

理論力学

LILUN LIXUE

下 冊

(第二部分)

浙江大学力学教研組編

1961年4月

目 录

第三篇 动力學

第二十四章	拉格朗日方程.....	197
第二十五章	振动.....	233
第二十六章	回轉仪理論初步.....	303

动力學習題集

第十七章	質点运动微分方程式.....	1
第十八章	动量定理.....	7
第十九章	动量矩定理.....	9
第二十章	动能定理.....	14
第二十一章	碰撞.....	23
第二十二章	达朗伯原理，相对运动.....	27
第二十三章	虛位移原理，动力学普遍方程.....	37
第二十四章	拉格朗日方程.....	47
第二十五章	振动.....	54
第二十六章	迴轉仪理論初步.....	62

(7) 剛体作平行移动时，它的慣性力系向質心簡化的結果是什么？

(8) 剛体作定軸轉动时，它的慣性力系簡化的結果是什么？这結果是在向哪一点簡化时得到的？

(9) 剛体作定軸轉动时，在什么情况下，它的慣性主矢量和主矩两者之一等于零？在什么情况下两者都等于零？为了使支座动反力等于零，要做什么工作？

(10) 剛体作平面运动时，它的慣性力系向質心簡化的結果是什么？如果向其它点簡化，結果是否不同？

(11) 剛体作平面运动时其慣性合力的大小，方向和作用線位置应怎样确定？按图22—23(b)所示情况，慣性合力作用線可否在C点的另一側？

(12) 具有垂直于轉軸的对称平面的剛体作定軸轉动时，其慣性合力的大小，方向和作用線位置如何确定？

(13) 怎样建立質点的相对运动微分方程？試应用(22—27)式列出例18—5中的强迫振动微分方程。

第二十三章 虚位移原理

动力学普遍方程式

虚位移原理又名可能位移原理，它与静力学中叙述的列出平衡方程的方法不同，是另一种解答静力平衡问题的一般性原理。它特别适用于解决机构的静力平衡问题。虚位移原理与达朗伯原理相结合，得到了动力学普遍方程式，把定理引伸到解决动力学问题。

23—1. 质点系的自由度及几何约束

在研究质点的运动时，可以发现有些质点系或物体可以在空间自由运动而不受限制，称为**自由质点系**。例如在空中飞行的炮弹，太阳系中的各星体等。要表示空间一质点的位置需用三个独立坐标，例如直角坐标 x, y, z 。故此质点是自由的，则这三个坐标可以自由地取任何值，为此我们说空间自由质点有三个**自由度**。若自由质点系包括有 n 个质点，则需要 $3n$ 个独立坐标来表示质点系的位置，所以空间的自由质点系具有 $3n$ 个自由度。决定在平面中一质点的位置需要2个独立坐标 x 与 y ，故平面自由质点有两个自由度。要决定刚体在平面中的位置，除某点 A 的坐标 x 与 y 外，还需要知道其上直线 AB 的倾斜角 φ ，故作平面运动的刚体有三个自由度。

有些质点系或物体须沿着完全确定的轨迹或限于某一区域中的轨迹运动，即所谓**非自由质点系**或**约束质点系**，其中各质点不能自由运动，其位置必须服从某些限制条件。这种限制系中各质点自由运动的种种条件称为质点系的**约束**。质点系受到约束，自由度数就要相应地减少。

例如质点P必须保持在某曲面上运动(图23-1)则质点系的座标(x, y, z)必须满足曲面方程式

$$f(x, y, z) = 0 \quad (a)$$

因此质点的三个座标中只有两个可以任意选定, 第三个座标由(a)式来决定, 这时, 质点的自由度数为 $3-1=2$ 。

又如两质点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间连以长为 l 的刚杆(图23-2), 使得两点间的距离保持不变, 约束方程为

