

材料力学 (II)

主编 吕英民 副主编 陈海亮 仇伟德



中国石油大学出版社

内容简介

把材料力学划分为《材料力学(I)》和《材料力学(II)》是材料力学课程体系的一种改革。

《材料力学(II)》是《材料力学(I)》的继续,其内容具有提高和选读性质。主要内容有:弯曲进一步研究、能量法、静不定系统、实验应力分析基础、厚壁圆筒、杆件的塑性变形等。

本教材是十多年教学经验积累和完善的成果。体系新颖、行文流畅、分析清晰,备有大量例题和习题。适合于高等工科院校机械(电)、土建、石油工程等专业,也可供其他专业和有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学. 2/吕英民主编. —东营:中国石油大学出版社, 1995. 10(2007. 6 重印)

ISBN 978-7-5636-0731-0

I. 材… II. 吕… III. 材料力学—高等学校—教材
IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 003791 号

书 名: 材料力学(II)

作 者: 吕英民

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营 邮编 257061)

网 址: <http://www.uppbook.com.cn>

电子信箱: shiyoujiaoyu@126.com

排 版 者: 中国石油大学出版社排版中心

印 刷 者: 沂南县汇丰印刷有限公司

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0546—8392791, 8391797)

开 本: 185×260 印张: 11.375 字数: 300 千字

版 次: 2007 年 6 月第 1 版第 5 次印刷

定 价: 16.00 元

前 言

本书是根据原教育部材料力学编审小组于1980年审订的材料力学大纲(120学时)中的专题部分以及国家教委批准于1987年秋季试行的材料力学课程教学基本要求(100—110学时)编写而成的。本书内容以中国石油大学于1991年3月编写铅印的校内教材《材料力学(Ⅱ)》为基础,结合多年来的教学实践经验作了适当的修订。

把材料力学课程分成(Ⅰ)和(Ⅱ),是课程体系的一种改革,自1982年以来,经过十多年的教学实践,该课程体系得到进一步的完善和发展。《材料力学(Ⅱ)》是《材料力学(Ⅰ)》的继续,其内容具有提高和选读性质,约需36学时,可作为高等工业学校对材料力学要求较高的机械、土建等类专业使用的教材。《材料力学(Ⅰ)》和《材料力学(Ⅱ)》两本书相对独立,各专业可根据对材料力学知识的不同要求来选用。

本书第一章由吕英民、胡玉林编写;第二章和第三章由陈海亮编写;第四章由仇伟德、胡玉林编写;第五章由吕英民、于永南编写;第六章由仇伟德、于永南编写。全书由吕英民任主编,陈海亮和仇伟德任副主编。

本书承国家教委工科力学课程教学指导委员会主任委员、材料力学课程教学指导小组组长刘鸿文教授详细审阅,并经石油高校力学学科教学指导委员会征求意见,一致肯定了该教材体系,并推荐出版。本书从编写到出版过程中,得到许多力学同行和有关工作人员的热情支持,提出了许多宝贵意见,在此表示由衷的感谢。

由于编者水平所限,书中难免有错误和不妥之处,敬请广大教师和读者批评指正。

目 录

第一章 弯曲进一步研究	1
§ 1-1 概述	1
§ 1-2 开口薄壁截面梁的弯曲剪应力 弯曲中心	1
§ 1-3 平面曲杆纯弯曲时横截面上的正应力	6
§ 1-4 中性层曲率半径的确定	10
§ 1-5 平面曲杆在平面弯曲时的强度计算	16
§ 1-6 纵横弯曲	18
习题	22
第二章 能量法	25
§ 2-1 概述	25
§ 2-2 外力功和变形能	25
§ 2-3 莫尔定理	32
§ 2-4 计算莫尔积分的图乘法	38
§ 2-5 卡氏定理	43
§ 2-6 剪力对弯曲变形的影响	48
§ 2-7 功互等定理和位移互等定理	50
§ 2-8 虚功原理	51
§ 2-9 能量法求解冲击问题	55
§ 2-10 能量法求解细长压杆的临界力	64
习题	68
第三章 静不定系统	77
§ 3-1 概述	77
§ 3-2 力法正则方程——外力静不定问题	80
§ 3-3 力法正则方程——内力静不定问题	88
§ 3-4 方法正则方程——温度改变及支座移动问题简介	94
§ 3-5 连续梁及三弯矩方程	98
习题	104
第四章 实验应力分析基础	110
§ 4-1 概述	110
§ 4-2 平面应变分析	110
§ 4-3 电测应变分析的基本原理	113
§ 4-4 测量电桥接法及应变、应力测量	117
§ 4-5 光弹性法的基本原理	123
习题	132

第五章 厚壁圆筒	135
§ 5-1 概述	135
§ 5-2 厚壁圆筒	135
§ 5-3 组合厚壁圆筒	140
§ 5-4 等厚度旋转圆盘	144
习题.....	147
第六章 杆件的塑性变形	149
§ 6-1 概述	149
§ 6-2 金属材料的塑性性质	149
§ 6-3 残余应力的概念	151
§ 6-4 拉压杆系的塑性分析和极限载荷计算	153
§ 6-5 等直梁的塑性弯曲与塑性铰	157
§ 6-6 静不定等直梁极限载荷计算	159
§ 6-7 厚壁圆筒的塑性变形	162
习题.....	166
附录 习题答案	169
主要参考文献	176

