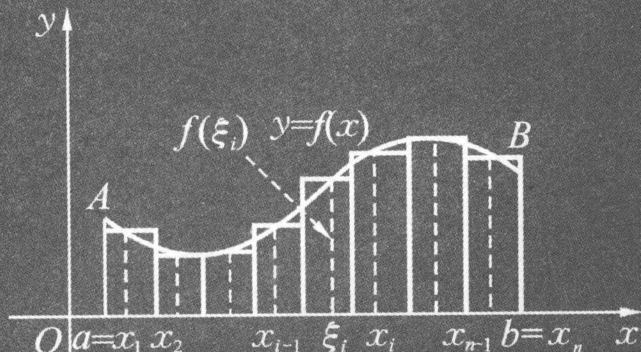
新编高等院校公共基础课系列规划教材

高等数学

（下册）

Gaodeng Shuxue

主　编　任全玉　曹学锋
副主编　孙幸荣　胡建新
编　委　何春羚　邱　浩　王　艳
吴丽雯　夏　丹



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/任全玉　曹学锋　主编.—武汉:华中科技大学出版社,2009年8月

ISBN 978-7-5609-5551-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.①任…　②曹…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第124689号

高等数学(下册)　　任全玉　曹学锋　主编

策划编辑:曾　光

责任编辑:王汉江　　封面设计:杨　玲

责任校对:张　琳　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉星明图文制作有限公司

印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787mm×960mm　1/16　　印张:14.25　　字数:280 000

版次:2009年8月第1版　　印次:2009年8月第1次印刷　　定价:26.00元

ISBN 978-7-5609-5551-3/O·497

前　言

随着高等教育的蓬勃发展，高校教学改革在不断地深入进行，高校教材也在不断地改进、完善。高等数学作为理工科的一门非常重要的基础课，它内容丰富，理论严谨，应用广泛，影响深远。它不仅为学习后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础，而且在培养学生抽象思维、逻辑推理能力，综合利用所学知识分析问题、解决问题的能力，较强的自主学习的能力，以及创新意识和创新能力上都具有非常重要的作用，所以其教材的质量在教学中也就非常关键了。

本书以教育部非数学专业数学基础课程教学指导分委员会制定的新的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"为依据，结合我院高等数学教研室众多教师多年的教学经验，以"必须、够用"为原则确定内容及其深度。知识点的覆盖面与"基本要求"相一致，要求上略高于"基本要求"的标准编写而成。本书分为上、下两册，共 12 章，各章节附有习题，书后附有习题答案，适合作为高等院校理工科各专业高等数学课程的教材及教学参考书。

本书由任全玉、曹学锋担任主编，孙幸荣、胡建新担任副主编，其中预备知识、第 1、2 章由曹学锋负责编写，第 3、4 章由夏丹负责编写，第 5 章由吴丽雯负责编写，第 6 章由何春羚负责编写，第 7 章由孙幸荣负责编写，第 8 章由胡建新负责编写，第 9、10 章由任全玉负责编写，第 11 章由王艳负责编写，第 12 章由邱浩负责编写。全书由任全玉、曹学锋统稿定稿。

本书在编写上侧重于应用，对基本概念的叙述清晰准确；对定理的证明简明易懂，且对过于复杂的定理证明，以及在实际问题中应用较少的相关知识点的推导过程都作了适当省略。

本书在体系结构、教学内容、例题取舍、习题选配等方面均作了全面考虑，力求提供丰富的素材，贯彻深入浅出的原则，重现数形结合的方法，强化计算工具的使用，将现代生活和各类专业学习中均有广泛应用的基础知识作为必学知识，以保证普通高校基础教学的教学水平。

本书在编写过程中，参考了众多国内外的优秀教材，渗透了现代教学的观点和方法，为学生深入学习奠定了良好的基础。在此向为本书的编写出版给予大力支持和热情帮助的黄冈师范学院数学与信息科学学院、黄冈师范学院教务处、华中科技大学出版社等单位的相关领导、老师表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者或从事教学的专家、同行批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2009 年 3 月

目　　录

第 8 章　多元函数微分法及其应用

前面已讨论的函数都只有一个自变量，我们把这种函数称为一元函数，但在很多实际问题中往往涉及多个方面的因素. 在数学上，就有一个变量依赖于多个变量的情形，这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题. 本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用. 在下面的讨论中，以二元函数为主，因为从一元函数到二元函数会产生新的问题，而从二元函数到二元以上的多元函数则可以依此类推.

