高等數学講义

數學與理論力學教研組編

1957
武汉測量制图学院教材与出版科

高等数学講义

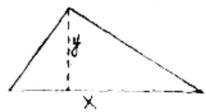
第三册　目　　录

第六編　多元函数的微積分

第六編　多元函数的微積分

第一章　多元函数的微分法

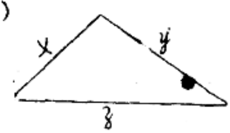
§6—1—1．多元函数　前几編里面所考虑的函数都是一个自变量的函数。在科学技术的問題里面，我們还要遇到两个自变量，三个自变量或 n 个自变量的函数，叫做多元函数。例如三角形的面积就是一个二元或三元函数，当三角形的面积s由它的底x和高y来表达的时候，它就是二元函数：



$$S=\frac{1}{2}xy$$

当它的面积由三边的长度来表达的时候，它就是三元函数：

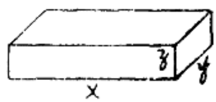
$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$



其中 $p=\frac{1}{2}(x+y+z)$。

一个长方体，用它的长度、寬、高来表达它的体积，結果就得到一个三元函数：

$$v=xyz$$



在这个例子里面，当x，y，z各取得給定数值的时候，v就有一个对应值：例如

v	8	3	7	$\frac{33}{25}$	10^6
x	2	1	$3\frac{1}{2}$	0.4	50
y	2	3	$1\frac{1}{2}$	1.5	100
z	2	1	$\frac{4}{3}$	2.2	200

由这些具体的例子，我們可以写出多元函数的定义：

定义　当变量$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$取得給定的一組数值的时候，($n$是有限数)，变量$u$就有一个或多个数值和它們对应；那末$u$就是变量$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$的$n$元函数，其中$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$叫做自变量。用記号

$$u=f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$$

来表达。

例如

$$u=x+y$$

是两个变量x和y的函数；对于x和y的一对給定的数值，仅有一个u的数值和它們对应；又如

$$u=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

是两个变量x和y的函数，对于x和y的每一对給定的数值，都有两个u的数值和它們对应；又如

$$u=Arcsin(x^2+y^2+z^2)$$

是三个变量x, y, z的函数，对于x, y, z的一組給定的数值，只要($x^2+y^2+z^2\leqslant 1$)必有无数个u的值和它們对应。

二元函数的理論和一元函数有一些区别，但二元函数的理論可以直接推广到三元、四元……。因此在本章里面着重討論二元函数。

多元函数也可以是复合函数，例如

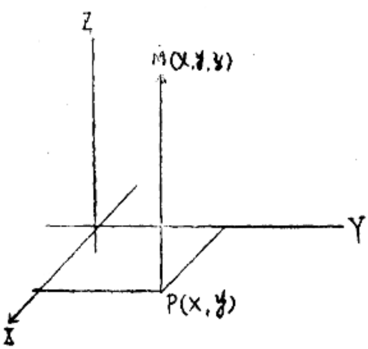
$$z=e^u sin v$$

其中$u=xy$，$v=x+y$；那末z就是x, y两个变量的复合函数，又如

$$z=e^u sin v$$

其中　　$u=x^2, v=x^2+1$；那末z就是一个变量x的复合函数。

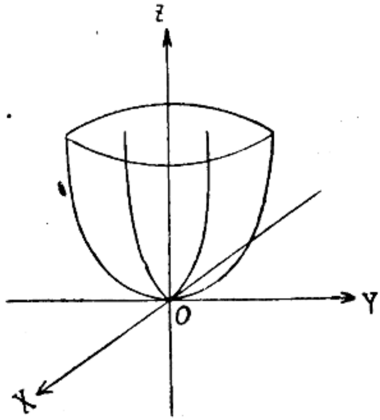
§6—1—2. 二元函数的几何意义　为了用几何的方法来表达二元函数，我們采用空間直角坐标系。函数



$$z=f(x,y)$$

的几何表达法是可以仿照一元函数$y=f(x)$的几何表达法来說明的。对一元函数来說，一个变点P在数軸上一定区間上移动，当它在点x_1的时候，如果对应的函数值是y_1，那末平面上点$M(x_1,y_1)$，就是函数$f(x)$在点x_1的图。在全区間上一个单值連續函数的图就是由区間上各点的图所构成的单值連續曲綫。

