高中
数学基础知识

江苏教育出版社

GAOZHONG

Shuxue

JICHUZHISHI

高中数学基础知识

赵振威 主编

江 苏 教 育 出 版 社

编者的话

为了帮助高中学生有针对性地学习中学数学，更好地掌握数学基础知识，增强计算能力，发展逻辑思维能力和空间想象能力，有效地扩大学习效果，我们根据高中数学教学大纲，将现行中学数学教材，进行系统的加工和整理，编写了这本《高中数学基础知识》。

全书根据中学数学知识的内在联系，分成初等代数、平面三角、综合几何、解析几何和综合训练等五篇，前四篇有重点地总结了各科的基础知识和基本技能；第五篇，通过若干典型例题的求解，沟通了各科间的纵横联系。各篇在编写时力求做到注重基础，突出重点；主线分明，条理清楚；例选精当，构思活泼；深入浅出，富于启发。

各章都安排了一定数量的练习题，供读者练习和思考。其中，A组为基本题，用于理解基础知识，熟悉基本方法；B组为综合题，结构比较活泼，有一定的难度，用来训练创造性思维。每章还设计了一份自我测验题，可用于检验各章的学习效果。

本书由赵振威副教授主编，执笔编写的有赵振威（第一篇），沈培华（第二篇），席振伟（第三篇），金家梁、周鼎耦（第四篇），张枫森（第五篇）。由于时间匆促，水平有限，缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

一九八五年二月

目　录

第一篇 初等代数

代数是中学数学的主干课程，主要研究数和数量间的关系。中学代数教材，大体上是以数、式、方程、函数为主线，采取相互更替、相互交错的方式展开的。为了便于复习，我们把代数部分的内容分成数的概念、式的运算、方程和方程组、不等式、函数、数列与极限、排列、组合与二项式定理等七章进行讨论。

第一章 数的概念

数是各种具体的量的抽象。中学里所学的各种数，可以归纳为下表：

- 复数（$a+bi$，a、$b \in R$）
  - 实数（$b=0$）
    - 有理数
      - 正有理数
        - 正整数（自然数）
        - 正分数
          - 正有限小数
          - 正无限循环小数
      - 非正非负的有理数——零
      - 负有理数
        - 负整数
        - 负分数
          - 负有限小数
          - 负无限循环小数
    - 无理数
      - 正无理数——正无限不循环小数
      - 负无理数——负无限不循环小数
  - 虚数（$b \neq 0$）
    - 纯虚数（$a=0$，$b \neq 0$）
    - 非纯虚数（$a \neq 0$，$b \neq 0$）

一、集　　合

1.集合的基本概念

（1）集合与元素．一组对象的全体形成一个集合，集合里的各个对象就是这个集合的元素．通常，用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示元素．

在数学中，一般约定用下列字母表示相应的数集：

N——自然数集；　　Z——整数集；

Q——有理数集；　　$\overline{Q}$——无理数集；

R——实数集；　　C——复数集．

为了方便起见，有时还常用Q^+表示正有理数集，R^-表示负实数集，$\overline{\overline{R^-}}$表示非负实数集，等等．

元素同集合的关系是属于或不属于．如果a是集合A的元素，就说a属于集合A，记作$a\in A$；如果b不是集合A的元素，就说b不属于A，记作$b\notin A$（或$b\overline{\in}A$）．

（2）集合的表示方法．集合的表示方法，常用的有列举法和描述法两种．列举法可以直观地看清集合的元素；描述法则刻划了元素的共同特征．例如，方程$x^2+x-2=0$的解集M，在求解方程之前，可用描述法表示：$M=\{x\,|\,x^2+x-2=0\}$；求出这个方程的解（$x_1=1$，$x_2=-2$）以后，则可用列举法表示：$M=\{1, -2\}$．

（3）有限集与无限集．只含有有限个元素的集合叫做有限集．含有无限多个元素的集合叫做无限集．不含任何元素的集合叫做空集，用丹麦字母φ（读作"欧"）表示．

2.两集合之间的关系

（1）子集．对于两个集合A与B，如果集合A的任何一

个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作$A\subseteq B$（或$B\supseteq A$）。

如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作$A\subset B$（或$B\supset A$）。

（2）集合的相等．对于两个集合A与B，如果$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，那么集合A与集合B叫做相等，记作$A=B$。

3.集合的运算

（1）交集．设A，B是两个集合，由既属于A又属于B的所有元素组成的集合，叫做A与B的交集，记作$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

（2）并集．设A，B是两个集合，由属于A或属于B的所有元素组成的集合，叫做A与B的并集，记作$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

（3）补集．与所要考察的问题有关的全部元素组成的集合，叫做全集，用符号I表示．已知全集I，集合$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集，记作$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x\mid x\in I\text{ 且 }x\notin A\}$$