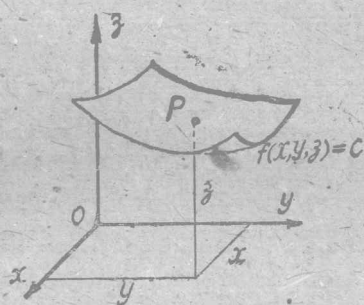


图23-1

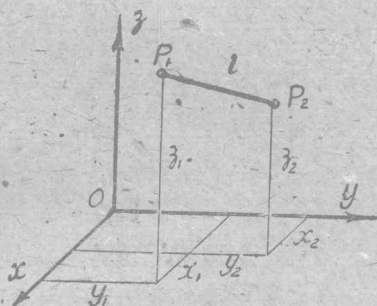


图23-2

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2, \quad (b)$$

这样, 对于六个座标, 加上了一个限制条件, 其中五个可以独立选取, 所以这质点系的自由度为 $2 \times 3 - 1 = 5$ 。

再以曲柄滑块机构为例加以分析(图23-3)。曲柄长 $OA = r$, 连长杆 $AB = l$, 取机构运动平面为 xoy 平面,

设定座标如图, 其中A, B两点座标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) ,

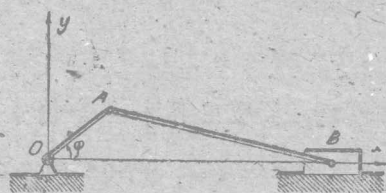


图23-3

$y_2, z_2)$ 。約束方程为

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= r^2, & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= l^2, \\ y_2 &= 0, & z_1 &= 0, & z_2 &= 0. \end{aligned} \right\} (c)$$

因此自由度为 $2 \times 3 - 5 = 1$ 。

一般說来，如果质点系有 n 个质点，受到 s 个約束方程限制，則其自由度数目为

$$k = 3n - s. \quad (23-1)$$

如果約束方程中只含有系中各点的座标，例如 (a) (b) (c)，这种对系統各点位移所加的限制称为**几何約束**。在一般情况下，約束加于质点系运动的限制，还可能与時間和速度有关，这样的約束称为**运动約束**。也可以按照約束方程内是否明显地包含時間变量 t 来分類，如果約束方程中並不明显地包含時間变量 t ，例如 (a) (b) (c)，就称为**穩定約束**；如果約束方程中包含了時間变量 t ，就称为**不穩定約束**。运动約束还可分为**完整約束**与**非完整約束**两种，在約束方程中不包含座标对時間的导数的約束称为**完整約束**。以下我們只考虑既穩定又完整的約束（几何約束）。

从力学的抽象看来，非自由质点系和自由质点系的不同就在于：非自由质点系受到由約束所施加的反力，即**約束反力**，約束反力限制了非自由质点的运动。約束反力外的力統称**主动力**，这种力的分類法已在靜力学中談到过。

23-2. 虚位移和理想約束

在轉向研究质点系平衡的普遍原理——**虚位移原理**之前，先来說明两个重要的概念——**虚位移**和**理想約束**。

我們已經知道质点系的任何約束，都限制着质点系运动的自由，即只容許这质点系有某些**位移**，而不容許它有另一些**位移**。

任何为約束所容許的微小位移，称为該质点系的虛位移。例如圖23—4中橫桿AB的虛位移是繞支點O的微小轉角 $\delta\varphi$ ，由位置AB轉到A'B'。橫桿上任一點M的虛位移是以支點O為圓心的短圆弧，由于虛位移是極微小的位移，所以可以認為 $\delta r = \overrightarrow{MM'}$ 是沿着圆弧在M點的切線方向，即垂直于AB。又如圖23—5時曲柄滑塊機構，它的虛位移是由位置OAB到OA'B'，滑塊B的虛位移是 $\delta r_B = \overrightarrow{BB'}$ ，曲柄銷A的虛位移是 $\delta r_A = \overrightarrow{AA'}$ ，可以認為它垂直于OA。

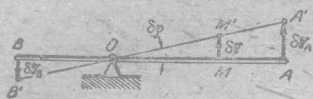


圖23—4



圖23—5

必須指出，質点系中任一質点的虛位移並不一定是它的實位移，實位移是質点在力的作用下实际發生的位移，而虛位移仅是約束所容許的可能發生而实际未必發生的位移。如果質点系的約束是穩定的，即約束不随時間改變，則實位移必是虛位移之一，因为只有約束所容許的位移（虛位移）才可能实际發生。

再來說明理想約束這一概念，如果質点系的約束反力在这系的任意虛位移上所作的功（即所謂虛功）的总和等于零，即

$$\sum N_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (23-2)$$

則这样的約束称为理想約束。

以下是一些常見的理想約束：

(1) 光滑固定面（圖23—6） 光滑面的約束反力沿着面的法線方向，而虛位移則沿着面的切線，因此約束反力垂直于所有的虛位移，反力在任何虛位移上所作的虛功总是等于零。

