提分攻略

主编 蔡晔

疑难与规律详解

高二数学

全国百位名师联合编写

数理报 精编

龍門書局

www.longmenbooks.com

提分攻略系列

七年级数学　疑难与规律详解
八年级数学　疑难与规律详解
八年级物理　疑难与规律详解
中考数学　　疑难与规律详解
中考物理　　疑难与规律详解
中考化学　　疑难与规律详解
高一数学　　疑难与规律详解
高一物理　　疑难与规律详解
高一化学　　疑难与规律详解
高二数学　　疑难与规律详解
高二物理　　疑难与规律详解
高二化学　　疑难与规律详解
高考数学　　疑难与规律详解
高考物理　　疑难与规律详解
高考化学　　疑难与规律详解

ISBN 978-7-5088-2079-8
9 787508 820798 >
定价：19.00元

提分攻略

疑难与规律详解

高二数学

丛书主编　蔡　晔

丛书编委　李学镇　冯素梅　徐淑民　陈晓钟
刘贵军　李也莉　隋良永　张大蒙

《数理报》优秀作者编写

数理报 精编

龍門書局

北京

TIFENGGONGLUE

版权所有　翻印必究

举报电话:(010)64034160,13501151303(打假办)

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

提分攻略:疑难与规律详解.高二数学/蔡晔主编.北京:龙门书局,2009

ISBN 978-7-5088-2079-8

Ⅰ.提… Ⅱ.蔡… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第105405号

责任编辑:田旭　王乐　王艺超/封面设计:0504设计

龍門書局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2009年7月第一版　　开本:B5(720×1000)

2009年7月第一次印刷　　印张:12 1/4

字数:235 000

定　价:19.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前言

您在学习中遇到过难以理解的知识点吗？
您在考试中碰到过难以解答的试题吗？
您还在苦苦的寻觅学习的规律、解题的技巧吗？
您还经常为那些“看似容易，一做就错”的易错题苦恼吗？

不要烦恼了，本书将全方位地从根本上帮您解决这一系列问题，帮助您快速、有效地突破学习瓶颈，创造优异成绩。

本书编写背景

新课标教学和新的中高考改革，越来越强调学生能力的培养，包括思维能力、实际应用能力和创新能力。在这三个能力之中，思维能力是核心、是基础。而思维能力的培养不是一蹴而就的，需要教师、教材、学生三个方面通过科学的教学、学习、训练才能见效。

目前各中学使用各种不同版本的教材，都是依据“新课标”的精神和要求编写的，内容新颖，知识覆盖面广。但由于教材本身的篇幅所限，造成教材内容对知识的深度挖掘和对思维的纵向拓展不够。因此，绝大多数教师需要自己花大功夫去研究教材和考试，针对不同学生的学习水平，开发不同的教学资料。学生们也必须根据自身情况寻找学习资源，研究学习对策。这无疑给广大师生带来很大的负担。

而《数理报》作为一份专门为一线教学服务的优秀报刊，非常好地解决了教材、教学、学习、考试等各个环节的衔接问题。为您释疑解难，归纳总结，让您能够灵活应用知识规律解决问题，并能有所创新。为广大师生的教学和学习扫清了障碍。

鉴于此，我们组织了一批经验丰富的一线优秀教师，将《数理报》5 年来积淀下来的精华内容进行重新加工和整合，根据“新课标”和“考试大纲”的要求，分模块、分年级编排成册。

本书具有以下优势

一、既具有报刊的深度和灵活性，又具有图书的广度和系统性。

报刊上的文章，均为一线优秀教师将自己的教学心得归纳整理而成。内容深刻、实用，针对性非常强。但报刊内容同时也有很大的先天缺陷，那就是随意性较强，不成系统。我们将其 5 年的精华内容整理、提升，编写成书，既弥补了其系统性不足的缺陷，又发挥了其灵活性的优势。

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

二、紧扣各版本教材，可以作为同步教学使用。

《数理报》是一份非常成熟、非常实用的优秀报刊，它已经得到了全国几百万师生的认可。《数理报》的版本配备比较全，是一份同步辅导报。本书融合了《数理报》所有新旧“大纲”的配版分刊，根据知识模块加以整合。因此，本书适合各版本不同学段的师生同步教学和学习使用。

三、内容覆盖面广，重点突出，专门解决“疑难”和“规律”问题。

本书的编写定位，就是为了解决教学、学习、考试中的疑难问题，总结归纳解决问题的方法规律，旨在为广大师生突破教学、学习中的难点，找到提高思维能力的捷径。

本书将您学习中已经遇到和将要遇到的各类疑难各个击破，将学习中的窍门和规律一网打尽，为您的学习扫清障碍、铺路搭桥。

四、本书编写队伍庞大、实力雄厚。

多年来，《数理报》汇集了一大批优秀的一线作者，他们来自全国各地、各级中学的教育教学一线，有的是德高望重的教育教学专家，有的是教学成绩优异的中年骨干教师，还有崭露头角的年轻一代。总之，他们是我国目前中学教学一线优秀教师的代表，是我们教师队伍的精英。