例1 设$M=\{a\mid a=x^2-y^2,\ x,\ y\in Z\}$。

（1）整数8、9、10是否属于M？

（2）证明一切奇数都属于M。

解 （1）$\because\quad 8=3^2-1^2,\qquad 9=5^2-4^2,$

$$\therefore\quad 8\in M,\qquad 9\in M.$$

$10\notin M$，这是因为10不能表为两整数的平方差．事实上，假设$10=x^2-y^2$（$x,\ y\in Z$），则

$$(|x|+|y|)(|x|-|y|)=10.$$

且 $|x|+|y|>|x|-|y|>0$。

注意到 $10=1\times10=2\times5$，有

$$\begin{cases}|x|+|y|=10,\\|x|-|y|=1;\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}|x|+|y|=5,\\|x|-|y|=2.\end{cases}$$

显然，上面两个方程组都没有整数解。所以，不存在整数x、y，使 $10=x^2-y^2$。

（2）设任意奇数为 $2n+1$（$n\in Z$），则恒有

$2n+1=(n+1)^2-n^2$，　∴ $(2n+1)\in M$。

例2 设 $x\in N$，用列举法表示下列各式的结果：

（1）$\{x|x<4\}\cap\{x|2\leqslant x<5\}\cap\{x|x>3\}$；

（2）$\{x|x\leqslant2\}\cup\{x|1<x<5\}\cup\{x|x<7\}$。

解（1）原式 $=\{1,2,3\}\cap\{2,3,4\}$
$\cup\{4,5,6,\cdots\}=\phi$。

（2）原式 $=\{1,2\}\cup\{2,3,4\}$
$\cap\{1,2,3,4,5,6\}$
$=\{1,2,3,4,5,6\}$。

例3 设 $I=\{x|2\leqslant x\leqslant10,\ x\in N\}$，

A＝{不大于8的正偶数}，

B＝{一位正素数}。

求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cup B}$。

解 $I=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，

$A=\{2,4,6,8\}$，$B=\{2,3,5,7\}$。

∴ $\overline{A}=\{3,5,7,9,10\}$；

$\overline{B}=\{4,6,8,9,10\}$；

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{9,10\}$；

$\overline{A\cup B}=\overline{\{2,3,4,5,6,7,8\}}=\{9,10\}$。

二、自 然 数 集

1.自然数的概念

自然数，即正整数，有

$$N=\{1,2,3,\cdots\cdots\}.$$

任意一个自然数 $N=\overline{a_0a_1\cdots a_{n-1}a_n}$，都可用10的幂的多项式的形式来表示：

$$N=a_0\cdot10^n+a_1\cdot10^{n-1}+\cdots a_{n-1}\cdot10+a_n.$$

其中 $a_0\in\{1,2,\cdots,9\}$，$a_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$

$(i=1,2,\cdots,n)$.

自然数集具有以下性质：

（1）在自然数集中，有最小的数"1"，而无最大的数。

（2）有序性。任意两个自然数可以比较大小。

（3）封闭性。自然数集对于加法和乘法两种运算是封闭的。也就是说，在自然数集里，加法和乘法总能实施，两个自然数的和或者积，也总是自然数。

2.数学归纳法

数学归纳法渊源于自然数的性质，用于推证与自然数有关的命题。

用数学归纳法证明一个命题时，必须包括下面两个步骤：

第一步：验证当n取第一个值（例如n＝1或2等）时命题成立；

第二步：假设当n＝k（k∈N）时命题成立，证明当n＝k＋1时命题也成立。

完成了这两个步骤，就可断定命题对一切自然数都成立。

应用数学归纳法证明的命题，就其解题思路而论，大致有两种类型：

一是能直接应用归纳假设来证明的。这类问题大多是与自然数有关的恒等式、不等式，由递推关系确定的数列通项公式等。解题时通常在归纳假设的两边同加（或同乘）某项，通过适当变换完成证明。

二是不能直接应用归纳假设来证明的。这类命题有如数的整除性问题、某些绝对不等式、有关的几何问题等等。解题时一般通过下面两种途径，为应用归纳假设创造条件：（1）先将$n=k+1$代入原式，然后将所得表达式作适当的变换；（2）利用其它数学知识，建立P（k）（第k号命题）与P（k+1）（第k+1号命题）的联系。

例1 用数学归纳法证明：

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

证明 （1）当$n=1$时，有

$$左边=\frac{1^2}{1\cdot3}=\frac{1}{3};$$

$$右边=\frac{1\cdot(1+1)}{2(2\cdot1+1)}=\frac{1}{3}.$$

等式显然成立。

（2）假设当$n=k$时等式成立，就是

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

两边都加上 $\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$，得

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+3)+2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2[2(k+1)+1]}$$

这就是说，当$n=k+1$时等式也成立。

根据（1）和（2），对任意的自然数n，这个等式成立。

例 2 设n为任意自然数，求证：$f(n)=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$能被8整除。