(2) 剛体的固定点 若剛体有固定点，則其約束反力作用在固定点上，這点沒有虛位移，虛功显然为零。

(3) 光滑鉸鏈 两个物体在点A以光滑鉸鏈連接，它們互相作用时約束反力大小相等，方向相反(图23—7)，因此当A点有任何虚位移时，这两力的虚功必定正負相消，其总和等于零。

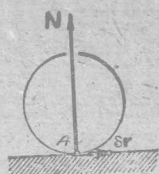


图23—6

此外如剛体的內力在任何位移上作功之和为零，不可伸长的柔索內力作功的总和也等于零，因此剛体和不可伸长的柔索都是理想約束，这些已在第二十章中談到过，这里不再重复。

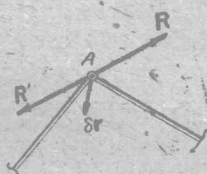


图23—7

23—3. 虚位移原理

虚位移原理：具有理想約束的质点系其平衡的充分和必要条件是：所有作用于該系的主动力在任何虚位移上所作虚功的总和等于零，即

$$\sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (23-3)$$

这原理又名虚功原理。現在先証明这条件对系的平衡是必要的，然后再証明它也是充分的。

(1) 必要性的証明 設已知质点系处于平衡，需要証明其上所有主动力在任何虚位移上所作的虚功总和等于零。

根据假定条件，系中任何质点 M_i 都保持平衡，所以作用于质点 M_i 的主动力的合力 $\mathbf{F}_i$ 与約束反力的合力 $\mathbf{N}_i$ 应处于平衡(图23—8)，即

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i = \mathbf{0}。$$

設 M_i 点的虚位移为 $\delta \mathbf{r}_i$ ，則主动力和約束反力的虚功总和应等于零，

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0。$$

对于系中其余各质点也都有与此相仿的等式。把各等式相加得：

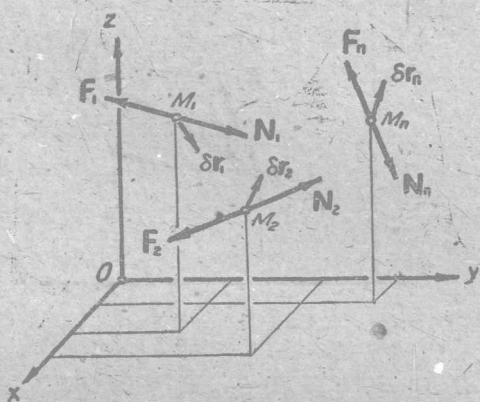


图23—8

$$\sum F_i \cdot \delta r_i + \sum N_i \cdot \delta r_i = 0。$$

既然质点系的约束是理想约束，则约束反力的虚功总和：

$$\sum N_i \cdot \delta r_i = 0， \quad (23-2)$$

所以 $\sum F_i \cdot \delta r_i = 0。$

(2) 充分性的证明 设已知质点系的所有主动力在任何虚位移上所作的虚功总和等于零，需要证明此质点系处于平衡。

应用反证法：如果假设质点系虽然满足条件(23-3)，但并不处于平衡，那时就会推出矛盾的结果，从而确定质点系一定处于平衡。证明如下：设质点系不处于平衡，则作用在质点 M_i 上的主动力 F_i 与约束反力 N_i 有一合力 R_i (图23-9)，

$$R_i = F_i + N_i，$$

如果开始时质点系是静止的，则 M_i 将在 R_i 作用下进入运动，它沿着 R_i 方向有一位移 δr_i ，因此

$$R_i \cdot \delta r_i > 0，$$

即 $F_i \cdot \delta r_i + N_i \cdot \delta r_i > 0。$

对于质点系中其余各质点也都有与此类似的不等式。把各不等式

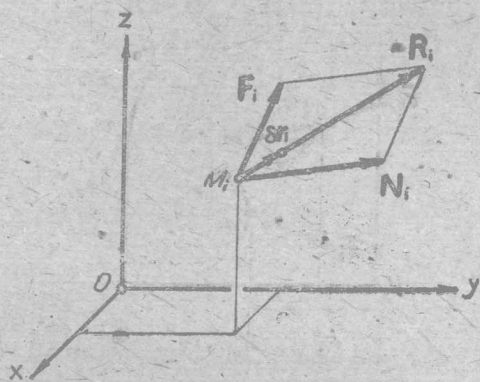


图23—9

相加得：

$$\sum F_i \cdot \delta r_i + \sum N_i \cdot \delta r_i > 0。$$

由理想约束的条件有

$$\sum N_i \cdot \delta r_i = 0，$$

从而推得

$$\sum F_i \cdot \delta r_i > 0。$$

但这与质点系应满足的已知条件 ($\sum F_i \cdot \delta r_i = 0$) 矛盾，所以质点不可能进入运动，可见质点系必定处于平衡。这就是所需的证明。