本书使用建议

本丛书是对学生课堂学习的必要补充，主要针对学生学习的疑难点、易错点以及思维规律进行剖析和概括，帮助学生突破学习的薄弱环节。

本书内容分为三大部分，需要同学们根据自身的学习情况选择使用。

“知识疑难解读”针对课本各章节的重点、难点，给出详细的讲解和点拨。

此栏目需要同学们在掌握了课本知识的基本概念后使用。

“思维规律解读”总结了各章节的各类思维和解题规律，分析点拨了应用问题、探索性和开放性问题的解题思路，并针对中(高)考对各章节考查的重点考点做了剖析。

这一栏目的思维要求较高，例题有一定的难度，需要同学们首先弄懂课本上的例题和思维方法，再来研读。

“思维误区破解”精选学生容易出现的错误理解和错误解题思路，作深刻剖析，并向正确的思维引导学生。

同学们在研读这一栏目内容时，要结合自己的错题笔记，融会贯通，切勿死记硬背。

愿我们的劳动能帮助您跳出题海，享受思维探究的乐趣，体验学习成功的喜悦！

本书编写组

目 录

CONTENTS

第一章　解三角形

知识疑难解读

1. 三角形中常用公式：

$c = a\cos B + b\cos A, b = c\cos A + a\cos C,$

$a = b\cos C + c\cos B;$

$\sin(A+B) = \sin C, \cos(A+B) = -\cos C;$

$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}, \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}$

2. 三角形面积公式：

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$

$= \frac{abc}{4R} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$（$R$ 为外接圆半径）

$= \frac{1}{2}(a+b+c)r$（r 为内切圆半径）

3. 三角形形状的判断

如果 c 是三角形的最大边，则有：

$a^2 + b^2 > c^2 \Leftrightarrow$ 三角形 ABC 是锐角三角形

$a^2 + b^2 < c^2 \Leftrightarrow$ 三角形 ABC 是钝角三角形

$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow$ 三角形 ABC 是直角三角形

思维规律解读

增设参数在解三角形中的应用

（江苏　宋振苏）

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 2, AC = 3$，点 D 是边 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} =$ ________.

【分析】 本题若直接解答似乎难以下手求解，这里若增设参数 x, y，设 $\triangle ABC$ 中的线段 $AD = y, BD = DC = x$，可得如下简解：

【解答】 如图 1－1，因点 D 是边 BC 的中点，连结 AD，设 $AD = y, BD = DC = x$，记 $\angle ADB = \theta$，则 $\angle ADC = \pi - \theta$，注意到 $AB = 2, AC = 3$，所以在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，分别运用余弦定理可得：$2^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta, 3^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\pi-\theta)$ 将以上两式两边分别相减可得：$4xy\cos\theta = 5$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC} = 2xy\cos\theta = \frac{5}{2}$.

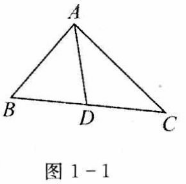

图 1－1

例 2　在 $\triangle ABC$ 中，$\tan A = \frac{1}{4}, \tan B = \frac{3}{5}$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若 $\triangle ABC$ 最大边的边长为 $\sqrt{17}$，求最小边的边长.

【分析】 本题直接运用两角和的正切公式及正弦定理可以求解，但较为繁琐，这里若过点 C 作 $CD \perp AB$，垂足为 D，并增设参数 k，使 $CD = 3k(k > 0)$，可得如下简解：

【解答】（1）如图 1－2，过 $\triangle ABC$ 的顶点 C 作 $CD \perp AB$，垂足为 D，设 $CD = 3k(k > 0)$，则 $AD = 12k, BD = 5k$，进而可得 $AC = 3\sqrt{17}k, BC = \sqrt{34}k$.

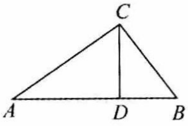

图 1－2

由余弦定理得：

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC\cdot BC} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $C = \frac{3\pi}{4}$.

（2）由（1）知 $AB > AC > BC$，则 $AB = 17k = \sqrt{17}$，故 $k = \frac{1}{\sqrt{17}}$，所以最小边为 $BC = \sqrt{34}k = \sqrt{34}\times\frac{1}{\sqrt{17}} = \sqrt{2}$.

例 3　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = 5$，$\cos\angle ABC = \frac{1}{7}$，$AC$ 边上的中线 $BD = \sqrt{21}$，试求 $\triangle ABC$ 的内角 A.