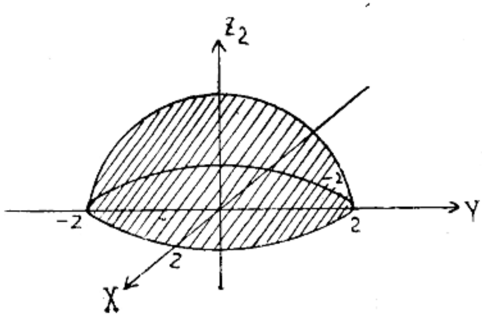
对于一个二元函数来說，一个变点$P(x,y)$在XOY平面上一定区域里面移动，当它在点$P_1(x_1,y_1)$的时候，如果对应的函数值是z_1，那末在空間內点$M(x_1,y_1,z_1)$就是函数$f(x,y)$在点P_1的图。在全区域上一个单値連續函数的图，就是由区域上各点的图所构成的单值連續曲面。（关于二元函数的連續性，詳§6—1—5）



例如函数 $z=x^2+y^2$的图是旋轉抛物面；又$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的图是以原点为心，以2为半徑的上半个球面。綫性函数

$$z=x+y+3$$

的图是一个平面。



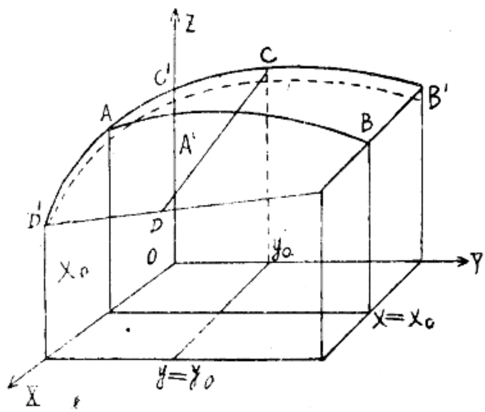
由此可見，一个二元函数一般对应着一个空間曲面。

（注意一）函数$y=f(x)$可以看作是数軸上某区間內点P的函数，函数$z=f(x,y)$也可以看

作是坐标平面上某区域内点P的函数，推广到三元函数$u=\varphi(x,y,z)$可以看作是三維空間某区域内点P的函数。

（注意二）如果在两个变量之中有一个保持不变，那末点$P(x,y)$只能在一条直綫上移动，例如当$x=x_0$的时候，点$P(x_0,y)$只能在XOY平面上沿直綫$x=x_0$而移动，函数$f(x_0,y)$变成了一元函数

$$z=f(x_0,y)=F(y)$$



这个函数的图是一条曲綫（AB），这曲綫画在平面$x=x_0$上面，方程$z=f(x_0,y)$是这曲綫在YOZ平面上正投影（曲綫$A'B'$）的方程。同样，当$y=y_0$的时候，P只能在沿XOY平面上直綫$y=y_0$移动；方程$z=f(x,y_0)$是曲綫CD在XOZ平面上的投影（曲綫$C'D'$）的方程。

§6—1—3. 二元函数的定义域　为了使問題明確，我們仅仅討論由一个解析式子来定义的二元函数：

$$z=f(x,y)$$

这样的二元函数，有时候在全部XOY平面上都有定义。例如函数

$$z=x^2+y^2$$

对于XOY平面上任意点$P(x_1,y_1)$都有確定的函数值$z_1=x_1^2+y_1^2$，沒有任何例外。我們就說它的定义域是全部XOY平面。有时候在平面的某些点或某些綫上，一个二元函数沒有定义，例如函数

$$z=\frac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

在点$(1,1)$失去意义；又如函数

$$z=\frac{1}{x^2-y^2}$$

在直綫$x-y=0$和$x+y=0$上都失去意义，我們就說除某点某綫外的全部XOY平面是它的定义域。又有时候，在平面上由給定曲綫（或折綫）所包圍的区域里面某一个二元函数有定义，在区域以外就沒有定义，例如函数