8.1　多元函数的基本概念

8.1.1　平面点集 n 维空间

在讨论一元函数时，一些概念、理论和方法，都是基于 $\mathbf{R}^1$ 中的点集、两点间的距离、区间和邻域等概念. 为了将一元函数微积分推广到多元的情形，首先需要将上述一些概念加以推广，同时还会涉及一些其他概念. 为此，通常先引入平面点集的一些基本概念，将有关概念从 $\mathbf{R}^1$ 中的情形推广到 $\mathbf{R}^2$ 中；然后引入 n 维空间，以便推广到一般的 $\mathbf{R}^n$ 中.

1. 平面点集

由平面解析几何知，当在平面上引入了一个直角坐标系后，平面上的点 P 与有序二元实数组 (x,y) 之间就建立了一一对应关系，于是，通常把有序实数组 (x,y) 与平面上的点 P 视为是等同的. 这种建立了坐标系的平面称为坐标平面. 二元的有序实数组 (x,y) 的全体，即 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$ 表示坐标平面.

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合，称为平面点集，记为

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，平面上以原点为中心、r 为半径的圆内所有点的集合为

$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\}.$$

如果用 (x,y) 表示点 P，用 $|OP|$ 表示点 P 到原点 O 的距离，那么集合 C 也可表示为

$$C=\{P\mid |OP|<r\}.$$

下面引入 $\mathbf{R}^2$ 中邻域的概念.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是平面 xOy 上的一个点，δ 是某一正数. 与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}$$

或 $$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

显然,$U(P_0,\delta)$ 表示平面 xOy 上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

点 P_0 的去心 δ 邻域,记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|P_0P|<\delta\}.$$

如果不需要强调邻域的半径 δ,则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域,点 P_0 的去心邻域记为 $\mathring{U}(P_0)$.

下面利用邻域来描述点与点集之间的关系.

任意一点 $P\in\mathbf{R}^2$ 与任意一个点集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 之间必有以下三种关系中的一种.

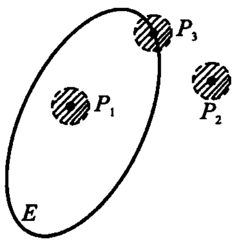


图 8.1.1

(1) 内点:如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\subset E$,则称点 P 为 E 的内点(如图 8.1.1 所示,点 P_1 为 E 的内点).

(2) 外点:如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\cap E=\varnothing$,则称点 P 为 E 的外点(如图 8.1.1 所示,点 P_2 为 E 的外点).

(3) 边界点:如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点,又有不属于 E 的点,则称点 P 为 E 的边界点(如图 8.1.1 所示,点 P_3 为 E 的边界点).

E 的边界点的全体,称为 E 的边界,记为 ∂E.

E 的内点必属于 E;E 的外点必不属于 E;而 E 的边界点可能属于 E,也可能不属于 E.

任何一点 P 与一个点集 E 之间除了具有上述三种关系之外,还有一种关系,这就是下面定义的聚点.

聚点:如果对于任意给定的 $\delta>0$,点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点,则称点 P 是 E 的聚点.

由聚点的定义可知,点集 E 的聚点 P 本身,可以属于 E,也可以不属于 E.

例如,设平面点集

$$E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$$

满足 $1<x^2+y^2\leqslant 2$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的内点;满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的边界点,它们都不属于 E;满足 $x^2+y^2=2$ 的一切点 (x,y) 也是 E 的边界点,它们都属于 E;点集 E 及它的边界 ∂E 上的一切点都是 E 的聚点.

根据点集所属点的特征,再来定义一些重要的平面点集.

开集:如果点集 E 的点都是 E 的内点,则称 E 为开集.

闭集:如果点集 E 的余集 E^c 为开集,则称 E 为闭集.

例如,集合 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是开集;集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭

集；而集合$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$既非开集，也非闭集.

连通集：如果点集 E 内任何两点，都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集.

区域(或开区域)：连通的开集称为区域或开区域.

闭区域：开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域.

例如，集合$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$是开区域，而集合$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$是闭区域.

有界集：对于平面点集 E，如果存在某一正数 r，使得

$$E\subset U(O,r),$$

其中 O 是坐标原点，则称 E 为有界点集.

无界集：一个集合如果不是有界集，就称这集合为无界集.