【分析】 本题若直接解答似乎难以下手求解，其实这里若增设参数 x, y，使 $\triangle ABC$ 中的 $AC = 2x, BC = y$，可得如下简解：

【解答】 如图 1-3,因为点 D 是边 AC 的中点,连结 BD,设 $AC=2x$,$BC=y$,则 $AD=DC=x$,若记 $\angle ADB=\theta$,则 $\angle BDC=\pi-\theta$,注意到 $AB=5$,因此在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中,分别运用余弦定理可得:

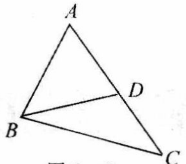

图 1-3

$5^2=x^2+BD^2-2xBD\cos\theta$;

$y^2=x^2+BD^2-2xBD\cos(\pi-\theta)$,

将以上两式两边分别相加可得:

$y^2+25=2x^2+42$;又因 $\cos\angle ABC=\dfrac{1}{7}$,

故在 $\triangle ABC$ 中应用余弦定理可得:$4x^2=25+y^2-2\times 5y\cos\angle ABC$,即 $4x^2=25+y^2-\dfrac{10}{7}y$,

结合 $y^2+25=2x^2+42$ 消去 x^2 并整理得,

$7y^2+10y-7\times 59=0$,

解之得:$y=7$,$y=-\dfrac{59}{7}$(舍去),

将 $y=7$ 代入 $y^2+25=2x^2+42$ 可得:$x=4$,

所以由余弦定理得:

$49=64+25-2\times 5\times 8\cos A$,

得 $\cos A=\dfrac{1}{2}$,

故所求 $\triangle ABC$ 的内角 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

点评:从以上几例的解析可以看出,解答某些解三角形问题时,可依据题设条件适时增设参变量,借助解三角形的有关工具构建方程或方程组,通过解出这些参变量或不解出而整体代换,可使这些问题简捷、巧妙地获解,品味这些问题的解答过程,进一步体验和感悟数学中的参数思想、方程思想、设而不求与整体代换等数学思想的灵魂和真正内涵.

"三类"应用问题解析 (湖北 张大任)

1. 求距离问题

例 4 某轮船以 30 海里 / 小时的速度航行,在 A 点测得灯塔 M 在南偏东 60°,向北航行 40 分钟后到 B 点,测得灯塔在南偏东 30°,如果轮船改为北偏东 60° 的航向再行驶 80 分钟到达 C 点,求 M,C 两点间的距离.

【分析】 据题意作出图形(如图 1-4),在 $\triangle ABM$ 中,找出各已知边与角,利用正弦定理求 BM,然后在 $\mathrm{Rt}\triangle BCM$ 中,利用勾股定理求解 MC.

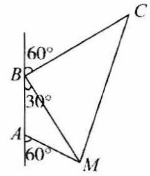

图 1-4

【解答】 已知在 $\triangle ABM$ 中,

$AB=30\times\dfrac{40}{60}=20$,

$\angle AMB=30°$,$\angle BAM=120°$,

由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin\angle AMB}=\dfrac{BM}{\sin\angle BAM}$,

即 $\dfrac{20}{\sin 30°}=\dfrac{BM}{\sin 120°}$. 解得 $BM=20\sqrt{3}$.

因为在 $\triangle BCM$ 中,$BC=30\times\dfrac{80}{60}=40$,$\angle CBM=90°$,

所以由勾股定理得

$MC=\sqrt{BM^2+BC^2}=\sqrt{(20\sqrt{3})^2+40^2}=20\sqrt{7}$.

故 M,C 两点间的距离为 $20\sqrt{7}$ 海里.

点评:解决本题的关键在于如何把实际问题转化为解斜三角形问题(即建立数学模型),这也是应用题的难点所在.

2. 求高度问题

例 5 为测量建造中的奥运会体育馆已到达的高度,张明在附近找了 A,B,C 三点,$AB=BC=60$ 米,且在 A,B,C 三点观测该馆的最高点,测得仰角分别为 45°,54.2°,60°. 已知张明身高为 1.7 米,试求建造的体育馆已到达的高度(结果保留一位小数).

【分析】 根据题意画出示意图,如图 1-5 所示,设 $DE=x$,则 AE,BE,CE 都可用 x 来表示,在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCE$ 中同时用余弦定理列出方程,便可求出 x.

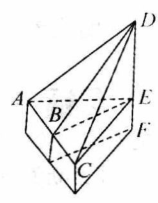

图 1-5

【解答】 设体育馆高 $DF=h$,$DE=x$,则 $h=x+1.7$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$,$\mathrm{Rt}\triangle BED$,$\mathrm{Rt}\triangle CED$ 中,

$AE=DE\cdot\cot 45°=x$;

$BC=DE\cdot\cot 54.2°=x\cdot\cot 54.2°$;

$CD=DE\cdot\cot 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ACE$ 中，由余弦定理得

$$\cos\angle BCE=\frac{BC^2+CE^2-BE^2}{2BC\cdot CE}$$

$$=\frac{AC^2+CE^2-AE^2}{2AC\cdot CE}$$

即 $\dfrac{60^2+\dfrac{x^2}{3}-(x\cot 54.2^\circ)^2}{2\times 60\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}x}$

$$=\frac{120^2+\dfrac{x^2}{3}-x^2}{2\times 120\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}x},$$

解得 $x\approx 156.75$，故 $h=158.5$（米）.