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

在以原点为心，以1为半徑的园$x^2+y^2=1$里面有定义，在这个园以外，它就沒有定义，这时我們就說它的定义域是$x^2+y^2\leqslant 1$。这个域是指着园$x^2+y^2=1$所包圍的平面区域的全部幷且包括了园周本身在內，我們說它是一个閉域。至于函数

$$z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

的定义域只是园$x^2+y^2=1$的內部，不包括园周在內，因此它的定义域就是开域$x^2+y^2<1$，所說的开域就是不包括着边界的域，当然全部XOY平面也是一个开域。

总之，如果在XOY平面上某一点$P(x,y)$，函数$f(x,y)$有確定的对应值，那末函数在这一点就是有定义的；平面上使函数有定义的点的全体构成函数的定义域。

二元函数的定义域可以是XOY平面的全部或一部；可以是有边界的閉域或是无边界的开域。

（注意一）如果函数不是由一个解析式子来定义的，那末函数的定义域和解析式子的定义域也可能不同，例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x-y)\sin\dfrac{1}{x-y}, & x\neq y\\ 0。 & x=y\end{cases}$$

解析式子$(x-y)\sin\dfrac{1}{x-y}$的定义域是除直綫$y=x$以外的全部XOY平面；但在这直綫上函数$f(x,y)$仍有定义，因此函数的定义域是全

部XOY平面。

（注意二）由具体問題所引出的函数，用解析式子来表达，有时候解析式子的定义域会比問題本身所允許的定义域大一些，例如矩形面积z是它的長寬两边x和y的函数

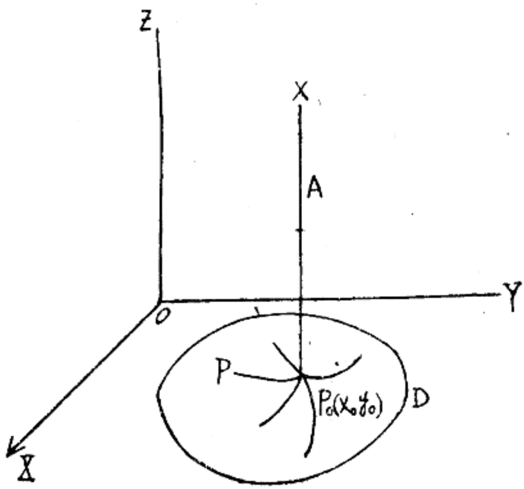
$$z=xy$$

这个解析式子xy的定义域是全部XOY平面，但問題本身不允許x及y取得負值，因此函数的定义域只是第一象限$x\geqslant O, y\geqslant O$。

（注意三）以平面上定点P_0为心，以r为半徑画园，由这个园所包圍的平面域叫做点P_0的r邻域。

§6—1—4 二元函数的极限 一个二元函数$z=f(x,y)$当自变量x和y都趋近于確定的极限的时候，函数z也可能存在着一个极限。从几何观点来看：当$x\longrightarrow x_0$，$y\longrightarrow y_0$时，就意味着变点$P(x,y)$趋近于定点$P_0(x_0,y_0)$，也就是两点的距离PP_0趋近于o，

$\rho=PP_0=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\longrightarrow o$，这里应該注意的是：$P$点是一个变点，在函数的定义域里面，从随便那一个方向趋近于P_0都可以，路綫不能加以限制。因此我們要說，变点P从任意方向趋近于P_0或者說ρ任意趋近于o，如果在这个过程里面，函数的对应值$f(x,y)$趋近于一个定数A，我們就說数A是函数当$\rho\longrightarrow O$时的极限，用



$$\lim_{\rho\to o} f(x,y)=A \qquad \text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