第一章 弯曲进一步研究

§ 1-1 概 述

材料力学(I)第六章中,已研究了具有纵向对称面的直梁的弯曲应力及弯曲强度计算。工程上还经常遇到另外三类梁:一是开口薄壁截面梁;二是曲梁(曲杆);三是纵横弯曲梁。本章将研究这三类梁的弯曲问题。

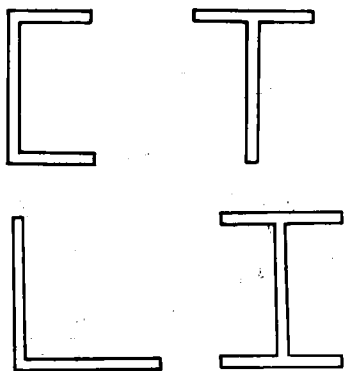


图 1-1

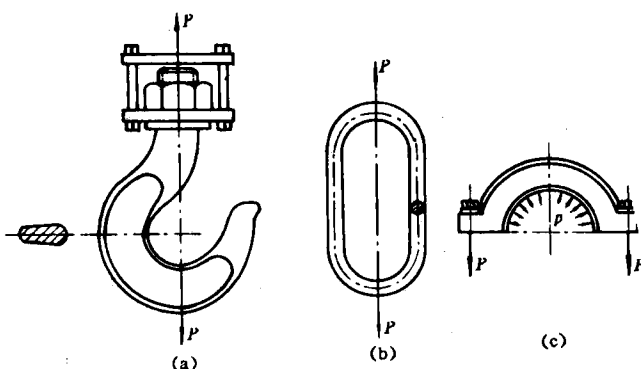


图 1-2

对于开口薄壁截面梁,最常见的截面有薄壁槽型、T型、L型以及工字型等截面(图 1-1)。对于曲梁(曲杆),如石油钻机的大钩(图 1-2a)、吊环(图 1-2b)以及连杆大头盖(图 1-2c)等,它们的轴线是一条曲线,因此,称为曲梁或曲杆。对于纵横弯曲梁,它的弯曲变形是由横向力和轴向力(纵向力)共同作用下引起的,因此,称为纵横弯曲梁。

下面,将分别研究这三类梁的弯曲问题。

§ 1-2 开口薄壁截面梁的弯曲剪应力 弯曲中心

由材料力学(I)第六章得知,当直梁具有纵向对称面,而且载荷也作用在纵向对称面内时,梁的轴线将在纵向对称面内弯曲成一条平面曲线,梁的变形是平面弯曲。理论分析和实验结果指出,对于非对称开口薄壁截面梁,即使横向力作用于形心主惯性平面内,则梁除发生弯曲变形外,还将发生扭转变形,如图 1-3(a)所示。只有当横向力的作用平面平行于形心主惯性平面并通过某一特定点时,梁才能只发生平面弯曲而无扭转变形,如图 1-3(b)所示。这一特定点称为横截面的弯曲中心。

确定开口薄壁截面梁横截面的弯曲中心,具有较大的实用价值。这是由于开口薄壁截面梁的抗扭刚度较小,若横向外力不通过弯曲中心,则将引起较严重的扭转,故对这类开口薄壁截面梁确定弯曲中心是很重要的。为此,首先研究开口薄壁截面梁弯曲剪应力的计算,然后确定弯曲中心。

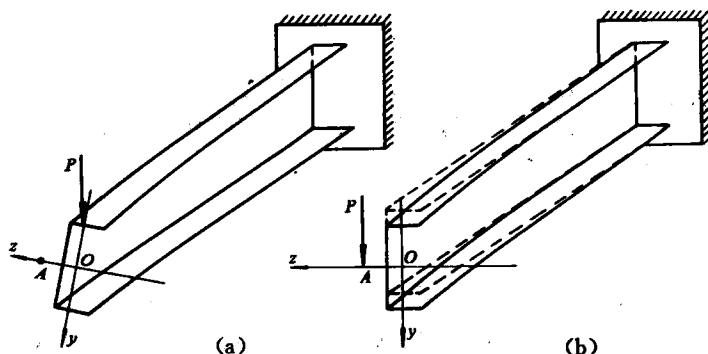


图 1-3

图 1-4(a)为一开口薄壁截面梁, y 和 z 轴为横截面的形心主惯性轴, 设载荷 P 平行于 y 轴, 并通过弯曲中心, 这时梁在 xy 平面内发生平面弯曲并无扭转变形, 而 z 为截面的中性轴, 横截面上任一点的弯曲正应力仍可用材料力学(I)中的公式(6-2)计算。

现在讨论弯曲剪应力计算。由于壁厚 t 远小于横截面的其他尺寸, 故可假设剪应力的沿壁厚无变化。又因梁的内侧表面和外侧表面皆为自由面, 没有与表面相切的载荷作用, 所以, 横截面上的剪应力应与横截面的周边相切。今在 x 处以相距为 dx 的两个横截面和垂直于壁厚的纵向截面, 从梁中截出 $abcd$ 部分(图 1-4a、b 和 c), 在 bc 面上, 作用着弯曲正应力 σ , 其微内力 σdA 组成的内力系的合力以 N_1 表示。同理, 在 ad 面上, 微内力组成的内力系的合力以 N_2 表示。因 ad 面处的弯矩大于 bc 面处的弯矩, 合力 N_2 将大于 N_1 , 因此, 剪应力 τ 必须沿 cd 面作用, 以保持 $abcd$ 部分的静力平衡。根据