故建造中的体育馆现在已大约达到 158.5 米.

点评：在解决斜三角形问题时，要注意仰角、俯角等名词，并准确地找出这些角. 仰角或俯角：与目标视线在同一铅垂平面内的水平视线上方时叫仰角，目标视线在水平视线下方时叫俯角.

3. 航海中方位角问题

例 6 在海岸 A 处，发现北偏东 45° 方向，距 $A(\sqrt{3}-1)$nmile 的 B 处有一艘走私船，在 A 处北偏西 75° 方向，距 A 2nmile 的 C 处的缉私船奉命以 $10\sqrt{3}$nmile/h 的速度追从 B 处向北偏东 30° 方向逃窜的走私船. 走私船速度 10nmile/h. 问缉私船怎样才能最快追上走私船？并求出所需要的时间.

【分析】 由题意，先作出如图 1-6 所示的方位图形.

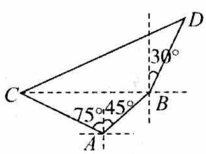

图 1-6

【解答】 设缉私船追上走私船所需时间为 t h，则有 $CD=10\sqrt{3}t$，$BD=10t$.

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{3}-1$，$AC=2$，

$\angle BAC=45^\circ+75^\circ=120^\circ$，

根据余弦定理 $BC=$

$\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-2\times 2\times(\sqrt{3}-1)\cos 120^\circ}$

$=\sqrt{6}$.

根据正弦定理得

$$\sin\angle ABC=\frac{AC\cdot\sin 120^\circ}{BC}=\frac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以 $\angle ABC=45^\circ$，

而 $\angle CBD=90^\circ+30^\circ=120^\circ$.

在 $\triangle BCD$ 中，根据正弦定理

$$\sin\angle BCD=\frac{BD\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\frac{10t\cdot\sin 120^\circ}{10\sqrt{3}t}$$

$=\dfrac{1}{2}$，所以 $\angle BCD=30^\circ$，$\angle BDC=30^\circ$.

所以 $BD=BC=\sqrt{6}$，则有 $10t=\sqrt{6}$，

$t=\dfrac{\sqrt{6}}{10}=0.245\ \text{h}=14.7\ \text{min}$.

所以缉私船沿北偏东 60° 方向，需 14.7 min 才能追上走私船.

点评：正确掌握方位角的概念，会识图作图，才能求解此类问题.

正余弦定理及其变形的应用策略

（山东　胡大波）

1. 观察式子的特征，直接应用正、余弦定理解题

在已知条件中，往往含有选用正、余弦定理的蛛丝马迹，充分识别这些信息，有助于寻找解题的途径.

例 7 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\dfrac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$，$\sin A\sin B=\dfrac{3}{4}$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【分析】 通过观察已知式子，可以看出与余弦定理有关，设法把边的关系转化为角的关系，从而把角 C 求出，使问题得以解决.

【解答】 由 $\dfrac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$，

得 $a^3+b^3-c^3=(a+b)c^2-c^3$.

即 $a^2-ab+b^2=c^2$.

所以 $a^2+b^2-c^2=ab$.

所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，

可得 $C=\dfrac{\pi}{3}$. 从而 $A+B=\dfrac{2\pi}{3}$.

又 $\sin A\sin B=\dfrac{3}{4}$，

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

则 $-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{3}{4}$，

所以 $\cos(A-B)=1$. 所以 $A=B=\frac{\pi}{3}$.

故 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

点评：若题目中含有 $a^2-ab+b^2=c^2$ 或其变形式子往往可以应用余弦定理求解.

2. 应用正、余弦定理的变形解题

正余弦定理有一些重要的变形，如正弦定理的变形有：$\frac{a}{2R}=\sin A$；$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R$ 等. 余弦定理的变形有：$\left(\frac{a}{b}\right)^2=1+\left(\frac{c}{b}\right)^2-2\cdot\frac{c}{b}\cdot\cos A$；$\left(\frac{b}{c}\right)^2=1+\left(\frac{a}{c}\right)^2-2\cdot\frac{a}{c}\cdot\cos B$ 等. 若已知三角形两边之比及其夹角，用此变式往往可以快速求解.

例 8 已知 A,B,C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，它们的对边分别是 a,b,c，且 $B=\frac{1}{2}(A+C)$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，求此三角形三个内角的度数.

【解答】 因为 $B=\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}(180°-B)$，

所以 $B=60°$.

而 $\left(\frac{b}{a}\right)^2=1+\left(\frac{c}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}\cdot\cos B=\frac{3}{2}$.

又由正弦定理得 $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}=\sqrt{\frac{3}{2}}$，

可得 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $A=45°$ 或 $A=135°$（不合题意舍去）.

所以 $C=180°-45°-60°=75°$.

故三角形的三个内角分别是 $45°,60°,75°$.