来表达。这就是說：当P点任意趋近P_0的时候，对于任意指定的正的小数ε，都有这样一个$\delta>o$存在，使得$o<PP_0<\delta$的时候，点(x,y)适合不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

那末，A就叫做$x\longrightarrow x_0$，$y\longrightarrow y_0$时（或$\rho\longrightarrow o$时）函数$z=f(x,y)$的极限。换句話說，当P点趋近于P_0的时候，如果$f(x,y)-A$是一个无穷小量，那末A就是函数$f(x,y)$的极限。

〔例〕1.函数$f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，当$x\longrightarrow o,y\longrightarrow o$时，极限不存在。如果当$x\longrightarrow o,y\longrightarrow o$时，变点$P$是沿着$x$軸进行的，那末这极限就是

$$\lim_{x\to o} f(x,o)=\lim_{x\to o}\frac{o}{x^2+o}=o;$$

如果P是沿着y軸进行的，那末

$$\lim_{y\to o} f(o,y)=\lim_{y\to o}\frac{o}{o+y^2}=0$$

不过如果P点沿着直綫$y=xtg\alpha$进行，那末

$$\lim_{\substack{x\to o\\ y\to o}} f(x,y)=\lim_{x\to o} f(x,xtg\alpha)=\lim_{x\to o}\frac{2x\cdot xtg\alpha}{x^2+x^2tg^2\alpha}$$

$$=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=2sin\alpha cos\alpha=sin2\alpha$$

这个极限显然和α角的选擇有关，所以当角度α变化的时候，极限也就变化，因此极限不存在。

2.函数$\dfrac{sin(x-y)}{x-y}$，当$x\longrightarrow 2$，$y\longrightarrow 2$时，如果变点P趋近于定

点$P_0(2,2)$的时候，不通过直綫$y=x$，它的极限就是1。

这是因为如果P点經过直綫$y=x$，这时函数无定义。如果不經过直綫$y=x$，而經过任意直綫$y-2=m(x-2)$，$m\neq 1$，那末

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{\sin(x-y)}{x-y}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin[x-\overline{2+m(x-2)}]}{x-\overline{2+m(x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(m+1)(x-2)}{(m+1)(x-2)}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

$$[\alpha=(m+1)(x-2)]$$

3.函数$f(x,y)=\dfrac{x+y+2}{x^2+y^2+1}$，当$x\longrightarrow o$，$y\longrightarrow o$，函数的极限是$2$。假定变点$P$沿任意直綫$y=mx$趋近于$P_0(o,o)$。

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y+2}{x^2+y^2+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x+mx+2}{x^2+m^2x^2+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+m)+2}{x^2(1+m^2)+1}$$

$$=\frac{2}{1}=2$$

如果它沿y軸趋于(o,o)，此时$x=0$，我們就这样求它的极限

$$\lim_{y\to 0}f(o,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y+2}{y^2+1}=\frac{2}{1}=2$$

§6—1—5　二元函数的連續性　有二元函数

$$z=f(x,y),$$

我們要考察函数$f(x,y)$在它的定义域里面一个給定点$P_0(x_0,y_0)$处是否連續。

在点P_0的附近任取一点$P(x,y)$，如果P和P_0的距离很小，对应的函数差値$f(P)-f(P_0)$也很小；PP_0越小，$f(P)-f(P_0)$也就越小，那末函数$f(x,y)$在P_0点就是連續的。换句話說，如果变点P在P_0点附近有无限小位移$\Delta\rho$，对应的函数值也有无穷小增量$f(P)-$