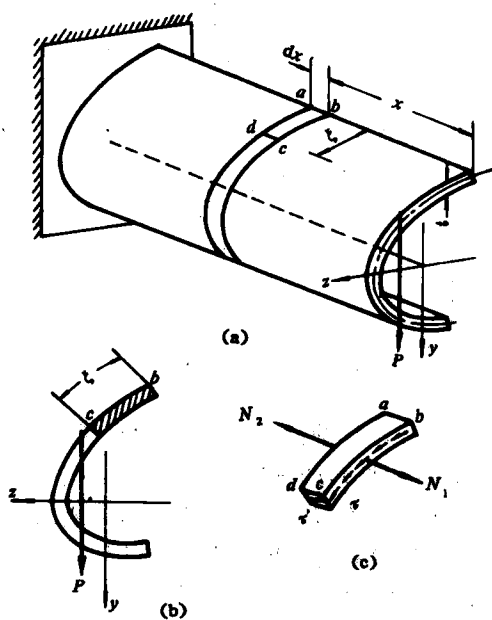


图 1-4

剪应力互等定理, cd 面上的剪应力 τ' 必与横截面 bc 上 c 处的剪应力 τ 大小相等, 方向如图所示。 cd 面上的 x 方向的内力为 $\tau' t \cdot dx$, 把作用于 $abcd$ 部分的力投影于 x 轴, 由平衡条件 $\sum X = 0$ 得

$$N_2 - N_1 - \tau' t dx = 0 \quad (a)$$

应用材料力学(I) § 6-4 中的方法, 可得

$$\begin{aligned} N_1 &= MS_z^*/I_z \\ N_2 &= (M + dM)S_z^*/I_z \end{aligned}$$

式中, M 和 $(M + dM)$ 分别是 bc 和 ad 两个横截面上的弯矩; S_z^* 是截面上截出部分(图 1-4b 中

画阴影线 bc 部分) 对中性轴 z 的静矩; I_z 是整个横截面对中性轴的惯性矩。将 N_1 和 N_2 的表达式代入方程(a), 得

$$\frac{(M + dM)S_z^*}{I_z} - \frac{MS_z^*}{I_z} - \tau' t dx = 0$$

由此求得

$$\tau' = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_z^*}{I_z \cdot t} = \frac{QS_z^*}{I_z t}$$

根据剪应力互等定理, 求得横截面上距自由边缘为 ξ 处的剪应力 τ 为

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_z t} \quad (1-1)$$

这就是开口薄壁截面梁弯曲剪应力的计算公式。它与材料力学(I)中的公式(6-9)相类似。

求得开口薄壁截面梁横截面上的弯曲剪应力以后, 就可进一步确定开口薄壁截面的弯曲中心的位置。现以槽形截面为例, 说明确定弯曲中心的方法。设槽形截面尺寸如图 1-5(a) 所示。受平行于 y 轴的外力作用, 截面绕 z 轴发生弯曲。当计算上翼缘距右边为 ξ 处的剪应力 τ_1 时

$$S_z^* = \frac{\xi t h}{2}$$

把它代入公式(1-1), 得

$$\tau_1 = \frac{Q \xi h}{2 I_z}$$

从上式可以看出, τ_1 随 ξ 而变化, 即上翼缘上的剪应力 τ_1 沿上翼缘宽度按直线规律变化(图 1-5b)。今以 Q_1 代表上翼缘切向内力系的合力, 则

$$Q_1 = \int_{A_1} \tau_1 dA = \int_0^b \frac{Q \xi h}{2 I_z} t d\xi = \frac{Q b^2 h t}{4 I_z} \quad (b)$$

用同样的方法可以求得下翼缘的内力 Q'_1, Q'_1 与 Q_1 大小相等、方向相反(图 1-5c)。

当计算腹板上距中性轴为 y 处的剪应力 τ_2 时,

$$\begin{aligned} S_z^* &= \frac{b t h}{2} + d \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(y + \frac{h/2 - y}{2} \right) \\ &= \frac{b t h}{2} + \frac{d}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned}$$

代入公式(1-1), 得

$$\tau_2 = \frac{Q}{I_z d} \left[\frac{b t h}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) d \right]$$

从上式可以看出, τ_2 随 y^2 而变化, 即腹板上剪应力 τ_2 沿腹板高度按抛物线规律变化。若以 Q_2 代表腹板上切向内力系的合力, 则

$$Q_2 = \int_{A_2} \tau_2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{Q}{I_z d} \left[\frac{b t h}{2} + \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) d \right] d \cdot dy$$

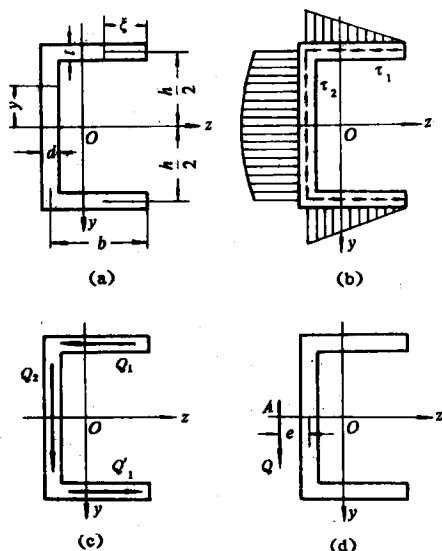


图 1-5

$$= \frac{Q}{I_z} \left(\frac{bth^2}{2} + \frac{dh^3}{12} \right) \quad (c)$$

槽形截面对中性轴的惯性矩 I_z 约为

$$I_z = 2 \left[\frac{bt^3}{12} + \left(\frac{h}{2} \right)^2 bt \right] + \frac{dh^3}{12} \approx \frac{bth^2}{2} + \frac{dh^3}{12} \quad (d)$$