例如，集合$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$是有界闭区域，集合$\{(x,y)\mid x+y>1\}$是无界开区域，集合$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$是无界闭区域.

2. n 维空间

设 n 为取定的一个自然数，用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体所构成的集合，即

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

$\mathbf{R}^n$ 中的元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$有时也用单个字母 $\boldsymbol{x}$ 来表示，即 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 当所有的 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都为零时，称这样的元素为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{O}$. 在解析几何中，通过直角坐标系，$\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^3$) 中的元素分别与平面(或空间) 中的点或向量建立一一对应关系，因而 $\mathbf{R}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点或一个 n 维向量，x_i 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标或 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量. 特别地，$\mathbf{R}^n$ 中的零元 $\mathbf{0}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标原点或 n 维零向量.

为了在集合 $\mathbf{R}^n$ 中的元素之间建立联系，在 $\mathbf{R}^n$ 中定义线性运算如下.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个元素，$\lambda\in\mathbf{R}$，规定

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

这样定义了线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n 维空间.

$\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和点 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离，记为 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，规定

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

显然，当 $n=1,2,3$ 时，上述规定与数轴上、直角坐标系下平面及空间中两点间的距离一致.

$\mathbf{R}^n$ 中元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 $\mathbf{0}$ 之间的距离 $\rho(\boldsymbol{x},\mathbf{0})$ 记为 $\|\boldsymbol{x}\|$(在 $\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3$ 中，通常将 $\|\boldsymbol{x}\|$ 记为 $|\boldsymbol{x}|$)，即

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

采用这一记号,结合向量的线性运算,便得

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中定义了距离以后,就可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中变元的极限.

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$,如果

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \to 0,$$

则称变元 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中趋于固定元 $\boldsymbol{a}$,记为 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$.

显然,

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \Leftrightarrow x_1 \to a_1, x_2 \to a_2, \cdots, x_n \to a_n.$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中线性运算和距离的引入,使得前面讨论过的有关平面点集的一系列概念,可以方便地引入到 $n(n \geqslant 3)$ 维空间中来. 例如,

设 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$,$\delta$ 是某一正数,则 n 维空间内的点集

$$U(\boldsymbol{a}, \delta) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta\}$$

就定义为 $\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ 邻域. 以邻域为基础,可以定义点集的内点、外点、边界点和聚点,以及开集、闭集、区域等一系列概念.

8.1.2 多元函数概念

在很多自然现象及实际问题中,经常会遇到多个变量之间的依赖关系,举例如下.

(1) 圆柱体的体积 V 和它的底面半径 r、高 h 之间具有关系

$$V = \pi r^2 h,$$

其中,当 r, h 在集合 $\{(r,h) \mid r > 0, h > 0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时,V 的对应值就随之确定.

(2) 一定量的理想气体的压强 p、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p = \frac{RT}{V},$$

其中,R 为常数,当 V, T 在集合 $\{(V,T) \mid V > 0, T > 0\}$ 内取定一对值 (V,T) 时,p 的对应值就随之确定.

(3) 设 R 是电阻 R_1, R_2 并联后的总电阻,由电学知识得它们之间具有关系

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

其中,当 R_1, R_2 在集合 $\{(R_1, R_2) \mid R_1 > 0, R_2 > 0\}$ 内取定一对值 (R_1, R_2) 时,R 的对应值就随之确定.

上面三个例子的具体意义虽各不相同,但它们却有共同的性质,抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义.

定义 1　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个非空子集，称映射 $f:D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D \quad (\text{或 } z = f(P), P \in D),$$

其中，点集 D 称为该函数的定义域，x,y 称为自变量，z 称为因变量.

上述定义中，与自变量 x,y 的一对值 (x,y) 相对应的因变量 z 的值，也称为 f 在点 (x,y) 处的函数值，记为 $f(x,y)$，即 $z = f(x,y)$. 函数值 $f(x,y)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记为 $f(D)$，即

$$f(D) = \{z \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}.$$

与一元函数的情形相仿，记号 f 与 $f(x,y)$ 的意义是有区别的，但习惯上常用记号"$f(x,y), (x,y) \in D$"或"$z = f(x,y), (x,y) \in D$"来表示 D 上的二元函数 f. 表示二元函数的记号 f 也是可以任意选取的，例如也可以记为 $z = z(x,y)$，$z = g(x,y)$ 等.