$f(P_0)$，我們就說函数在P_0点是連續的。再換句話說：在函数$z=f(x,y)$的定义域里面，当P任意趋近于P_0的时候，如果

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$$

我們就說函数在点$P_0(x_0,y_0)$处連續。

由以上的說法，可見函数在某一点$P_0(x_0,y_0)$处連續的条件是

(1)函数$f(P)$在P_0点的邻域上有定义；

(2)当P趋近于P_0的时候，$f(P)$的极限存在；

(3)这个极限等于在P_0处的函数值$f(P_0)$。

如果不合以上的三条件，那末函数$f(P)$在点P_0处就不連續，P_0点叫做間断点。

如果函数在某区域上每一点处都連續，我們就說它在区域上連續。

（例）1.函数$z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$在原点处是不連續的，因为在原点处函数沒有定义。

2.函数$z=\dfrac{1}{x-y}$在平面直綫$y=x$的任何点上都是不連續的，因为在这条直綫上函数沒有定义。

3.函数$z=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$在园周$x^2+y^2=4$上每一点处都是不連續的。在园外怎样？

4.有函数$f(x,y)$定义如下，除点$P_0(1,1)$外，$f(x,y)=3-x-y$；

在点$P_0(1,1)$处，$f(x,y)=\dfrac{1}{2}$

这个函数在点P_0和P_0的邻域上都有定义，但不拘点P从任意方向趋近于P_0，函数的极限是1而不是$\dfrac{1}{2}$，因此函数在点P_0处不合第三条件所以不連續。

5. 函数 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 在原点处无定义，如果添上补充定义 $f(o,o)=0$，它就在全部 XOY 平面上有定义。但是它在原点 (o,o) 处仍是不連續的．当点 $P(x,y)$ 沿任意直綫 $y=kx(k\neq o)$ 趋近于原点时，函数的极限不存在，此时

$$\lim_{\substack{x\to o\\y\to o}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to o\\y\to o}}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}\neq 0$$

显然分式 $\dfrac{2k}{1+k^2}$ 的数値随 k 而变化，因此极限不存在，函数也就不連續。

§6—1—6．二元連續函数的屬性　二元連續函数有些屬性同一元連續函数的屬性相彷，現在叙述如下：

定理一　在閉域上連續的函数 $f(x,y)$，在該域上取得最大値及最小値至少各有一次。

例如　函数 $f(x,y)=x^2+y^2+1$ 在园域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 里面，最小値是 $f(o,o)=o+o+1=1$．最大値是在园周上，$f(x_1,y_1)=x^2{}_1+y^2{}_1+1=4+1=5$，其中 $x^2{}_1+y^2{}_1=4$。

定理二　在閉域上連續的函数如果在域上取得任何两个值，則它在域上至少有一次取得那两个値之間的任一値。

例如函数 $f(x,y)=x^2+y^2+1$ 在园域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 里面取得两个数値：

$$f(o,o)=1,\qquad f(1,1)=3$$

那末他也可以取得 1，3 之間一切値。例如他在点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 取得数値 $\frac{3}{2}$；在点 $(1,o)$，取得数値 2。

由連續函数也可以經过运算而产生新的連續函数：

定理三　在某点連續的有限个函数的和或积是在同一点的連續函数。

定理四 在某点連續的两个函数的商，只要分母在該点处不为 o，就是在同一点处的連續函数。

定理五 由有限个連續函数所組成的复合函数是連續的。

至于初等函数在它的定义区域里面就是連續函数，也是求二元函数极限值的时候，应該注意到的。

习題 6—1—甲

1. 把圆錐的体积z表示为其母綫x和高y的函数。

2. 有平截圆錐台，体积是v，上下底半徑是x和y，試求他的母綫z同v，x，y的函数关系式。

3. 試求在 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$， $y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$时，函数

$$z=\left(\frac{arctg(x+y)}{arctg(x-y)}\right)^{2}$$

的特定值。

4. 已給函数 $z=\dfrac{(u-x)(v-y)}{(u-y)(v-x)}$，如果变量$x$，$y$，$u$，$v$四个数成等差級数，試証明 $z=\dfrac{4}{3}$。

5. 設$F(x,y)=x^3-x^2y+y^3$，求証

当$m\neq O$，$F(mx,my)=m^3F(x,y)$和$F(x,y)=x^3f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