将 I_z 代入(c)式,即得

$$Q_2 = Q$$

这样,求得了截面上的三个切向内力: Q_1 、 Q'_1 和 Q_2 (图 1-5c)。因 Q_1 和 Q'_1 相等而方向相反,这两个切向力组成力偶矩 $Q_1 h$ 。再把这个力偶矩 $Q_1 h$ 与 Q_2 合并,得到截面上一个总的合力,这个合力的大小等于 Q_2 ($Q_2 = Q$),但其作用线向左平移了一个距离 e 。这个距离 e 可以这样来确定:将各力对腹板中心取矩,根据合力矩定理,得

$$Q_1 \cdot h = Q \cdot e$$

将(b)式代入上式,即可求得 e 之值为

$$e = \frac{Q_1 h}{Q} = \frac{b^2 h^2 t}{4 I_z} \quad (1-2a)$$

如将(d)式代入上式,就可以得到确定 e 值的另一种形式

$$e = \frac{b/2}{1 + hd/6bt} \quad (1-2b)$$

由于截面上三个切向内力的总合力 Q (即截面上的剪力)在距离腹板中线为 e 的纵向平面内,如果横向力 P 也作用在此纵向平面内(即横向力 P 通过弯曲中心),梁就只发生弯曲而无扭转变形,这就是图 1-3(b)所表示的情况。

若横向力沿 z 轴作用,因 z 轴是槽形截面的对称轴,故梁产生平面弯曲,此时,横截面上的剪力 Q_x 与 z 轴重合(图 1-5d 中未画出 Q_x)。在上述两种平面弯曲中,横截面上的剪力 Q 和 Q_x 的作用线的交点 A 即为弯曲中心,也称剪切中心。在槽形截面的情况下,弯曲中心在其截面的对称轴 z 上,其位置可由公式(1-2a)或(1-2b)来确定。这两个公式都表明,弯曲中心的位置与外力的大小和材料的性质无关,而只与横截面的几何性质有关。

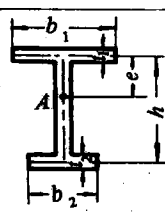
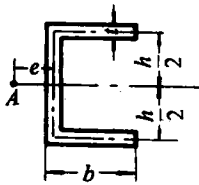
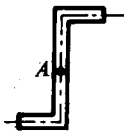
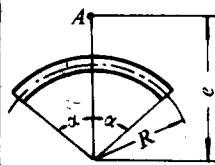
综上所述,槽形截面梁所受的外力若通过弯曲中心,梁只产生弯曲变形。反之,若外力 P 不通过弯曲中心,这时应把外力 P 向弯曲中心平移,得到一个通过弯曲中心的力 P 和一个力偶矩。通过弯曲中心的力 P 使梁产生弯曲变形,而力偶矩将使梁产生扭转变形。这就是图 1-3(a)所表示的既有弯曲又有扭转的情况。

对于与槽形截面类似的具有一个对称轴的截面,例如 T 字形、开口环形和等边角钢截面,其弯曲中心都在截面的对称轴上,但具体位置需要通过计算确定。

若截面具有两个对称轴,例如工字形截面,其弯曲中心在截面的两个对称轴之交点(即截面形心)。至于象 Z 形截面这样的反对称截面,其弯曲中心也与截面形心重合。

表 1-1 中,给出了工程中比较常用的一些截面的弯曲中心位置。

表 1-1 开口薄壁截面弯曲中心的位置

截面形状					
弯曲中心	与截面形心重合	$e = \frac{t_2 b_1^3 h}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3}$	$e = \frac{b^2 h^2 t}{4I_x}$	与截面形心重合	$e = 2R \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$

例 1-1 试确定图 1-6 所示的开口薄壁半圆形截面的弯曲中心 A 的位置。

解 先研究沿横截面中线 s 处的截面 bb , 它与截面 aa 之间所对的中心角为 θ , aa 和 bb 之间的面积对轴的静矩为

$$\begin{aligned} S_z^* &= \int_{A_1} y dA \\ &= \int_0^\theta R \cos \varphi \cdot t \cdot R d\varphi = R^2 t \sin \theta \end{aligned}$$

将上式代入公式(1-1), 得 bb 处的剪应力为

$$\tau = \frac{QS_z^*}{I_x t} = \frac{Q \cdot R^2 \sin \theta}{I_x} \quad (e)$$

式中, I_x 为横截面对中性轴的惯性矩, 其值为

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^\pi (R \cos \varphi)^2 \cdot t R d\varphi = \pi R^3 t / 2$$

将上式代入(a)式, 得

$$\tau = \frac{2Q \sin \theta}{\pi R t} \quad (f)$$

由上式得知, 剪应力 τ 随 θ 而变化, 当 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时, $\tau=0$; 而 $\theta=\pi/2$ 时, 得到的剪应力最大。