至此，我们已经证明具有理想约束系统平衡的充分与必要条件的普遍形式—虚位移原理。原理亦可解析地表示为：

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0。 \quad (23-4)$$

其中 X_i, Y_i, Z_i 为主动力 F_i 在直角坐标轴上的投影； $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 为虚位移 δr_i 在直角坐标轴上的投影（即 F_i 作用点坐标的变分）。

应用虚位移原理解决平衡问题时，只要约束是理想的，就只

須考慮主動力，不必考慮約束反力，使問題的解答大為簡化，這是虛位移原理的最大優點。不僅如此，即使質點系所受的並非理想約束，約束具有摩擦力，這時，只須把摩擦力的虛功列入方程(23—3)或(23—4)的左端，也可應用虛位移原理，其他理想約束反力仍可不計。以下舉例說明虛位移原理的應用。

【例23—1】螺旋壓榨機的把手長 $AB=2l=1$ 米，螺距 $h=1$ 厘米。如果在把手上作用一力偶 (P, P') ， $P=P'=10$ 公斤(圖23—10)，求加于被榨物體上的壓力。

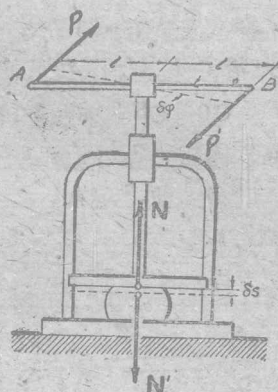


圖23—10

【解】 N 是被榨物體作用於螺桿的力，應作為主動力。假定固定螺母的摩擦力略去不計，成為理想約束，則其反力不必考慮。設手柄轉過一微小角度 $\delta\varphi$ ，則壓板將下降微小距離 δs ，按虛位移原理有：

$$2Pl\delta\varphi - N\delta s = 0。$$

現在求 $\delta\varphi$ 和 δs 間的關係。因為螺距前進距離與轉角成比例，當轉過 2π 角時，將沿軸線移動一螺距，故

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta s}{h}。$$

將上式代入前式，即得

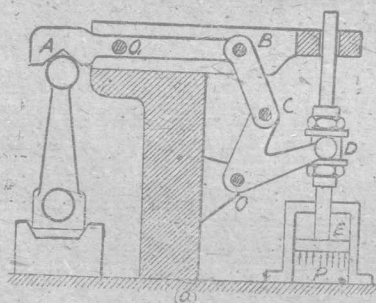
$$N = 2pl \frac{\delta\varphi}{\delta s} = 4\pi p \frac{l}{h}。$$

代入數值後：

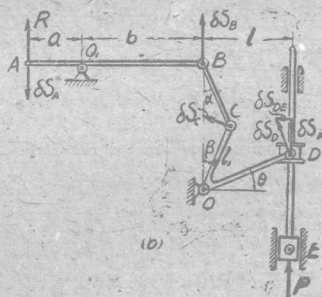
$$N = 2\pi(10) \left(\frac{1}{0.01} \right) = 6283 \text{ 公斤} = 6.283 \text{ 吨}。$$

【例23—2】图23—11(a)上示出铣床用自动气压夹具的简图。空气压力 P 推动活塞，通过曲折杠杆 DOC ，连杆 CB 和杠杆 AB 夹紧工件。如已知长度 a 、 b 、 l ， $oc=l_1$ ，联线 BO 与杠杆 AB 垂直， OC 和 CB 分别与 BO 成角 β 和 α 。若夹紧工件的压力为 R ，求所需气体压力 P 。

【解】为便于观察，把机构简化成图23—11(b)，设想 D 点有向上虚位移 δs_D ，则 A 点有向下的虚位移 δs_A 。不计摩擦，列出虚功方程：



(a)



(b)