类似地，可以定义三元函数 $u = f(x,y,z), (x,y,z) \in D$ 及三元以上的函数. 一般地，把定义 1 中的平面点集 D 换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 内的点集 D，映射 $f:D \to \mathbf{R}$ 就称为定义在 D 上的 n 元函数，通常记为

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D,$$

或简记为

$$u = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D,$$

也可记为

$$u = f(P), \quad P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D.$$

在 $n = 2$ 或 3 时，习惯上将点 (x_1, x_2) 与点 (x_1, x_2, x_3) 分别写成 (x,y) 与 (x,y,z). 这时，若用字母表示 $\mathbf{R}^1$ 或 $\mathbf{R}^2$ 中的点，即写成 $P(x,y)$ 或 $M(x,y,z)$，则相应的二元函数及三元函数也可简记为 $z = f(P)$ 或 $u = f(M)$.

当 $n = 1$ 时，n 元函数就是一元函数；当 $n \geqslant 2$ 时，n 元函数统称为多元函数.

关于函数定义域，与一元函数相类似，可作如下约定：在一般地讨论用算式表达的多元函数 $u = f(x)$ 时，就以使这个算式有意义的变元 x 的值所组成的点集作为这个多元函数的自然定义域. 因而，对这类函数，它的定义域不再特别标出.

例如，函数 $z = \ln(x+y)$ 的定义域为 $\{(x,y) \mid x+y > 0\}$（见图 8.1.2），这是一个无界开区域；又如函数 $z = \arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为 $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$（见图 8.1.3），这是一个有界闭区域.

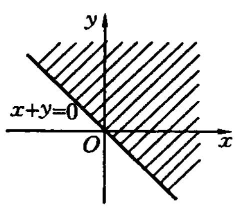


图 8.1.2

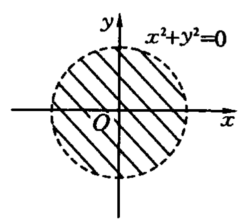


图 8.1.3

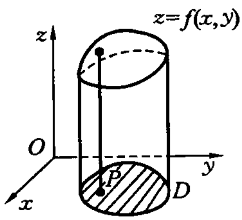


图 8.1.4

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$,对应的函数值为 $z=f(x,y)$. 这样,以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=f(x,y)$ 为竖坐标在空间就可以确定一点. 当 (x,y) 遍取 D 上的一切点时,得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形(见图 8.1.4). 通常,二元函数的图形是一张曲面.

例如,由空间解析几何知,线性函数 $z=ax+by+c$ 的图形是一张平面,而函数 $z=x^2+y^2$ 的图形是旋转抛物面.

8.1.3　多元函数的极限

下面先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$,即 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限.

这里 $P\to P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0,也就是点 P 与点 P_0 间的距离趋于零,即

$$|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

与一元函数的极限概念类似,如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中,对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限. 下面用"ε-δ"语言描述这个极限概念.

定义 2　设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得当点 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时,都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限,记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A\quad\text{或}\quad f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也记为

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A\quad\text{或}\quad f(P)\to A(P\to P_0).$$

为了区别于一元函数的极限,我们把二元函数的极限称为二重极限.

例 1　设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$,求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

证明　函数 $f(x,y)$ 的定义域为 $D=\mathbf{R}^2/\{(0,0)\}$,点 $(0,0)$ 为 D 的聚点. 因为

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

可见 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta,$$

即 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(O,\delta)$ 时，总有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon$$

成立，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

注　所谓二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都无限接近于 A. 因此，如果 $P(x,y)$ 以某一特殊方式，例如沿着一条定直线或定曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，即使 $f(x,y)$ 无限接近于某一确定值，也不能由此断定函数的极限存在. 但是反过来，如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于不同的值，则可以断定该函数的极限不存在.

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然，当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0;$$

又当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0.$$

虽然点 $P(x,y)$ 以上述两种特殊方式（沿 x 轴或沿 y 轴）趋于原点时函数的极限存在且相等，但是函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处极限不存在. 这是因为当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

显然，它是随着 k 值的不同而改变的.

以上关于二元函数的极限概念，可相应地推广到 n 元函数 $u=f(P)$ 即 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上去.

多元函数极限运算的法则与一元函数类似.

例 2　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解　函数 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x\neq 0, y\in\mathbf{R}\}$，$P_0(0,2)$ 为 D 的聚点. 由积的极限运算法则，得

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,2)} y=1\times 2=2.$$

8.1.4　多元函数的连续性

学习了函数极限的概念后，就不难说明多元函数的连续性.

