高效学习探索丛书
GaoXiao XueXi TanSuo CongShu

中学生学习报

烛光教学研究中心

丛书主编：郭晓光

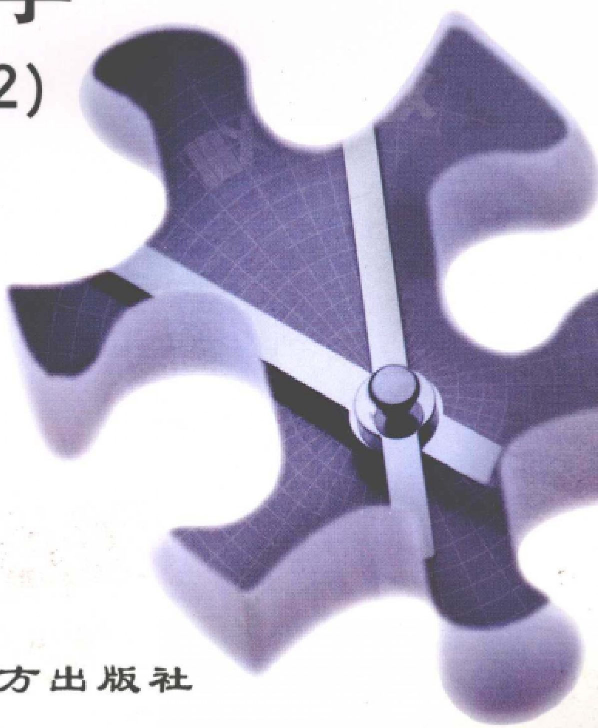
亮点

新课标教材同步导学

高中数学

（选修2－2）

本册主编：徐洪艳



供使用
人教A版教材
师生参考

南方出版社

责任编辑：薛　兵

封面设计：大格局•书装部

亮点

新课标教材同步导学

高中必修系列

高中语文必修1（人教）
高中语文必修2（人教）
高中语文必修3（人教）
高中语文必修4（人教）
高中语文必修5（人教）
高中数学必修1（人教A）
高中数学必修2（人教A）
高中数学必修3（人教A）
高中数学必修4（人教A）
高中数学必修5（人教A）
高中英语必修1（人教）
高中英语必修2（人教）
高中英语必修3（人教）
高中英语必修4（人教）
高中英语必修5（人教）
高中物理必修1（人教）
高中物理必修2（人教）
高中化学必修1（人教）
高中化学必修2（人教）

高中选修系列

高中数学选修2–1（人教A）
高中数学选修2–2（人教A）
高中数学选修2–3（人教A）
高中物理选修3–1（人教）
高中物理选修3–2（人教）
高中物理选修3–3（人教）
高中物理选修3–4（人教）
高中物理选修3–5（人教）
高中化学选修3（人教）
高中化学选修4（人教）
高中化学选修5（人教）

ISBN 978-7-80760-233-0

9 787807 602330 >

定价：50.00元（全3册）

高效学习探索丛书

亮点

新课标教材同步导学

高中数学（选修 2–2）

主编：徐洪艳
编者：徐洪艳

南方出版社

图书在版编目(CIP)数据

亮点·新课标教材同步导学．高中数学．2-2：选修/《亮点·新课标教材同步导学》编委会编著．—海口：南方出版社，2008.7

ISBN 978-7-80760-233-0

Ⅰ．亮… Ⅱ．亮… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 111417 号

亮点·新课标教材同步导学

高中数学(选修 2-2)

责任编辑：薛　兵

出版发行：南方出版社

邮政编码：570208

社　　址：海南省海口市和平大道 70 号

电　　话：(0898)66160822　传真：(0898)66160830

印　　刷：郑州市毛庄印刷厂

开　　本：32 开

印　　张：30.5

版　　次：2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：50.00 元/套(全 3 册)

致读者

这本书适合你吗?

