报考研究生丛书之四

高等数学复习纲要

下　　册

合肥工业大学学报编辑部

报考研究生丛书之四

高等数学复习纲要

（工程部分）

张春炎　顾秉琏　蒋和理

曾华堂　　　　　蔡凤生

合肥工业大学学报丛书

目　　录

第一章　线性代数

Ⅰ　内 容 提 要

(一)三阶行列式

1.定义： 已知九个数排成正方表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

则数　$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为对应于这个表的三阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2.性质

性质一　行列互换，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

这个性质表明了行列式中行、列地位的对称性，由此可见，行列式中有关行的性质对列也同样成立。

性质二　行列式中某行的公因子可以提出来。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由性质二可以推出：如果行列式中有一行为零，那么行列式为零。

性质三　如果行列式中某一行是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式之和。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质四　对换行列式中两行的位置，行列式反号。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

性质五　如果行列式中有两行成比例，那么行列式等于零。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix} = 0$$

性质六　把某一行的倍数加到另一行，行列式不变。

如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

3.行列式按某一行(列)展开

子式：设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

以，a_{ij} 表示D中位于第i行（$i=1,2,3$）第j列（$j=1,2,3$）的元素，在D中划去第i行，第j列的元素，剩下的元素按原顺序组成一个二阶行列式称为a_{ij} 的子式，记为M_{ij}，例如a_{12}的子式 $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$，$a_{32}$的子式 $M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ 等等。

代数余子式：子式冠以符号称为代数余子式，a_{ij}的代数余子式记为 A_{ij}，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，例如a_{12}的代数余子式为$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+2}M_{12}$，$a_{32}$的代数余子式为 $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ 等等。

定理：行列式的值等于它的某一行（列）与其代数余子式之积的和；行列式的某一行（列）与另一行（列）的代数余子式之积的和等于零。即

$$\begin{cases} a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+a_{k3}A_{k3}=D & (k=1,2,3) \\ a_{k1}A_{j1}+a_{k2}A_{j2}+a_{k3}A_{j3}=0 & (k\neq j;k,j-1,2,3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+a_{3k}A_{3k}=D & (k=1,2,3) \\ a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+a_{3k}A_{3j}=0 & (k\neq j;k,j=1,2,3) \end{cases}$$

上两组式子又可缩写为

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ki}A_{ji}=\begin{cases} D & k=j \\ 0 & k\neq j \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ik}A_{ij}=\begin{cases} D & k=j \\ 0 & k\neq j \end{cases}$$

三阶行列式的有关概念及其各种性质，除掉按对角线法则展开外（三阶），几乎可以逐字逐句的推广到高阶行列式去。

（二）高阶行列式

1.四阶行列式： 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$$

其中A_{1j}，$j=1$，2，3，4，是由四阶行列式中去掉第一行及第j列而余下来的三阶行列式再乘以$(-1)^{1+j}$，例如

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

余类推。仿此可定义五阶，…直至$n-1$阶行列式 。

2. n阶行列式： 定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

其中A_{1j}, $j=1,2,\cdots,n$，是由n价行列式中去掉第一行及第j列而余下来的n-1价行列式再乘以$(-1)^{1+j}$，并称A_{1j}是a_{1j}的代数余子式。a_{ij}的代数余子式仿上定义。例如，a_{23}的代数余子式A_{23}：

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. n阶行列式的性质与三阶相仿，这里不再重复。

（三）克莱姆法则

1.非齐次线性方程组

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式$D\neq 0$，那么方程组有解，并且解是唯一的，表示成：

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

其中D是方程组的系数行列式；D_i是把D中第i列（即x_i的系数）的元素换成常数 b_i（$i=1,2,\cdots,n$） 所构成的行列式。

2.齐次线性方程组

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式$D\neq0$，那么这个方程组只有零解。可以证明这个方程组有非零解的充要条件是系数行列式$D=0$。

（四）消元法

克莱姆法则在理论上是一个十分完善的结果，但在具体应用克莱姆法则求解时，要计算$n+1$个n阶行列式，计算量很大，所以，在解线性方程组时，一般用消元法来计算。

1.线性方程组的初等变换：若对于方程组进行下列变换：

（1）用一个非零的数乘一个方程；

（2）用一个数乘一个方程加到另一个方程上去；

（3）互换两个方程的位置。

则称变换(1)，(2)，(3)为线性方程组的初等变换。

2.同解定理：初等变换把方程组变成与它同解的方程组。

3.阶梯形方程组定理：

如果方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

的系数行列式$D \neq 0$，则此方程组可用初等变换化成形如

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\
\qquad\quad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\
\qquad\qquad\qquad c_{33}x_3 + \cdots + c_{3n}x_n = d_3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n
\end{cases}
$$

的阶梯形同解方程组，其中c_{11}，c_{22}，$\cdots$，c_{nn}全不为零。

若把第i个方程($i=1, 2, \cdots n$)同时除以$c_{ii} \neq 0$，则上述阶梯形方程组又可化为

$$
\begin{cases}
x_1 + c'_{12}x_2 + c'_{13}x_3 + \cdots + c'_{1n}x_n = d'_1 \\
\qquad\quad x^2 + c'_{23}x_3 + \cdots + c'_{2n}x_n = d'_1 \\
\qquad\qquad\qquad x_3 + \cdots + c'_{3n}x_n = d'_1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = d'_n
\end{cases}
$$

其中 $c'_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{c_{ii}}$，$j>i, i=1,2,\cdots,n-1$； $j=i+1, i+2, \cdots, n$.