定义 3 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点,且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续,那么就称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

以上关于二元函数的连续性概念,可相应地推广到 n 元函数 $f(P)$ 上去.

下面,把一元基本初等函数看成二元函数(即另一个自变量不出现)的特例,来讨论它的连续性.这里先看一个例子.

例 3 设 $f(x,y)=\sin x$,证明 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数.

证明 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$. $\forall\varepsilon>0$,由于 $\sin x$ 在点 x_0 处连续,故 $\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon.$$

以 δ 作点 P_0 的邻域 $U(P_0,\delta)$,则当 $P(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 时,显然

$$|x-x_0|\leqslant \mathrm{d}(P,P_0)<\varepsilon,$$

从而

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon,$$

即 $f(x,y)=\sin x$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.由点 P_0 的任意性知,$\sin x$ 作为 x,y 的二元函数在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

由类似的讨论可知,一元基本初等函数看成二元函数或二元以上的多元函数时,它们在各自的定义域内都是连续的.

定义 4 设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点.如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续,则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

例如,前面讨论过的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

其定义域为 $D=\mathbf{R}^2$,$O(0,0)$ 是 D 的聚点.$f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限不存在,所以点 $O(0,0)$ 是该函数的一个间断点.

又如,函数 $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$,其定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 1\}$,圆周 $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 上的点都是定义域 D 的聚点,而 $f(x,y)$ 在圆周 C 上没有定义,当然 $f(x,y)$ 在圆周 C 上各点都不连续,所以圆周 C 上各点都是该函数的间断点.

前面已经指出:一元函数中关于极限的运算法则,对于多元函数仍然适用.根据多元函数的极限运算法则,可以证明多元连续函数的和、差、积仍为连续函数;连续函数的商在

分母不为零处仍连续；多元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元初等函数相类似，多元初等函数是指可用一个式子所表示的多元函数，这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的. 例如，$\frac{x+x^2-y^2}{1+y^2}$，$\sin(x+y)$，$e^{x^2+y^2+z^2}$ 都是多元初等函数.

根据上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续及连续函数的复合函数的连续性，再利用基本初等函数的连续性，可以进一步得出如下结论.

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由多元连续函数的连续性知，如果要求多元连续函数 $f(P)$ 在点 P_0 处的极限，而该点又在此函数的定义区域内，则极限值就是函数在该点的函数值，即

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

例 4　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y}{xy}$.

解　函数 $f(x,y) = \frac{x+y}{xy}$ 是初等函数，它的定义域为

$$D = \{(x,y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}.$$

$P_0(1,2)$ 为 D 的内点，故存在点 P_0 的某一邻域 $U(P_0) \subset D$，而任何邻域都是区域，所以 $U(P_0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个定义区域，因此

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = \frac{3}{2}.$$

一般地，求 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 时，如果 $f(P)$ 是初等函数，且点 P_0 是 $f(P)$ 定义域中的内点，则 $f(P)$ 在点 P_0 处连续，于是

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

例 5　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

以上运算的最后一步用到了二元函数 $\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性.

与闭区间上的一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质.

性质1(有界性与最大值和最小值定理)　在有界闭区域 D 上的多元连续函数，必定在 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值.

性质1就是说，若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则必定存在常数 $M>0$，使得对一切 $P\in D$，有 $|f(P)|\leqslant M$；且存在 P_1、$P_2\in D$，使得

$$f(P_1)=\max\{f(P)\mid P\in D\},f(P_2)=\min\{f(P)\mid P\in D\}.$$

性质2(介值定理)　在有界闭区域 D 上的多元连续函数必定取得介于最大值和最小值之间的任何值.

习　题　8.1

1. 判断下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集，并分别指出它们的聚点和边界点.

(1) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；　　(2) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$.

2. 已知 $f(x,y)=x+y-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式：

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

4. 设 $f(x+y,xy)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，求 $f(x,y)$.

5. 求下列各函数的定义域并画出定义域图形：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；　　(2) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　　(4) $u=\sqrt{1-x-y}+\sqrt{1+x-y}$.

6. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}\dfrac{xy}{x^2+2}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}xy\sin\dfrac{1}{xy}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2+y^2)^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$；

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(1+\sin xy)^{\frac{1}{x}}$；　　(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{y}}$.

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.