图23—11

$$P\delta s_D - R\delta s_A = 0 \quad (1)$$

必须求出虚位移 δs_D 和 δs_A 间的关系。可以一环扣一环地考察。先看 D 点， D 是 OD 上的一点，其虚位移 δs_D 应垂直于 OD ，运用点的合成运动中微小位移分析方法，可见 δs_D 相当于牵连位移， δs_{DH} 相当于相对位移，有

$$\delta s_D = \frac{\delta s_H}{\cos\theta} \quad (2)$$

再考察杠杆DOC，DC两点虚位移应与其臂长OD及 l_1 成正比，即

$$\frac{\delta s_c}{\delta s_D} = \frac{l_1}{OD} \quad (3)$$

考察BC，与速度投影定理相似，位于同一刚体上的BC两点的微小位移在其连线上的投影应相等，即

$$\delta s_B \cos \alpha = \delta s_c \cos [90^\circ - (\alpha + \beta)] \quad (4)$$

最后考察杠杆AB，显然虚位移 δs_A 与 δs_B 应与臂a、b成正比，即

$$\frac{\delta s_A}{\delta s_B} = \frac{a}{b} \quad (5)$$

由(2)、(3)、(4)、(5)四式并注意到 $(OD) \cos \theta = l$ ，即可找到虚位移 δs_H 和 δs_A 间的直接关系式：

$$\delta s_A = \left[\frac{a}{b} - \frac{l_1}{l} (g\alpha + g\beta) \cos \beta \right] \delta s_H,$$

以此代入(1)式，即得

$$P = R \frac{a}{b} - \frac{l_1}{l} (g\alpha + g\beta) \cos \beta \quad P.$$

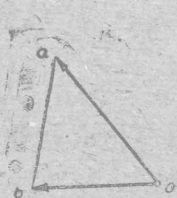
如 $\alpha = \beta$ ，则

$$P = 2R \frac{a}{b} - \frac{l_1}{l} \sin \alpha.$$

【例23—3】虚速度原理 曲柄滑块机构OAB的曲柄长r，连杆长l。在滑块上作用一力P，求曲柄转角为 φ 时所能克服的作用在曲柄上的力矩M（图23—12）。

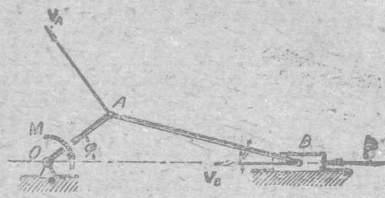
【解】系统上的主动力为P和M。使曲柄有一微小转角 $\delta\varphi$ ，则滑块将有微小位移 δs 。列出虚功方程

$$P \cdot \delta s - M \cdot \delta \varphi = 0 \quad (a)$$



(a)

图23—12



(b)

因为这机构只有一个自由度，故必須找出 $\delta\varphi$ 和 δs 間的关系，为此可以設想机构这一虛位移是在微小时間 δt 內完成的，因此

$$\frac{\delta s}{\delta\varphi} = \frac{\frac{\delta s}{\delta t}}{\frac{\delta\varphi}{\delta t}} = \frac{v_B}{\omega},$$

在运动学中已知，(参閱例10—6, 13—4)，曲柄轉速 ω 和滑块速度 v_B 間的关系为

$$v_B = r\omega \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi},$$

代入(a)式得

$$M = P \frac{\delta s}{\delta\varphi} = P \frac{v_B}{\omega} = Pr \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi}.$$

图23—12上还画出了連杆AB在这位置的速度图解，也可用这种图解方法求得 v_B 和 ω 的关系。

事实上，利用运动学中的速度分析求虛位移間关系的方法是具有普遍意义的。設机构的虛位移是在微小时間 δt 內完成的，以 δt 除虛功方程(23—3)便得：

$$\sum F_i \cdot \frac{\delta r_i}{\delta t} = 0,$$

其中

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} = v_i$$

称为 M_i 点的虚速度，也就是在约束许可下可能发生的速度。因此前式成为

$$\sum F_i \cdot v_i = 0 \quad (23-5)$$

与 (23-3) 式比较，无非是以虚速度代替了虚位移，这就是虚速度原理，应用于平面机构的平衡问题特别便利。

【例23—4】在车床的差动传动中锥齿轮1在主动轴a上（图23—13），在从动轴b的一端上带差行星齿轮2—2的轴，轴b上还活动地套着锥齿轮3，此轮与齿轮4联成整体。已知所有锥齿轮的半径都相同，主动轴a传入力矩 M_a ，整个机构以等角速转动，其中主动轴的角速为 ω_a ，试求从动轴b以及齿轮3—4上所受力矩 M_b 和 M_c 。