证明 （1）当$n=1$时，$f(1)=5^1+2\cdot 3^{1-1}+1=8$，能被8整除，命题成立。

（2）假设当$n=k$时命题成立，即假设 $f(k)$ 能被8整除，则当$n=k+1$时，有

$$f(k+1)=5^{K+1}+2\cdot 3^K+1=5\cdot 5^K+6\cdot 3^{K-1}+1$$

$$=f(k)+4(5^K+3^{K-1}).$$

这里，5^K和3^{K-1}均为奇数，它们的和必为偶数，从而$4(5^K+3^{K-1})$应为8的倍数。又依归纳假设，$f(k)$能被8整除，所以$f(k+1)$能被8整除。这就是说，当$n=k+1$时，命题也

是成立的。

根据（1）和（2），命题成立。

例 3 试证：大于7的自然数均能表为若干个3与5的和。

证明 （1）当$n=8$时，$8=3+5$，命题显然成立。

（2）假设当$n=k$（$k\in N$，$k\geqslant 8$）时命题成立。这时k的组成有两种可能情形：①k全由3连加而得，则至少需要三个3（否则$3\times 2=6<8$）；② k不全由3连加而成，则其中至少有一个5。因此，当$n=k+1$时，若k属于情形①，只要把其中的三个3换成两个5，即得$k+1$；若k属于情形②，则把其中的一个5换成两个3，便得$k+1$.于是，归纳步骤得证。从而命题成立。

三、整 数 集

1.整数的概念

正整数、零、负整数总称为整数，即

$$Z=\{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$$

在许多实际问题的求解中，常常需要对整数进行适当分类。例如，按被2除所得余数来进行分类，整数可分为$2n$和$2n+1(n\in Z)$，即偶数和奇数两类；按被3除所得余数进行分类，整数可分为$3n$、$3n+1$、$3n-1$（$n\in Z$）三类。一般地，按被$k(k\in Z)$除所得余数进行分类，整数可分为

$$kn,\ kn\pm 1,\ kn\pm 2,\ \cdots,\ kn\pm\frac{k-1}{2}.$$

（k为奇数，$n\in Z$）

或 $$kn,\ kn\pm 1,\ kn\pm 2,\ \cdots,\ kn+\frac{k}{2}.$$

（k为偶数，$n\in Z$）

等k类。任何整数，可以而且仅可以表示为上述形式之一。

整数集具有以下性质：

（1）在整数集中，没有最小的数，也没有最大的数。

（2）有序性。任意两个整数可以比较大小。

（3）封闭性，整数集对于加法、减法、乘法三种运算都是封闭的。

2.整除问题

整除问题，是整数集中的一个重要问题。推证整除问题的基本思路，常用的有以下各种：

（1）利用数的整除性特征；

（2）应用数的整除性定理；

（3）结合运用多项式因式分解、二项式定理等代数知识；

（4）与自然数有关的问题，可以利用数学归纳法；

（5）直接证明有困难时，还可以考虑用反证法。

例 1 说明任何奇数可以表为$4n+1$，$4n-1$（$n\in Z$）两种形式之一。

解 奇数可表为$2k+1$（$k\in Z$），当k为偶数2n时，$2k+1=4n+1$；当k为奇数$2n-1$时，$2k+1=4n-1$。这就表明，任何奇数可表为$4n+1$，$4n-1$（$n\in Z$）两种形式之一。

例 2 设七位数$\overline{62ab427}$是99的倍数，求a和b。

解 因为$\overline{62ab427}$是99的倍数，所以它能被9和11整除。依数的整除性特征，有

$$6+2+a+b+4+2+7=9m,\ (m\in N)$$

$$(6+a+4+7)-(2+b+2)=11n.\ (n\in Z)$$

整理后得

$$a+b=9m-21,\quad a-b=11n-13.$$

注意到a、$b\in N$，且$0\leqslant a\leqslant 9$，$0\leqslant b\leqslant 9$，有

$$0\leqslant a+b\leqslant 18,\quad -9\leqslant a-b\leqslant 9.$$

即 $$0\leqslant 9m-21\leqslant 18,\quad -9\leqslant 11n-13\leqslant 9.$$

因此，$m=3$或$m=4$；而$n=1$或$n=2$。从而

$$a+b=6,\quad \text{或}\quad a+b=15;$$

$$a-b=-2,\quad \text{或}\quad a-b=9.$$

两相结合，可得四个二元一次方程组：

$$\begin{cases}a+b=6,\\ a-b=-2;\end{cases}\qquad \begin{cases}a+b=15,\\ a-b=-2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+b=6,\\ a-b=9;\end{cases}\qquad \begin{cases}a+b=15,\\ a-b=9.\end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases}a_1=2,\\ b_1=4;\end{cases}\qquad \begin{cases}a_2=\dfrac{13}{2},\\ b_2=\dfrac{17}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_3=\dfrac{15}{2},\\ b_3=-\dfrac{3}{2};\end{cases}\qquad \begin{cases}a_4=12,\\ b_4=3.\end{cases}$$