截面上微内力 τdA 组成与截面相切的内力系, 其合力 Q 必通过截面的弯曲中心, 如对圆心取矩, 由合力矩定理得

$$\begin{aligned} Q \cdot e &= \int_A R \cdot \tau dA = \int_0^\pi R \frac{2Q \sin \theta}{\pi R t} \cdot (t R d\theta) \\ &= \int_0^\pi \frac{2QR \sin \theta}{\pi} d\theta = \frac{4RQ}{\pi} \end{aligned}$$

由上式可得, 圆心 O 点到弯曲中心 A 点的距离为

$$e = \frac{4R}{\pi} \quad (g)$$

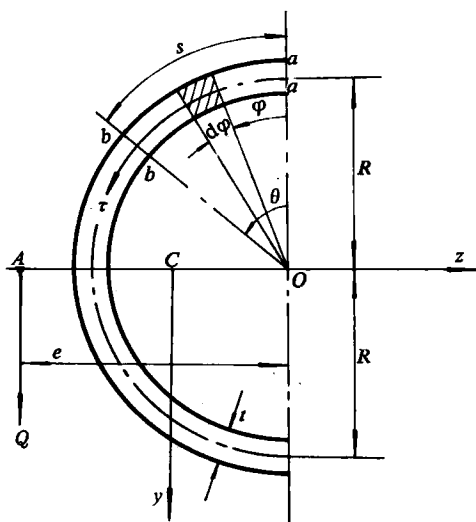


图 1-6

§ 1-3 平面曲杆纯弯曲时横截面上的正应力

图 1-2 所示的曲杆,其横截面有一对称轴,曲杆轴线是纵向对称平面内的一条平面曲线,这种曲杆称为平面曲杆或平面曲梁。若作用在曲杆上的载荷都在纵向对称面内,由于对称关系,变形后的轴线仍是纵向对称面内的一条平面曲线,这就是平面曲杆的平面弯曲,是工程上最常见的情况。

曲杆通常分为小曲率杆与大曲率杆,用来区分它们的基本特征是曲杆轴线的曲率半径 R_0 与在曲率平面内截面的高度 h 之比。一般认为,若 $2R_0/h > 10$,属小曲率杆;若 $2R_0/h \leq 10$,属大曲率杆。大钩和吊环等属于大曲率杆。

设有一段等截面的大曲率杆,在它的纵向对称面内,其两端作用有大小相等、方向相反的两个力偶矩 M_x (图 1-7a)。这时,曲杆任一横截面上,只有弯矩而无剪力,因而只有弯曲正应力而无剪应力,与直梁相类似,称这种情况为平面曲杆的纯弯曲。与推导直梁纯弯曲时的正应力公式一样,导出曲杆纯弯曲时横截面上的正应力公式,也必须综合考虑几何、物理和静力三方面的关系。

(一) 变形几何关系

实验结果表明,曲杆纯弯曲时,弯曲变形前垂直于轴线的横截面,变形后仍保持为平面,且仍垂直于变形后的轴线,只是绕中性轴转动了一个角度。换句话说,大曲率杆纯弯曲时,平面假设仍然成立。

用夹角为 $d\varphi$ 的两个相邻的横截面 1—1 和 2—2 从变形前的曲杆中取出一个微段 (图 1-7b),变形后,根据平面假设,截面 2—2 相对于 1—1 绕中性轴转动了一个微小角度 $\delta(d\varphi)$,

但仍保持为平面。若设截面的对称轴为 y 轴,中性轴为 z 轴,截面的外法线为 x 轴,并设中性层的曲率半径为 r 。变形前,距中性层为 y 的纵向纤维 $\widehat{A_1A_2}$ 弧的长度为

$$\widehat{A_1A_2} = (r + y)d\varphi = \rho d\varphi$$

式中, $\rho = r + y$, 它是纵向纤维 $\widehat{A_1A_2}$ 弧的曲率半径。变形后,纵向纤维 $\widehat{A_1A_2}$ 的伸长是

$$\widehat{A_2B_2} = y \cdot \delta(d\varphi)$$

由此可得纵向纤维 $\widehat{A_1A_2}$ 的线应变为

$$\epsilon = \frac{\widehat{A_2B_2}}{\widehat{A_1A_2}} = \frac{y}{\rho} \cdot \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{y}{r + y} \cdot \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \quad (a)$$

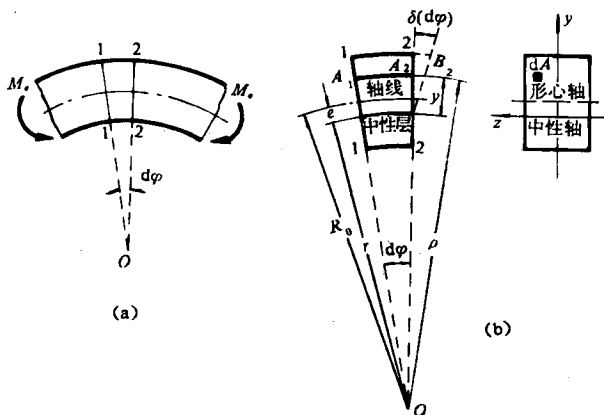


图 1-7

对于某一个给定横截面上不同点来说,中性层的曲率半径 r 和 $\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ 都是常数,因而,横截面上各点的应变 ϵ 只与坐标 y 有关。上式说明, ϵ 与 y 的关系是双曲线关系,就是说,应变 ϵ 沿截面高度按双曲线规律变化。