$d'_i = \dfrac{d_i}{c_{ii}}$.对这个方程组继续进行第二种初等行变换：

第i个方程减去第n个方程 的 c'_{in} 倍就消去了含x_n的项

($i=1,2,\cdots,n-1$)； 又第i个方程减去第 $n-1$ 个方程的

$c'_{i,n-1}$ 倍又消去了含x_{n-1}的项（$i=1,2,\cdots,n-2$）；……，最后从第一个方程减去第二个方程的 c'_{12}倍。便得方程组的解

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad = e_1 \\ \quad x_2 \qquad\qquad\quad = e_2 \\ \qquad x_3 \qquad\qquad = e_3 \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = e_n = d'_n \end{cases}$$

其实，在作初等变换简化方程时，只是对这些方程的系数进行变换，为了简单起见可将未知量省略不写，而将系数列成一个表即矩阵，进行行变换，这样做既简单而又不易出错，试看下列例题。 用（i）表示第i行 。

例：解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ x_1+x_2+x_3+4x_4+x_5=-2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+5x_5=5 \end{cases}$$

解：用消元法进行计算

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{(4)-(1)\\(5)-(1)}]{\substack{(2)-2(1)\\(3)-(1)}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{-(3)\leftrightarrow(2)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & -3 & -1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{(4)+(1)\\(5)+(-1)}]{(3)+3(1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & -7 & -1 & -1 & -7\\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & -5\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}(5)\to(3)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & 7\\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow[(5)+2(3)]{(4)-7(3)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 14\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & -7\end{pmatrix}\xrightarrow{(5)-3(4)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 14\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -49 & -49\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(5)\div(-49)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 14\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[(4)-15(5)]{\substack{(1)-(5)\\(3)+2(5)}}$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\xrightarrow{(1)-(3)}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[(2)+2(3)]{(1)-(3)}
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\xrightarrow{(1)-2(2)}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

最后一个表称为行简化阶梯形矩阵，根据行简化阶梯形矩阵立刻可得方程组的解为（1，－1，1，－1，1）。

用消元法解线性方程组时，不必先计算系数行列式是否为零，系数行列式等于零的情况如何计算，将在下面讨论。

（五）线性方程组

当方程的个数与未知数的个数不相等时，克莱姆法则不再适用，需要引入向量和矩阵的概念，先看实例。

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = a \\ 2x_1 - 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

问a为何值时（1）有解；a为何值时（1）无解，在有解时求出它的解。

解 $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & -2 & a \\ 2 & -2 & -11 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3)-4(1)\\(4)-2(1)}]{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & -6 & a-4 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是原方程化为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_1 = 1 \\ 5x_3 - 2x_4 = 2 \\ 0x_4 = a - 10 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

于是当$a \neq 10$时（1）无解；当$a = 10$时有解，就$a = 10$解之。

因 $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{11}{5}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

故得

$$\begin{cases}x_1 = x_2 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{11}{5}\\ x_3 = \qquad \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5}\end{cases} \tag{3}$$

任选 $x_4 = 5c_2$，$x_2 = c_1$，代入（3）则 $x_1 = c_1 + c_2 + \frac{11}{5}$，$x_3 = 2c_2 + \frac{2}{5}$. 于是（3）即（1）的解为

$$(c_1 + c_2 + \frac{11}{5}, c_1, 2c_2 + \frac{2}{5}, 5c_2)$$

可见（1）有无穷多组解，（3）称为（1)的一般解，在(3)中x_2，x_4称为自由未知量.

由上例及克莱姆法则看出：一般线性方程组有三种可能情况：有唯一解，有无穷多解或无解。因此，对于一般的线性方程组，如何判断有没有解，如有无穷多解，那么这些解之间又有什么关系等等是我们要研究的一系列问题。

1. 矩阵

（1）定义：由$s\times n$个数排成的s行n列的表

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\end{pmatrix} \tag{4}$$

称为一个 $s \times n$矩阵。(4) 中的数 a_{ij} ($i=1,2,3\cdots n$; $j=1,2,3\cdots s$) 称为矩阵的元素，i 称为行标，j称为列标。矩阵常用A，B，…或者 (a_{ij})，(b_{ij})，…或者A_{sn}，B_{sn}…或者 $(a_{ij})_{s\times n}$，$(b_{ij})_{s\times n}$，…表示。

矩阵A的行数、列数皆为n时称A为n级方阵。

两矩阵的行、列数分别相等，并且对应元素都相等，就称这两矩阵相等。

(2) 矩阵的初等行变换：是指对于矩阵施行下列三种变换

① 用一个非零数乘矩阵的一行；

② 把矩阵某行的k倍加到另一行上去；

③ 互换矩阵中两行的位置。

(3) 行简化阶梯形矩阵：是指满足下列三条件的矩阵

① 零行在下方（如果有的话）；

② 各行首非零元的列标随着行标的递增而严格增大；

③ 各行首非零元都是 1，并且所在列的其余元素全为零。只满足(1)及(2)者称为阶梯形矩阵。例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

分别是阶梯形矩阵及行简化阶梯形矩阵。

可以证明，**任意一个矩阵总可以经过一系列初等行变换变成阶梯形矩阵，从而可以变成行简化阶梯形矩阵。**

2. 线性方程组有解的充要条件：