其中f函数是一个一元函数。

6. 設$F(x,y,z)=2x^2-xy+3z^2$，求証

当$m\neq O$，$F(mx,my,mz)=m^2F(x,y,z)$和

$F(x,y,z)=x^2f\left(\dfrac{y}{x},\ \dfrac{z}{x}\right)$其中$f$函数是一个二元函数。

7. 已給函数$z=uv$，其中$u=x+y$，$v=x-y$，試求函数的特定值:

z					
x	0	1	2	0	-1
y	1	1	3	0	-1

8.設 $z=\frac{u+v}{uv}$，$u=w^t, v=w^{-t}$，$w=\sqrt{x-y}$，$t=2(x-y)$ 試直接表达z为x,y的函数。

9.用截面法研究 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$的图形。

10.求函数定义域:

(1) $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}}$　　(2) $z=\ln(y^2-4x+8)$

(3) $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$　　(4) $z=\sqrt{x\sin y}$

(5) $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$　　(6) $u=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}}$

11. 証明函数 $z=\frac{x+y}{x-y}$ 在点 (o, o) 无极限。

12.求 $\lim\limits_{\substack{x\to o\\ y\to o}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

13.求 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$

14.函数 $z=\frac{x+y}{x-y}$ 及 $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在自己的定义域里面連續嗎?

15.利用連續性定义，証明函数$z=xy$在平面上任意一点处都連

續。

§6—1—7 二元函数的偏导数 我們現在要研究二元函数的导数問題。这个問題是比較复杂的。当我們要考察函数 $z=f(x,y)$ 在某一点$P(x,y)$处的变化情况，我們一定讓該点有无穷小位移$\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，然后再考虑函数的无穷小增量
$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$，由$\Delta z$和$\Delta\rho$的比値的极限来定义函数在$P$点处的变化率。这个問題的复杂在于无穷小位移$\Delta\rho$的方向，因此我們先就两种特殊情况来考虑这个問題。

第一种是当点P沿平行于X軸的方向取得无穷小位移Δx的时候，函数的对应无穷小增量就是偏于x的增量$\Delta_x z$，

$$\Delta_x z=f(x+\Delta_x,y)-f(x,y)$$

这时候，好象把y看作是一个常量，把z看作是单变量x的連續函数，假定这个函数是可导的，我們取比値：

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

这个比値表达了当y是常量的时候函数$f(x,y)$的平均变化率。当$\Delta x\longrightarrow 0$的时候，这个比値的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

就叫做函数$f(x,y)$在点$P(x,y)$处对于x的变化率。我們把它用以下的符号来表达

$$\frac{\partial z}{\partial x}\text{或}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\text{ 或 }f'_x(x,y)$$

其中$\frac{\partial z}{\partial x}$念作“函数$z$对于变量$x$的偏导数”，或者念作“$z$偏于$x$的导数”。

同样的道理，我們可以得第二种变化率

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f'_y(a'x)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

这个极限如果存在，就叫做z对于y的偏导数或z偏于y的导数。

由这两种偏导数，我們就能够判断函数$f(x,y)$在某一点处，当点P沿Y軸方向或沿X軸方向移动的时候，数值变化的快慢。如果把这两个方向的变化情况弄清楚，那么函数$f(x,y)$在該点处变化的情况大体上可以弄明白，如果要彻底弄清楚那就要再鑽研函数的任何方向的导数。

由以上的論述，我們看清楚一件事情，就是求偏导数的时候，用不着什么新的方法，只不过把两个变量里面的一个看作常量，把函数当作单变量函数，再求普通导数就成了。

〔例〕 1.求$z=y^2\sin 3x$的两种偏导数。

（解） $$\frac{\partial z}{\partial x}=3y^2\cos 3x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\sin 3x。$$

2.求$z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$的偏导数

（解） $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}。$$

3.求$z=x^y$的偏导数。

（解） $$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x。$$

（注意）推广到三元或四元以上的函数，求偏导数的道理是一样的。

4.求 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的三个偏导数。

（解） $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\,2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$