(二) 物理关系

假设各纵向纤维之间不存在相互挤压,因而当应力小于比例极限时,每一纵向纤维都可应用单向拉伸(或压缩)时的虎克定律,即 $\sigma = E \cdot \epsilon$,将(a)式代入虎克定律,得

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \quad (1-3)$$

或写成

$$\sigma = E \frac{y}{r + y} \cdot \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \quad (b)$$

与(a)式的分析讨论相类似,对某一给定横截面上的不同点来说, $E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ 以及中性层的曲率半径 r 都是常数,因而,横截面上各点的正应力 σ 只与坐标 y 有关。所以,横截面上各点的正应力沿轴的变化规律也是双曲线规律(图 1-8)。

在直梁的情况下,相邻两截面间各纵向纤维的原长相等。弯曲变形后,由平面假设可以得到应变和应力沿截面高度线性规律的分布。在曲杆的情况下,相邻两截面间各纵向纤维的原长并不相等(图 1-7),靠近曲率中心一侧的纤维较短,而远离曲率中心一侧的纤维较长,也就是说,每一纵向纤维的原长是随着其曲率半径 ρ 而改变的,这样,虽然仍使用平面假设,但应变和应力沿截面高度的变化规律就成为双曲线了。

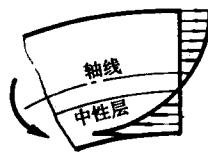


图 1-8

(三) 静力关系

在横截面上的正应力分布规律式(1-3)中,中性轴位置 r 和 $\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ 的数值还不知道,这可以通过图 1-9 所示的一段曲杆的静力平衡条件来确定。

曲杆横截面上的微内力(图 1-9),组成垂直于横截面的空间平行力系。这样的平行力系只可能简化成三个内力分量,即垂直于横截面的轴力 N 以及对 y 轴和 z 轴的弯矩 M_y 和 M_z ,它们可分别表示为

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA \\ M_y &= \int_A z \sigma dA \\ M_z &= \int_A y \sigma dA \end{aligned}$$

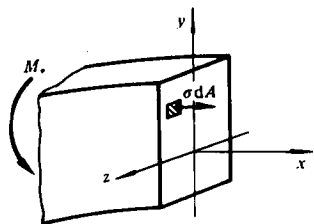


图 1-9

图 1-9 所示的横截面上的内力应与截面左侧的外力平衡。在纯弯曲情况下,截面左侧的外力只有一个对 z 轴的力偶矩 M_z (图 1-9),这样,可以列出三个静力平衡条件,即

$$\sum X = 0 \quad (c)$$

$$\sum M_y = 0 \quad (d)$$

$$\sum M_z = 0 \quad (e)$$

由(c)式得

$$N = \int_A \sigma dA = 0$$

将公式(1-3)代入上式,得

$$N = E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_A \frac{y}{\rho} dA = 0$$

因为 $E \cdot \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ 不等于零,故有

$$\int_A \frac{y}{\rho} dA = 0 \quad (f)$$

由于 $\rho = r + y$, 故 $\frac{y}{\rho} = \frac{\rho - r}{\rho} = 1 - \frac{r}{\rho}$, 代入(f)式得

$$\int_A \frac{y}{\rho} dA = \int_A \left(1 - \frac{r}{\rho} \right) dA = \int_A dA - r \int_A \frac{dA}{\rho} = 0$$

由此得

$$r = \frac{\int_A dA}{\int_A \frac{dA}{\rho}} = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}} \quad (1-4)$$

由公式(1-4)可以求出中性层的曲率半径 r , 从而确定了中性轴在横截面上的位置。这里与直梁不同, 由(c)式 $\sum X = 0$, 并未得出截面对中性轴的静矩等于零的结论, 所以, 中性轴是不通过截面形心的, 这是因为横截面上的正应力按双曲线规律分布的缘故。截面上靠近曲率中心一侧的应力增加较快, 远离曲率中心一侧的应力增加缓慢, 而 $\sum X = N = 0$, 要求整个截面上微内力 σdA 的总和等于零, 所以, 中性轴位置从截面形心向曲杆的曲率中心移动而不通过截面形心。若以 e 表示截面形心轴与中性轴(轴线与中性层)之间的距离, R_0 为轴线的曲率半径, 则由图 1-7 可知

$$e = R_0 - r \quad (1-5)$$

由第二个静力平衡条件(d)式, 可得

$$M_y = \int_A z \sigma dA = 0$$

将公式(1-3)代入上式, 得

$$E \cdot \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_A \frac{yz}{\rho} dA = 0$$

因为 $E \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ 不等于零, 故

$$\int_A \frac{yz}{\rho} dA = 0$$

由于 y 轴是横截面的对称轴, 使用证明 $\int_A yz dA = 0$ 的相似方法, 也可证明积分 $\int_A \frac{yz}{\rho} dA = 0$ 。这样, 第二个静力平衡条件(d)式便自动满足。

由第三个静力平衡条件(e)式, 得

$$M_z = \int_A y \sigma dA = M_x$$

将公式(1-3)代入上式,并以常用符号 M 代替弯矩 M_x ,得

$$M = \int y \sigma dA = E \cdot \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_A \frac{y^2}{\rho} dA \quad (g)$$