3. 灵活应用正、余弦定理，联袂求解问题

有一些三角问题需要综合应用正余弦定理求解，由余弦定理有：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，根据正弦定理有：$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$，将后者代入前者得：$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C\cos A$. 此式反映了三角形的三个内角所满足的一种关系. 应用它可以解决三角求值问题.

例 9 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $a^2+b^2=2005c^2$，试求 $\dfrac{\frac{1}{\tan C}}{\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}}$ 的值.

【解答】 依题设并结合正弦定理，得

$\sin^2A+\sin^2B=2005\sin^2C$.

又 $\sin^2C=\sin^2A+\sin^2B-2\sin A\sin B\cos C$，

所以 $\sin^2C=2005\sin^2C-2\sin A\sin B\cos C$.

即 $\sin A\sin B\cos C=1002\sin^2C$.

$$原式=\frac{\frac{\cos C}{\sin C}}{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}}$$

$$=\frac{\sin A\sin B\cos C}{\sin C(\cos A\sin B+\sin A\cos B)}$$

$$=\frac{\sin A\sin B\cos C}{\sin C\sin(A+B)}$$

$$=\frac{\sin A\sin B\cos C}{\sin^2C}=1002.$$

正、余弦定理中数学思想的渗透

（山东　仇玲）

1. 化归与转化思想

例 10 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $(a^2+b^2)\cdot\sin(A-B)=(a^2-b^2)\cdot\sin(A+B)$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【解答】 由 $(a^2+b^2)\cdot\sin(A-B)=(a^2-b^2)\cdot\sin(A+B)$ 得

$a^2[\sin(A-B)-\sin(A+B)]+b^2[\sin(A-B)+\sin(A+B)]=0$.

所以 $a^2\cos A\sin B=b^2\sin A\cos B$.

解法一： 由正弦定理，得

$\sin^2A\cos A\sin B=\sin^2B\sin A\cos B$.

即 $\sin A\sin B(\sin 2A-\sin 2B)=0$.

因为在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A\sin B\neq 0$，

所以 $\sin 2A-\sin 2B=0$.

又因为 $0<A,B<\pi$，

所以 $A+B=90°$ 或 $A=B$.

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

解法二： 由正弦定理和余弦定理，得

$a^2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot b=b^2\cdot a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

化简得 $a^4-a^2c^2+b^2c^2-b^4=0$.

所以$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$.

所以$a=b$或$a^2+b^2=c^2$.

故$\triangle ABC$是等腰三角形或直角三角形.

点评：已知三角形的边角关系判断三角形形状时，一般采用化归与转化的思想：化边为角(如解法1)或化角为边(如解法2)，其中要以正弦定理和余弦定理作为桥梁来实现这两种转化.

2. 方程思想

例 11 如图 1-7，D是直角$\triangle ABC$斜边BC上一点，$AB=AD$，记$\angle CAD=\alpha$，$\angle ABC=\beta$.

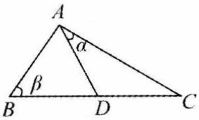

图 1-7

(1) 证明：$\sin\alpha+\cos2\beta=0$；

(2) 若$AC=\sqrt{3}DC$，求β的值.

【解答】 (1) 因为$\alpha=\frac{\pi}{2}-\angle BAD=\frac{\pi}{2}-(\pi-2\beta)=2\beta-\frac{\pi}{2}$，

所以$\sin\alpha=\sin(2\beta-\frac{\pi}{2})=-\cos2\beta$.

即$\sin\alpha+\cos2\beta=0$.

(2) 在$\triangle ADC$中，由正弦定理，得

$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin(\pi-\beta)}$. 即$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}DC}{\sin(\pi-\beta)}$，

所以$\sin\beta=\sqrt{3}\sin\alpha$.

又由(1)可知：$\sin\alpha=-\cos2\beta$，

所以$\sin\beta=-\sqrt{3}\cos2\beta=-\sqrt{3}(1-2\sin^2\beta)$，

即$2\sqrt{3}\sin^2\beta-\sin\beta-\sqrt{3}=0$.

解得$\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，故$\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而$\beta=\frac{\pi}{3}$.

点评：第(2)问借助正弦定理得到“$\sin\beta=\sqrt{3}\sin\alpha$”，结合第(1)问的结论消去$\alpha$角，把问题转化为关于$\sin\beta$的一元二次方程，通过解方程求得. 此题灵活运用了消元思想和方程思想.

3. 分类讨论思想

例 12 如图 1-8，有两条相交成60°的直线xx'，yy'，其交点为O，甲、乙两辆汽车分别在xx'，Oy'上行驶，起初甲离O点 30 km，乙离O点 10 km，后来两车均用 60 km/h 的速度，甲沿xx'方向，乙沿yy'方向行驶(设甲、乙两车最初的位置分别为A，B).