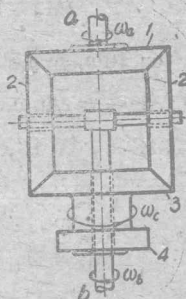


图23—13

【解】为确定这差动机构的位置，可以任意选择两个参数，例如轴a的转角和轴b的转角，剩下的轮3—4的转角即可由轮系的相互约束关系来确定，故这是有两个自由度的系统。

应用虚速原理 (23-5) 来解决这平衡问题。当然，虚速可以用角速度来表示，相应地主动力应为主动力矩。设定轴a、b和轮3—4的角速 ω_a 、 ω_b 和 ω_c 如图所示。並认为力矩 M_a 和 M_c 分别与 ω_a 和 ω_c 同向，而阻力矩 M_b 则与 ω_b 方向相反，因此虚速原理 (23-5) 成为

$$M_a \omega_a + M_c \omega_c - M_b \omega_b = 0 \quad (1)$$

上式有三个虚速，而本题具有两个自由度，故这三个虚速間尚有一个关系式，应用运动学§15—4所述原理，因各錐齒輪半徑相同，故有

$$\frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_2 r} = 1, \quad \frac{\omega_2 r}{\omega_c - \omega_b} = -1,$$

上两式相乘即得

$$\frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_c - \omega_b} = -1,$$

或 $\omega_a = 2\omega_b - \omega_c \quad (2)$

以(2)式代入(1)，整理后成为

$$(2M_a - M_b)\omega_b - (M_a - M_c)\omega_c = 0.$$

其中 ω_b 和 ω_c 是彼此独立的，可以任意选取，例如令 $\omega_b \neq 0$ 而 $\omega_c = 0$ 也可令 $\omega_b = 0$ 而 $\omega_c \neq 0$ ；这就从上式看到各獨立参数 ω_b 和 ω_c 前的系数必須全等于零，即

$$\left. \begin{aligned} 2M_a - M_b &= 0, \\ M_c - M_a &= 0, \end{aligned} \right\}$$

于是解得

$$M_b = 2M_a, \quad M_c = M_a.$$

23—4. 用虚位移原理求約束反力 解除約束原理

現在把虚位移原理推广于求約束反力，这样做是以解除約束原理为根据的，此原理可陈述如下：設將質点系的某些約束除去而加以相应的約束反力，則質点系的平衡情况并不因此改变。这一原理几乎是不証自明的，从力学观点看来，質点系所受的約束对于其平衡的影响完全决定于約束反力。因此解除某些約束，

而加以相应的约束反力，质点系仍处于平衡。这时再应用虚位移原理，则此约束反力将出现在虚功方程中，从而就可求出这些反力。

【例23—5】联合梁ABCD承受载荷如图23—14(a)所示，图上尺寸单位是米。已知 $q=500$ 公斤/米， $P=2$ 吨，试求支座A的反力。

【解】为了求支座A的反力，把支座A移去而代以相应的反力 R_A 。令A点有一虚位移 δs_A ，则梁ABC将绕B点转动，梁CD亦将绕D点转动。各主动力作用点的虚位移在图23—14(b)上表示。

计算梁AB上分佈载荷的虚功时，可以根据合力做功原理，只需求出其合力 $Q=6(q)=6(500)=3000$ 公斤=3吨的功。由虚位移原理：

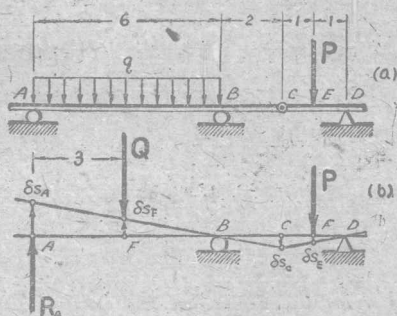


图23—14

$$R_A \cdot \delta s_A - Q \cdot \delta s_F + P \cdot \delta s_D = 0,$$

因此

$$R_A = Q \frac{\delta s_F}{\delta s_A} - P \frac{\delta s_D}{\delta s_A}.$$

由简单几何关系有：

$$\frac{\delta s_F}{\delta s_A} = \frac{3}{6},$$

$$\frac{\delta s_D}{\delta s_A} = \frac{\delta s_D}{\delta s_C} \cdot \frac{\delta s_C}{\delta s_A} = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{6} \right),$$