(一)这本书的特色

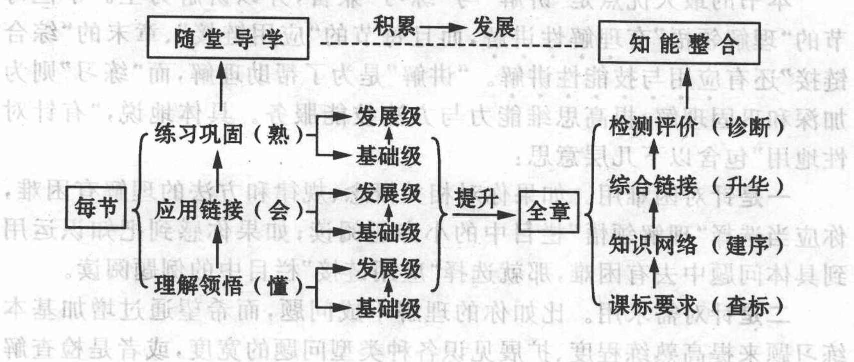
看茫茫学辅书海,谁更能全面准确地体现新课程理念!谁更能让莘莘学子学海扬帆,将基本知识、基本技能升华为学习智慧!亲爱的同学,欢迎你朝着“亮点”走来!她——

☞**结构简约,脉络清晰**

栏目结构合理。每一章,“随堂导学”跟踪每一节,“知能整合”提升每一章,始终与你的学习进程密切同步;“基础级”“发展级”“升华级”层次分明,让你的学习富有弹性和选择性。

☞**目标明确,功能优越**

本书以促进“生成性学习”为目标。“生成”是一个螺旋上升的发展过程,是一个从“学会”到“会学”、从“夯实基础”到“形成智慧”的过程。本书优越的结构功能为落实这种理念提供了保障:



☞**返璞归真，务求实效**

本书寓新意于全篇，融关怀于细节。讲解力求通俗、具体，贴近学生的认知实际、思维水平；例题讲究针对性、代表性，前有分析，后有点悟，解答过程详细；不套用时尚名称把题目人为地架高，更力戒刻意追求时尚而远离学科特点和学生现有认知水平。

友情提醒：

♥ 如果你怀疑，不妨先通篇浏览，然后选择其中某章或某节仔细阅读。

♥ 如果你决定买这本书，我们还有以下建议……

书好＋用好＝效果好

（二）如何用好这本书

从茫茫书海中选得一本心仪的书，自然高兴。但是，“书好”还得“用好”。怎样才算是“用好”呢？关键是结合书的特点和自己的学习情况“有针对性地用”。

本书的最大优点是“讲解”与“练习”兼备，并以讲解为主。不但每节的“理解领悟”有理解性讲解，而且每节的“应用链接”、章末的“综合链接”还有应用与技能性讲解。“讲解”是为了帮助理解，而“练习”则为加深和巩固理解、提高思维能力与方法技能服务。具体地说，“有针对性地用”包含以下几层意思：

一是针对困难用。如果你对相关概念、规律和方法的理解有困难，你应当选择“理解领悟”栏目中的小专题阅读；如果你感到把知识运用到具体问题中去有困难，那就选择“应用链接”栏目中的例题阅读。

二是针对需求用。比如你的理解不成问题，而希望通过增加基本练习题来提高熟练程度、扩展见识各种类型问题的宽度，或者是检查解

决问题的准确度，那么，你可以选择每节的“练习巩固”及章末“检测评价”去做。本书的每一道练习或检测题都有答案，稍难的还配有提示或详细解题过程。

三是针对水平用。如果你学习困难较大，建议你选择每个栏目中的“基础级”先解决，而把“发展级”暂时放一放，更不要急于去啃“综合链接”中的“升华级”。书中的“基础级”，是为应对高考设置的底线，而“发展级”和“升华级”则是为想夺高分的人准备的“副餐”，因而你不必担心抓“基础级”会误了高考。其实，你一定懂得“循序渐进”和“欲速则不达”的道理，真的解决了“基础级”，一段时间后再回头突破“发展级”乃至“升华级”应该比较顺利。当然，如果你的“基础级”根本不成问题，那也没有必要在“基础级”上徘徊，可以较快地把侧重点移到“发展级”和“升华级”上。

我们期待着：

♥ 你在各级各类考试中如愿以偿！

♥ 你把使用这本书的真实感受传达给你的朋友。

郭晓光

目 录

第一章　导数及其应用

本章搜索

如果你想『看』

理解领悟＊应用链接

知能整合

如果你想『练』

练习巩固

随堂导学

1.1 变化率与导数

理解领悟

基础级

1. 怎样计算平均变化率

【引例】 一列火车运行的路程 s(单位:km)与运行时间 t(单位:h)之间的函数关系为$s=8t^2+50t+70$,那么火车在 $0\leqslant t\leqslant 0.5$ 这段时间里的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{s(0.5)-s(0)}{0.5-0}=54(\text{km/h}).$$

在 $1\leqslant t\leqslant 2$ 这段时间里的平均速度为 $\bar{v}=\frac{s(2)-s(1)}{2-1}=74(\text{km/h})$.