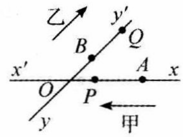

图 1-8

(1) 起初两车的距离是多少？

(2) 用包含t的式子表示，t小时后两车的距离是多少？

【解答】 (1) 由余弦定理，知

$$AB^2=OA^2+OB^2-2\times OA\times OB\times\cos60^\circ$$
$$=30^2+10^2-2\times30\times10\times\frac{1}{2}=700.$$

故$AB=10\sqrt{7}$(km).

即起初两车的距离是$10\sqrt{7}$ km.

(2) 设甲、乙两车t小时后的位置分别为P，Q，则$AP=60t$，$BQ=60t$.

① 当$0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$时，$\angle POQ=60^\circ$.

此时$OP=30-60t$，$OQ=10+60t$.

由余弦定理，得

$$PQ^2=(30-60t)^2+(10+60t)^2-2\times(30-60t)(10+60t)\cos60^\circ$$
$$=10\,800t^2-3\,600t+700.$$

② 当$t>\frac{1}{2}$时，$\angle POQ=120^\circ$.

此时$OP=60t-30$，$OQ=10+60t$.

由余弦定理，得

$$PQ^2=(60t-30)^2+(10+60t)^2-2\times(60t-30)(10+60t)\cos120^\circ$$
$$=10\,800t^2-3\,600t+700.$$

综上知$PQ^2=10\,800t^2-3\,600t+700$.

则$PQ=10\sqrt{108t^2-36t+7}$.

故t小时后两车的距离是

$PQ=10\sqrt{108t^2-36t+7}$(km).

点评：本题是一个解三角形的实际问题，由于两车的行驶方向导致以O点为起点的两线段的夹角发生变化，因此必须对两种情况进行分类讨论.

有关解三角形的创新题（湖北　张大任）

1. 探究型创新题

例 13 有一解三角形的题因纸张破损有一个条件不清，具体如下：在$\triangle ABC$中，已知$a=\sqrt{3}$，$B=45^\circ$，____________，求角A. 经推断破损处的条件为三角形一边的长度，且答案提示$A=60^\circ$，请直接在题中横线上将条件补充完整.

【解析】 由正弦定理，得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

即$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}$，得$b=\sqrt{2}$.

由余弦定理，得

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2+c^2-3}{2\times\sqrt{2}\cdot c}=\dfrac{1}{2}$，

可求出$c=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$. 故填$c=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

点评：此题属于条件探究型问题，运用正弦定理、余弦定理求解问题.

2. 开放型创新题

例 14 三角形ABC的三个内角A,B,C的对边的长分别为a,b,c，有下列两个条件：(1)a,b,c成等差数列；(2)a,b,c成等比数列.

现给出三个结论：

(1)$0<B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$；

(2)$a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}$；

(3)$1<\dfrac{1+\sin 2B}{\cos B+\sin B}\leqslant\sqrt{2}$.

请你选取给定的两个条件中的一个为条件，三个结论中的两个为结论，组建一个你认为正确的命题，并证明之.

【解答】 三角形ABC的三个内角A,B,C的对边的长分别为a,b,c，若a,b,c成等差数列，则$0<B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$且$a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}$.

证明如下：

因为a,b,c成等差数列，所以$b=\dfrac{a+c}{2}$.

所以$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2}{2ac}$

$=\dfrac{3(a^2+c^2)-2ac}{8ac}\geqslant\dfrac{6ac-2ac}{8ac}=\dfrac{1}{2}$.

当且仅当$a=c$时，取等号.

角B是三角形ABC的一个内角，

所以$0<B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$.

又因为$a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}$

$=a\cdot\dfrac{1+\cos C}{2}+c\cdot\dfrac{1+\cos A}{2}$

$=\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{a\cos C+c\cos A}{2}$

$=\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{b}{2}=\dfrac{3b}{2}$.

所以$a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}$.

点评：由于题目要求："选取给定的两个条件中的一个为条件，三个结论中的两个为结论的一个正确命题"，所以本题应该有6种组建方案，需分别讨论其是否正确，因此本题的答案不唯一.

3. 跨学科型创新题

例 15 一束光线与玻璃成45°角，穿过折射率为1.5，厚度为1 cm的一块玻璃，那么光线在玻璃内的行程是________ cm.

【解析】 根据题意画出图形，如图1－9所示.

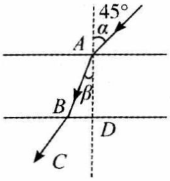

图 1－9

因为$\alpha=45^\circ$，

所以$1.5=\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin\beta}$.

所以$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

又$\cos\beta=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{AB}$，

所以$AB=\dfrac{1}{\cos\beta}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$ (cm).

点评：本题与物理光学折射定理有关，解决问题的关键是根据条件构造数学模型，利用数学知识求解.

高考命题透视（广东　许少华　邱金龙）

1. 求三角形的边与角

例 16 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $a=1,c=\sqrt{3},C=\frac{\pi}{3}$，则 $A=$ ______.

【解析】 本题已知两边的长，及边 c 的对角，求另一边所对的角，可用正弦定理.