由于a，$b\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，则只有$a=2$，$b=4$才是原题的解。

例 3 设n为任意自然数，求 证：$f(n)=2n^3+3n^2+n$

能被6整除。

思考方法 这是一个与自然数有关的命题，原则上可用数学归纳法证明（留给读者）。如果注意到$f(n)$的特点，也可把它变形为两个连乘积之和，依连续整数乘积的性质推证。

证明 $f(n)=2n^3+3n^2+n=n(n+1)(2n+1)$

$$=n(n+1)[(n-1)+(n+2)]$$

$$=(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)。$$

注意到k个连续整数之积能被$k!$整除，所以$(n-1)n(n+1)$和$n(n+1)(n+2)$都能被$3!=6$整除，从而$f(n)$能被6整除。

例 4 设a是不能被5整除的整数，求证：a^2-1, a^2+1中有且只有一个能被5整除。

证明 依题设，a是不能被5整除的整数，可表为$5m\pm1$、$5m\pm2$（$m\in Z$）。

（1）若$a=5m\pm1$，则

$$a^2-1=(5m\pm1)^2-1=5m(5m\pm2).$$

$$\therefore\quad 5\mid(a^2-1).$$

而 $a^2+1=(5m\pm1)^2+1=25m^2\pm10m+2$。

显然它的末位数字是2或7，不可能被5整除。

（2）若$a=5m\pm2$，则

$$a^2+1=(5m\pm2)^2+1=5(5m^2\pm4m+1).$$

$$\therefore\quad 5\mid(a^2+1).$$

而 $a^2-1=(5m\pm2)^2-1=25m^2\pm20m+3$.

它的末位数字是3或8，不可能被5整除。

因此，只要a不是5的倍数，a^2-1，a^2+1中有且只

有一个被5整除。

四、有理数集

1.有理数的概念

整数、分数总称为有理数，即

$$Q=\{x \mid x=\frac{m}{n},\ n\in N,\ m\in Z\}.$$

任何分数都可以化成有限小数或无限循环小数；反之，任何有限小数和无限循环小数也都可以化成分数。所以，有限小数和无限循环小数都是有理数。

有理数集具有以下性质：

（1）在有理数集中，没有最小的数，也没有最大的数。

（2）有序性、任意两个有理数可以比较大小。

（3）稠密性。任意两个有理数之间，总存在着无穷多个有理数。例如，任意两个有理数a、b之间，就有其等差中项$\frac{a+b}{2}$．

（4）间断性。任意两个有理数之间，还有非有理数存在。例如，在1.4与1.5之间有$\sqrt{2}=1.414\cdots$。

（5）封闭性。有理数集对加法、减法、乘法、除法（除数不为零）这四种运算都是封闭的。

2.反证法

有关数的性质的证明题，当直接证明有困难时，可以采用反证法。

应用反证法证明数学命题时，一般分下面几个步骤：

第一步：分清命题“若A则B”的条件与结论；

第二步：作出与命题结论B相矛盾的假定$\overline{B}$；

第三步：由A和$\overline{\overline{B}}$出发，应用正确的推理方法，推出与已知公理、已知定义、已知定理、已知条件或所作假定相矛盾的结果；

第四步：断定产生矛盾结果的原因，在于开始所作的假定$\overline{\overline{B}}$不正确，于是原结论B成立，这就间接地证明了命题。

例 1 试证：$\log_2 5$不是有理数。

证明 依对数定义，有

$$\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8,$$

$$\therefore \quad 2 < \log_2 5 < 3.$$

假定$\log_2 5$是有理数，则可设$\log_2 5 = \frac{p}{q}$（p、q为互素正整数）。于是

$$2^{\frac{p}{q}} = 5,$$

$$\therefore \quad 2^p = 5^q.$$

对于任意正整数p、q，2^p为偶数，5^q为奇数，从而由上式可知，偶数2^p=奇数5^q，与奇偶数定义矛盾。由此矛盾结果，可以断定假定不成立，所以$\log_2 5$不是有理数。

例 2 试证：对于一切自然数n，$f(n)=\frac{2n+3}{5n+7}$均为既约分数。

证明 假定对于一切自然数n，f(n)不都是既约分数，则至少存在一自然数n_0，使$2n_0+3$与$5n_0+7$有公约数k($k>1$，$k\in N$)，设

$$2n_0+3=kp,\ 5n_0+7=kq.\ (p,\ q\in N)$$

从上面两式中消去n_0，得

$$k(5p-2q)=1. \qquad (1)$$