那么在 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 这段时间里的平均速度为 $\bar{v}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$.

一般地,对于函数 $f(x)$,当自变量 x 从 x_1 变化到 x_2 时的平均变化率为 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$,若用 Δx 表示 x_2-x_1,即 $\Delta x=x_2-x_1$,则 $x_2=x_1+\Delta x$. Δx 可看作是相对于 x_1 的一个"增量".

同理用 Δf 表示函数值的增量,即 $\Delta f=f(x_2)-f(x_1)$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$的平均变化率为$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

2. 怎样计算瞬时变化率与导数

【引例】 在上面的引例中,你能求出当时间为 $t=1.5$ 时的瞬时速度吗?

我们先考察 $t=1.5$ 附近的情况,在 $t=1.5$ 的前后,任取一个时刻 $1.5+\Delta t$,Δt 为时间改变量,可以为正值,也可以为负值,但不为 0,则在这段时间内的平均速度为$\frac{s(1.5+\Delta t)-s(1.5)}{\Delta t}=8\Delta t+74$,当 Δt 趋近于 0 时,平均速度趋近于 74,即当 $|\Delta t|$ 无限变小时,平均速度 $\bar{v}$ 就趋近于 $t=1.5$ 时的瞬时速度,这种逼近,实质上是求极限,记作 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(1.5+\Delta t)-s(1.5)}{\Delta t}=74$.

那么在时刻 t_0 时的瞬时速度是多少呢?

同理，在时刻 $t=t_0$ 时的瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$.

一般地，对于函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$，我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，所以导数的计算公式为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

3. 导函数的定义

从求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数的过程可以看出，当 $x=x_0$ 时，$f'(x_0)$ 是一个确定的数．当 x 变化时，$f'(x)$ 是关于 x 的一个函数，称为 $f(x)$ 的导函数（简称为导数）．记作 $y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$．反过来，若能求出 $f'(x)$，则可以知道 $f'(x_0)$ 的值．

发展级

4. 平均变化率的几何意义

观察函数 $f(x)$ 的图象（图 1.1-1），由平均变化率的计算公式 $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，其中 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，可知平均变化率为直线 AB 的斜率．

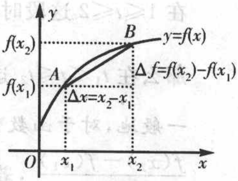


图 1.1-1

【链接】 已知函数 $y=f(x)$ 在 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 上的平均变化率为 5，求 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点连线的斜率 k_{AB}.

解：由平均变化率的几何意义，知 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=5$.

5. 导数的物理意义

由引例及导数的定义，知 $s'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 表示 $t=t_0$ 时刻的瞬时速度，所以导数的物理意义表示某一时刻的瞬时速度．

【链接】 已知某物体运动的路程 s 与时间 t 的关系为 $s=-2t^2+8t+3$，求 $t=2$ 时刻的瞬时速度．

解：∵ $s'(2)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}=\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{[-2\times(2+\Delta t)^2+8(2+\Delta t)+3]-[-2\times 2^2+8\times 2+3]}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(-2\Delta t)=0$，

∴ $t=2$ 时刻的瞬时速度为 0.

6. 导数的几何意义

(1)切线的定义.

设曲线 $y=f(x)$ 上两点 P,P_n，当 P_n 趋近于 P 点时，割线 PP_n 趋近于确定的位置，这个确定位置的直线 PT 称为过点 P 的切线(如图 1.1-2).