由正弦定理，得：

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$，

解得 $\sin A=\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，

但因为 $C=\frac{\pi}{3}$，故 $A=\frac{5\pi}{6}$ 不合题意，

所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

点评：由于一个角及它的补角的正弦值是一样的，所以解题时应注意验根，防止三角形的内角和大于 180°，另外，本题若求角 B，也应先求 A，再由内角和定理求 B.

2. 已知一边两角，解三角形

例 17 在 $\triangle ABC$ 中，已知内角 $A=\frac{\pi}{3}$，边 $BC=2\sqrt{3}$. 设内角 $B=x$，周长为 y. 求函数 $y=f(x)$ 的解析式和定义域.

【分析】 由角 A,B 及三角形内角和定理，角 C 也可以求出，知道了一边长，其余两边长可求，周长的解析式可求.

【解答】 $A+B+C=\pi$，由 $A=\frac{\pi}{3},B>0$，$C>0$，得 $0<x<\frac{2\pi}{3}$，$C=\frac{2\pi}{3}-x$.

由正弦定理得

$AB=\frac{BC}{\sin A}\sin C=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$，

$AC=\frac{BC}{\sin A}\sin B=4\sin x$，

因为 $y=AB+BC+AC$，

所以 $y=4\sin x+4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+2\sqrt{3}\left(0<x<\frac{2\pi}{3}\right)$.

点评：本题虽然不全是用数字来求解，有一定难度，但熟练掌握好正弦定理，求解也就容易了.

3. 已知三边，解三角形

例 18 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{2}+1$，且 $\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$.

(1) 求边 AB 的长；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{6}\sin C$，求角 C 的度数.

【分析】 由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ 变形得：$\sin A=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}$，可将已知式子转化为边长之间的关系，第(2)问中由三边长之间的关系求角，应用余弦定理.

【解答】 (1) 由题意得 $AB+BC+AC=\sqrt{2}+1$，

由 $\sin A+\sin B=\sqrt{2}\sin C$ 及正弦定理，得：

$BC+AC=\sqrt{2}AB$，

两式相减，得 $AB=1$.

(2) 由 $\triangle ABC$ 的面积 $\frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin C=\frac{1}{6}\sin C$，得 $BC\cdot AC=\frac{1}{3}$，

又由余弦定理得：

$$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}$$
$$=\frac{(AC+BC)^2-2AC\cdot BC-AB^2}{2AC\cdot BC}$$
$$=\frac{1}{2},$$

所以 $C=60°$.

点评：通过正弦定理公式的变形，可将边的关系转化为角的关系，或将角的关系转化为边的关系，体现了数学上的转化思想.

4. 求三角形的面积

例 19 在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别是三个内角 A,B,C 的对边. 若 $a=2,C=\frac{\pi}{4},\cos\frac{B}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

【解答】 由题意，得 $\cos B = 2\cos^2\frac{B}{2} - 1 = \frac{3}{5}$，则 B 为锐角，$\sin B = \frac{4}{5}$.

$\sin A = \sin(\pi - B - C)$

$= \sin\left(\frac{3\pi}{4} - B\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$，

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$，得 $c = \frac{10}{7}$.

所以 $S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{10}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{7}$.

点评：欲求面积，需求边长结合已知的角及余弦值利用正弦定理得到边长，从而使面积顺利求解.

5. 求范围与最值

例 20 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的直角坐标分别为 $A(3,4)$，$B(0,0)$，$C(c,0)$.

(1) 若 $c = 5$，求 $\sin A$ 的值；

(2) 若 A 是钝角，求 c 的取值范围.

【解答】 (1) 由于 $c = 5$，

则 $\triangle ABC$ 三个顶点的直角坐标分别为 $A(3,4)$，$B(0,0)$，$C(5,0)$.

那么 $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$，$BC = 5$，$AC = \sqrt{(3-5)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

由余弦定理，得 $\cos A = \frac{5^2 + (2\sqrt{5})^2 - 5^2}{2 \times 5 \times 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 从而 $\sin A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2) 若 A 为钝角，由于 $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$，$BC = |c|$，$AC = \sqrt{(3-c)^2 + 4^2}$，

则 $5^2 + (3-c)^2 + 4^2 - c^2 < 0$，从而 $c > \frac{25}{3}$.

故 c 的取值范围为 $\left(\frac{25}{3}, +\infty\right)$.

点评：此题主要考查余弦定理在三角形中的基本应用，首先利用两点间的距离公式产生三边的长，然后再利用余弦定理. 第二问稍有难度，建立在余弦定理的基础上产生不等式，通过不等式产生结论.

6. 实际应用举例

例 21 如图1－10，甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方航行，乙船按固定方向匀速直线航行，当甲船位于 A_1 处时，乙船位于甲船的北偏西 $105°$ 方向的 B_1 处，此时两船相距 20 海里，当甲船航行 20 分钟到达 A_2 处时，乙船航行到甲船的北偏西 $120°$ 方向的 B_2 处，此时两船相距 $10\sqrt{2}$ 海里，问乙船每小时航行多少海里？

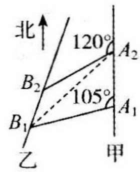

图 1－10

【分析】 连结 A_1B_2，构造三角形，可求出 A_1B_2，在 $\triangle A_1B_2B_1$ 中，知道两边 A_1B_2，A_1B_1 及其夹角，可由余弦定理求得 B_1B_2，则乙船速度可求.