上式中的积分 $\int_A \frac{y^2}{\rho} dA$ 可以写为

$$\int \frac{y^2}{\rho} dA = \int_A \frac{(\rho - r)y}{\rho} dA = \int_A y dA - r \int_A \frac{y}{\rho} dA$$

由(f)式可知等号右边的第二个积分等于零,而等号右边的第一个积分是整个横截面对中性轴(z 轴)的静矩 S ,所以

$$\int \frac{y^2}{\rho} dA = \int_A y dA = A \cdot e = S \quad (h)$$

将(h)式代入(g)式,得

$$M = E \cdot \frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} \cdot S$$

由上式可解出 $\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi}$ 与弯矩 M 之间的关系

$$\frac{\delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{M}{ES} \quad (i)$$

将(i)式代入公式(1-3),得

$$\sigma = \frac{My}{\rho S} \quad (1-6)$$

此即平面曲杆纯弯曲时,横截面上任一点正应力的计算公式。式中 y 为该点到中性轴的距离, ρ 为该点到曲率中心的距离, S 为整个截面对中性轴的静矩, M 为该截面的弯矩。按照过去的规定,使曲杆曲率增加的弯矩为正,横面上的最大正应力即危险点的位置发生在离中性轴最远的边缘处。

对于大钩、吊环等大曲率杆,其截面上的弯曲正应力可按公式(1-6)计算。计算结果表明,当 $2R_0/h=10$ 时,按直梁公式与按公式(1-6)所得结果的差别在 7% 以内。因此,工程上一般认为:

对于小曲率杆,即 $2R_0/h > 10$ 时,其弯曲正应力可近似地用直梁公式进行计算,例如桥梁结构与房屋结构中的拱就属于这种情况。

对于大曲率杆,即 $2R_0/h \leq 10$ 时,其弯曲正应力应按曲杆弯曲正应力公式(1-6)计算,如石油钻机的大钩、吊环就属于这种情况。

在推导公式(1-6)时,采用了平面假设与各纵向纤维之间不存在相互挤压的假设,但如将公式(1-6)的计算结果与弹性理论的精确解进行比较,误差甚微,表明公式(1-6)具有足够的精度。弹性理论的精确解还证明,横截面变形后确实保持为平面,但纵向纤维之间存在着远小于弯曲正应力的径向应力,在材料力学的近似解中忽略了这一应力。

应用公式(1-6)计算曲杆的弯曲正应力时,首先必须确定中性层的曲率半径 r 的数值,才能算出横截面上任一点的正应力的精确值,为此,在下一节中将着重讨论中性层曲率半径 r 的计算方法。

§ 1-4 中性层曲率半径的确定

计算中性层的曲率半径 r 的关键问题, 在于计算公式(1-4)中的积分 $\int_A \frac{dA}{\rho}$ 。本节推导几种常用截面的积分 $\int_A \frac{dA}{\rho}$ 和 r 的计算公式。

(一) 矩形截面

设曲杆的横截面为矩形(图 1-10), 取与轴平行而高度为 $d\rho$ 的窄长条面积为 dA , 即

$$dA = b d\rho$$

将此 dA 值代入积分 $\int_A \frac{dA}{\rho}$ 中, 得

$$\int_A \frac{dA}{\rho} = b \int_{R_2}^{R_1} \frac{d\rho}{\rho} = b \ln \frac{R_1}{R_2}$$

式中, R_1 和 R_2 分别是曲杆最外缘和最内缘纤维的曲率半径(图 1-10), 将此积分的结果代入公式(1-4), 即可得中性层的曲率半径为

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}} = \frac{bh}{b \ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (1-7)$$

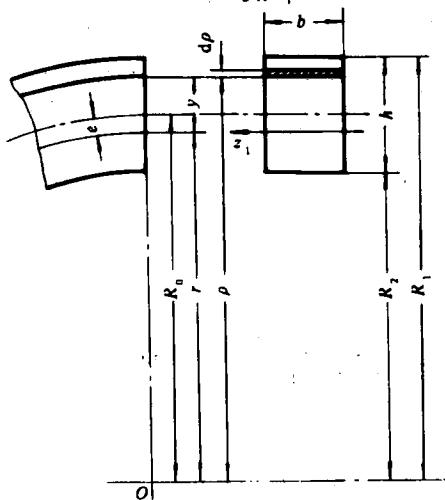


图 1-10

(二) 矩形组合截面

当曲杆的横截面为如图 1-11 所示的工字形截面时, 可看作是由三个矩形组成的组合截面。在组合截面中仍可按以上方法取 $dA = b d\rho$, 但应注意三个矩形的宽度 b 均不相同, 故积分

$\int_A \frac{dA}{\rho}$ 应分成三部分, 即

$$\begin{aligned} \int_A \frac{dA}{\rho} &= b_1 \int_{R_2}^{R_1} \frac{d\rho}{\rho} + b_2 \int_{R_3}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} + b_3 \int_{R_4}^{R_3} \frac{d\rho}{\rho} \\ &= b_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + b_2 \ln \frac{R_2}{R_3} + b_3 \ln \frac{R_3}{R_4} \end{aligned}$$

将此积分结果代入公式(1-4), 即可得中性层的曲率半径为

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}} = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + b_2 \ln \frac{R_2}{R_3} + b_3 \ln \frac{R_3}{R_4}} \quad (1-8)$$