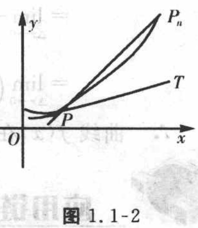


图 1.1-2

平面几何中圆是一种特殊的曲线，它的切线也可以用上述概念，而圆的切线的定义是用直线与圆的公共点个数来定义的，当直线与圆有唯一的公共点时，直线与圆相切，这时直线叫做圆的切线，这种定义不适用于一般曲线的切线. 如图 1.1-3，过点 M 的直线 l_2 为曲线在 M 点处的切线，但它却与曲线有两个公共点，而过 N 点处的直线 l_1 虽然与曲线只有一个公共点，但 l_1 却不是曲线的切线. 由此看来圆的切线的定义并不适用于一般曲线的切线，通过逼近的方法将割线趋于确定位置的直线定义为切线，适用于各种曲线，所以这种定义反映了切线的本质.

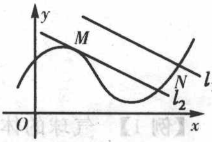


图 1.1-3

(2)以直代曲的思想方法.

观察图形(图 1.1-4)在点 P 附近，PP_2 比 PP_1 更贴近曲线 $f(x)$，PP_3 比 PP_2 更贴近曲线 $f(x)$……过点 P 的切线 PT 更贴近点 P 附近的曲线 $f(x)$，因此在点 P 附近，曲线 $f(x)$的值就可以用过点 P 的切线 PT 相对应的值近似代替. 这种思想为“以直代曲”，在微积分中是一种重要的思想方法.

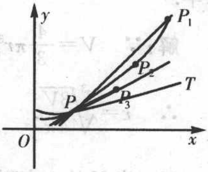


图 1.1-4

(3)导数的几何意义.

平均变化率的几何意义为曲线上两点连线的斜率，导数 $f'(x_0)$表示函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率，反映了函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 附近的变化情况，那么导数 $f'(x_0)$的几何意义是什么呢?

设 P 和 P_n 为函数 $y=f(x)$ 图象上的两点，则割线 PP_n 的斜率 $k_n=\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$，其中 $P(x_0,f(x_0))$，$P_n(x_n,f(x_n))$；当点 P_n 无限趋近于点 P 时，k_n 无限趋近于切线 PT 的斜率，因此函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数就是切线 PT 的斜率 k，即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

【链接】 求曲线 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+3$，在 $x=1$ 处的切线斜率.

解：∵ $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1+\Delta x)^3+2(1+\Delta x)^2+3-\left[\frac{1}{3}+2+3\right]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{3}\Delta x^2+3\Delta x+5\right)=5,$$

∴ 曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $k=5$.

应用链接

基础级

【例 1】 气球的体积 V 与半径 r 之间的函数关系为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，当气球的容量 V 从 2 变到 3 时，求气球的平均膨胀率.

分析 空气容量 V 为自变量，气球的半径 r 为函数值，需先求出 r 再求平均膨胀率.

解：∵ $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，

∴ $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

∵ 当 V 从 2 变到 3 时，气球半径增加了 $r(3)-r(2)=\sqrt[3]{\frac{3\times 3}{4\pi}}-\sqrt[3]{\frac{3\times 2}{4\pi}}\approx 0.1131$，

∴ 气球的平均膨胀率约为 $\frac{r(3)-r(2)}{3-2}=0.1131$.

点悟 本题中的自变量是容量 V，函数值为半径 r，应先得到 r 的函数解析式，再由平均变化率公式 $\frac{\Delta r}{\Delta V}=\frac{r(3)-r(2)}{3-2}$ 进行计算.

【例 2】 一物体的运动路程 s 随时间 t 的变化关系为 $s=\frac{1}{2}t^2+6t+9$，求时刻 $t=2$ 到时刻 $t=6$ 的平均速度.

分析 求平均速度可用路程的增加量除以时间的增加量.

解：∵ $s(6)-s(2)=\frac{1}{2}\times 6^2+6\times 6+9-\left[\frac{1}{2}\times 2^2+6\times 2+9\right]=40$，

∴ $\bar{v}=\frac{s(6)-s(2)}{6-2}=10$.

故时刻 $t=2$ 到时刻 $t=6$ 的平均速度为 10.

点悟　某段时间内在平均速度为平均变化率，计算公式为 $\bar{v}=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$.