【解答】 连结 A_1B_2，由已知 $A_2B_2 = 10\sqrt{2}$，$A_1A_2 = 30\sqrt{2} \times \frac{20}{60} = 10\sqrt{2}$，

所以 $A_1A_2 = A_2B_2$，

又 $\angle A_1A_2B_2 = 180° - 120° = 60°$，

所以 $\triangle A_1A_2B_2$ 是等边三角形，

所以 $A_1B_2 = A_1A_2 = 10\sqrt{2}$，

由已知 $A_1B_1 = 20$，

$\angle B_1A_1B_2 = 105° - 60° = 45°$，

在 $\triangle A_1B_2B_1$ 中，由余弦定理有：

$B_1B_2^2 = A_1B_1^2 + A_1B_2^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1B_2 \cdot \cos 45°$

$= 20^2 + (10\sqrt{2})^2 - 2 \times 20 \times 10\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 200$.

所以 $B_1B_2 = 10\sqrt{2}$.

因此，乙船的速度大小为

$\frac{10\sqrt{2}}{20} \times 60 = 30\sqrt{2}$(海里 / 小时).

点评：本题是一道应用题，正弦定理、余弦定理在实际问题中的应用是非常广泛的，应用余弦定理的特征就是知道两边及其夹角求其他.

思维误区破解

（山东　李国锋　马继峰）

1. 因忽视边角关系而致错

例 1 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A=60°$，$a=\sqrt{6}$，$b=2$，则角 $B=$ ________.

【错解】在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，可得

$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{2\sin 60°}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $B=45°$ 或 $B=135°$.

【剖析】上述错解中的错误十分明显，若 $B=135°$，则 $A+B=195°>180°$，故 $B=135°$ 不适合题意，是个增解．这个增解产生的根源是忽视了 $a>b$ 这一条件，根据三角形的边角关系，角 B 应小于角 A，故 $B=135°$ 应舍去.

【正解】在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得

$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{2\sin 60°}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $a>b$，所以 $A>B$，所以 $B=45°$.

点评：已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角时，一定要注意根据边角关系，确定适合题意的角是一个还是两个.

2. 因忽视角的关系而致错

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，$\tan A=a^2$，$\tan B=b^2$，那么 $\triangle ABC$ 是　　(　　)

A. 锐角三角形

B. 直角三角形

C. 等腰三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

【错解】由 $\tan A=a^2$，$\tan B=b^2$ 得

$\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{a^2}{b^2}$，即 $\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$，

所以 $\dfrac{\cos B}{\cos A}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$，

所以 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

所以 $\sin 2A=\sin 2B$，所以 $A=B$.

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，选(C).

【剖析】上述错解忽视了满足 $\sin 2A=\sin 2B$ 的另一个角之间的关系：$2A+2B=180°$.

【正解】由 $\tan A=a^2$，$\tan B=b^2$

得 $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{a^2}{b^2}$，即 $\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$，

所以 $\dfrac{\cos B}{\cos A}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$，

所以 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

所以 $\sin 2A=\sin 2B$，

所以 $A=B$ 或 $A+B=90°$.

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形，选 D.

点评：判断三角形形状时，一定要把边或角的关系考查周全，避免遗漏.

3. 因忽视角的范围而致错

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，若 $A=2B$，求 $\dfrac{a}{b}$ 的取值范围.

【错解】在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，可得

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin 2B}{\sin B}=\dfrac{2\sin B\cos B}{\sin B}=2\cos B$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $-1<\cos B<1$，

所以 $-2<2\cos B<2$，又 $\dfrac{a}{b}>0$，

所以 $0<2\cos B<2$，

所以 $\dfrac{a}{b}$ 的取值范围是 $(0,2)$.

【剖析】上述错解忽视了根据已知条件 $A=2B$ 进一步考查角 B 的取值范围.

【正解】在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，可得

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin 2B}{\sin B}=\dfrac{2\sin B\cos B}{\sin B}=2\cos B$，

因为 $A=2B$，$A+B<\pi$，所以 $0<B<\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $\dfrac{1}{2}<\cos B<1$，所以 $1<2\cos B<2$，

所以 $\dfrac{a}{b}$ 的取值范围是 $(1,2)$.

点评：对于三角形的内角，一定要注意根据三角形内角和定理准确限定角的取值范围.

4. 因忽视隐含条件而致错

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=4+b$，$a+c=2b$，最大角为 $120°$，求最大边长.

【错解】由 $\begin{cases}a-b=4,\\a+c=2b\end{cases}$ 可得 $b-c=4$，

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com