对于如图 1-12 所示的丁字形截面, 可以看作是由两个矩形组成的组合截面, 其中性层的曲率半径为

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}} = \frac{b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_2 \ln \frac{R_2}{R_3} + b_3 \ln \frac{R_3}{R_4}} \quad (1-9)$$

由式(1-8)可以进一步推广到由 n 个底边平行的矩形组成的组合截面, 得

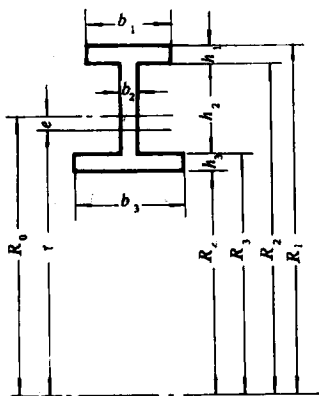


图 1-11

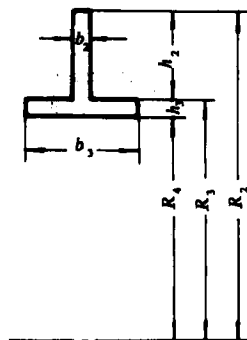


图 1-12

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{\sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{dA}{\rho}} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i h_i}{\sum_{i=1}^n b_i \ln \frac{R_i}{R_{i+1}}} \quad (1-10)$$

式中, b_i 为每个矩形的宽度, h_i 为其高度, R_i 和 R_{i+1} 分别为每个矩形外缘和内缘纤维的曲率半径。

(三) 梯形及三角形截面

当截面为梯形时, 由图 1-13 可以看出, 取 $dA = b_\rho d\rho$, b_ρ 为梯形宽度, 其值随 ρ 而改变。

$$b_\rho = b_1 + (b_2 - b_1) \frac{R_1 - \rho}{R_1 - R_2}$$

代入积分 $\int_A \frac{dA}{\rho}$ 中, 即得

$$\begin{aligned} \int_A \frac{dA}{\rho} &= \int_{R_2}^{R_1} \frac{b_\rho d\rho}{\rho} = \int_{R_2}^{R_1} \left[b_1 + (b_2 - b_1) \frac{R_1 - \rho}{R_1 - R_2} \right] \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \left[b_1 + \frac{(b_2 - b_1)R_1}{R_1 - R_2} \right] \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1) \\ &= \frac{b_2 R_1 - b_1 R_2}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1) \end{aligned}$$

将积分结果代入公式(1-4), 得中性层曲率半径为

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}} = \frac{\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h}{\frac{b_2 R_1 - b_1 R_2}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1)} \quad (1-11)$$

在上式中, 如令 $b_1 = b_2 = b$, 就得到矩形截面的公式(1-7)。如令 $b_1 = 0, b_2 = b$, 即得如图 1-14 所示的三角形截面, 其中性层的曲率半径为

$$r = \frac{h}{2 \left(\frac{R_1}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - 1 \right)} \quad (1-12)$$

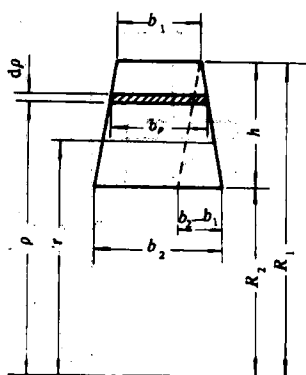


图 1-13

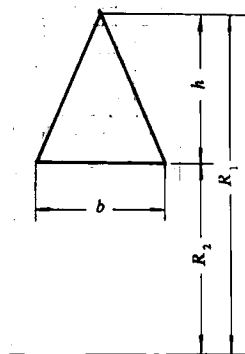


图 1-14

(四) 圆形截面

当曲杆截面为圆形时,如图 1-15 所示,
若以 φ 角为变量,则有

$$b_\rho = d \cos \varphi$$

$$\rho = R_0 + \frac{d}{2} \sin \varphi$$

$$d\rho = \frac{d}{2} \cos \varphi d\varphi$$

$$dA = b_\rho d\rho = \frac{d^2}{2} \cos^2 \varphi d\varphi$$

代入积分式 $\int_A \frac{dA}{\rho}$, 并对 φ 进行积分, 即得

$$\begin{aligned} \int_A \frac{dA}{\rho} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d^2}{2} \cos^2 \varphi d\varphi}{R_0 + \frac{d}{2} \sin \varphi} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^2 \cos^2 \varphi d\varphi}{2R_0 + d \sin \varphi} \\ &= \pi \left(2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2} \right) \end{aligned}$$

将此积分结果代入公式(1-4), 得中性层的曲率半径为

$$\begin{aligned} r &= \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}} = \frac{\frac{1}{4} \pi d^2}{\pi \left(2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2} \right)} \\ &= \frac{d^2}{4 \left(2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2} \right)} \end{aligned} \quad (1-13)$$

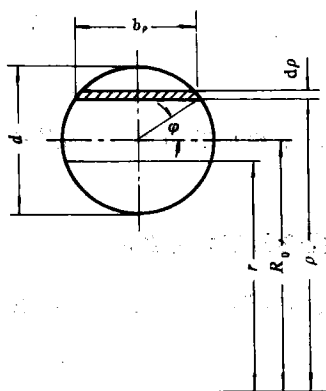


图 1-15