【例 3】　一物体的运动路程 s(单位：m)与时间 t(单位：s)的函数关系为 $s=-3t^2+8t-2$，求 $t=1$ 时刻的瞬时速度.

分析　某一时刻的瞬时速度就是这一时刻处的函数的导数.

解：$t=1$ 时刻的瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{-3(1+\Delta t)^2+8(1+\Delta t)-2-(-3+8-2)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(-3\Delta t+2)=2.$

故 $t=1$ 时刻的瞬时速度为 2.

点悟　函数在 $x=x_0$ 处的导数的物理意义为 $x=x_0$ 时的瞬时速度.

【例 4】　某车间生产某种产品产量 p 与时间 t 的函数关系为 $p=3t^2-2t+5$，求 $t=3$ 时的生产效率.

分析　$t=3$ 时生产效率即为瞬时变化率 $p'|_{t=3}$.

解：$p'|_{t=3}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{p(3+\Delta t)-p(3)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{(3+\Delta t)^2-2(3+\Delta t)+5-(3\times 3^2-2\times 3+5)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta t+4)=4.$

故 $t=3$ 时的生产效率为 4.

点悟　导数可以描述任何事物的瞬时变化率，如效率、点、密度、国内生产总值的增长率等.

【例 5】　已知函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+1$，作出函数的图象，请根据图象比较曲线在 $x=0,x=3,x=2$ 附近的变化情况.

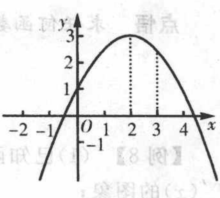


图 1.1-5

分析　根据图象研究曲线的变化情况，常常"以直代曲"，研究曲线的切线来完成.

解：作函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+1=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+3$ 的图象，如图 1.1-5，从图上可看出：

(1)当 $x=0$ 时，切线的斜率为 $y'|_{x=0}>0$.

∴　曲线在 $x=0$ 附近曲线上升，即函数 $x=0$ 附近单调递增.

(2)当 $x=2$ 时，切线平行于 x 轴.

∴ 曲线在 $x=2$ 附近曲线比较平坦，几乎没有升降.

(3)当 $x=3$ 时，切线的斜率为 $y'|_{x=3}<0$.

∴ 曲线在 $x=3$ 附近下降，即函数在 $x=3$ 附近单调递减.

点悟 利用"以直代曲"的思想，通过判断某点处的切线的斜率可判断函数在该点附近的变化趋势，特别是对于瞬息变化的函数研究起来比较方便，如股市的变化行情分析等.

【例 6】 已知抛物线 $y=2x^2-3x+5$，求 $x=2$ 处的切线的斜率.

分析 导数的几何意义就是切线的斜率，求切线的斜率就是求导数.

解：$x=2$ 处的切线的斜率

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(2+\Delta x)^2-3(2+\Delta x)+5-(2\times 2^2-3\times 2+5)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x+5)=5.$$

点悟 利用导数的定义求得函数在 $x=2$ 处的导数，即可求得曲线在此点处的切线的斜率.

【例 7】 已知函数 $f(x)=2x^3+3x^2-5x+2$，求 $f'(x)$.

分析 利用导数的定义求导数.

解：$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^3+3(x+\Delta x)^2-5(x+\Delta x)+2-(2x^3+3x^2-5x+2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x^3+6x\Delta x^2+6x^2\Delta x+3\Delta x^2+6x\Delta x-5\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x^2+6x\Delta x+6x^2+3\Delta x+6x-5)$$

$$=6x^2+6x-5.$$

点悟 求任何函数的导数都可以直接利用定义求解.

发展级

【例 8】 (1)已知函数 $f(x)$的图象(图 1.1-6)，估计导函数 $f'(x)$的图象；

(2)已知 $f(1)=2$，$f'(x)=-2$，画出 $x=1$ 附近的函数图象的大致形状.

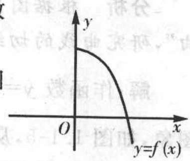


图 1.1-6

分析 利用"以直代曲"的思想，用切线研究函数.

解：(1)从 $x=0$ 开始向右逐渐画出各点的切线可以看出各点处的切线的斜率都为负值，且逐渐减小，$x=0$ 处较平坦，切线的斜率接近于0，所以其导函数的图象可画为图 1.1-7.