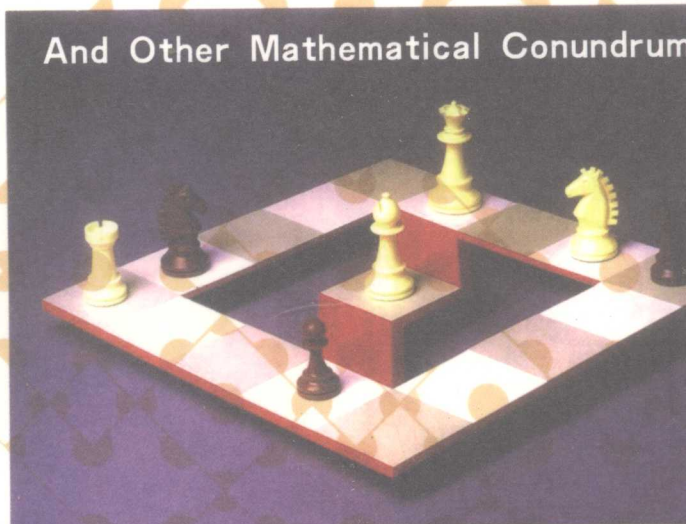




开放人文

# How to Cut a Cake

And Other Mathematical Conundrums



[英] 伊恩·斯图尔特 著 汪晓勤 邹佳晨 陈慧 译

Ian Stewart

## 如何切蛋糕 以及其他数学谜题

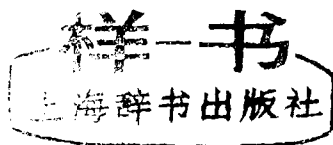
上海世纪出版集团

# 如何切蛋糕

## 以及其他数学谜题

[英] 伊恩·斯图尔特 著

汪晓勤 邹佳晨 陈慧 译



世纪出版集团 上海辞书出版社

图书在版编目(CIP)数据

如何切蛋糕:以及其他数学谜题/(英)斯图尔特著;汪晓勤,邹佳晨,陈慧译.  
—上海:上海辞书出版社,2009.8  
(世纪人文系列丛书)  
ISBN 978-7-5326-2907-7

I. 如... II. ①斯...②汪...③邹...④陈... III. 数学—普及读物 IV. O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第130568号

---

责任编辑 彭江杰 董放 李黎  
装帧设计 陆智昌 朱赢椿

---

如何切蛋糕——以及其他数学谜题

[英]伊恩·斯图尔特 著  
汪晓勤 邹佳晨 陈慧 译

出 版 世纪出版集团 上海辞书出版社  
(200040 上海陕西北路457号 www.ewen.cc www.cishu.com.cn)  
发 行 上海世纪出版集团发行中心  
印 刷 上海市江杨印刷厂  
开 本 635×965mm 1/16  
印 张 14.25  
插 页 4  
字 数 171 000  
版 次 2009年8月第1版  
印 次 2009年8月第1次印刷  
ISBN 978-7-5326-2907-7/O·63  
图 字 09-2008-653  
定 价 28.00元

## 出版说明

自中西文明发生碰撞以来，百余年的中国现代文化建设即无可避免地担负起双重使命。梳理和探究西方文明的根源及脉络，已成为我们理解并提升自身要义的借镜，整理和传承中国文明的传统，更是我们实现并弘扬自身价值的根本。此二者的交汇，乃是塑造现代中国之精神品格的必由进路。世纪出版集团倾力编辑世纪人文系列丛书之宗旨亦在于此。

世纪人文系列丛书包涵“世纪文库”、“世纪前沿”、“袖珍经典”、“大学经典”及“开放人文”五个界面，各成系列，相得益彰。

“厘清西方思想脉络，更新中国学术传统”，为“世纪文库”之编辑指针。文库分为中西两大书系。中学书系由清末民初开始，全面整理中国近现代以来的学术著作，以期为今人反思现代中国的社会和精神处境铺建思考的进阶；西学书系旨在从西方文明的整体进程出发，系统译介自古希腊罗马以降的经典文献，借此展现西方思想传统的生发流变过程，从而为我们返回现代中国之核心问题奠定坚实的文本基础。与之呼应，“世纪前沿”着重关注二战以来全球范围内学术思想的重要论题与最新进展，展示各学科领域的新近成果和当代文化思潮演化的各种向度。“袖珍经典”则以相对简约的形式，收录名家大师们在体裁和风格上独具特色的经典作品，阐幽发微，意趣兼得。

遵循现代人文教育和公民教育的理念，秉承“通达民情，化育人心”的中国传统教育精神，“大学经典”依据中西文明传统的知识谱系及其价值内涵，将人类历史上具有人文内涵的经典作品编辑成为大学教育的基础读本，应时代所需，顺时势所趋，为塑造现代中国人的人文素养、公民意识和国家精神倾力尽心。“开放人文”旨在提供全景式的人文阅读平台，从文学、历史、艺术、科学等多个面向调动读者的阅读愉悦，寓学于乐，寓教于心，为广大读者陶冶心性，培植情操。

“大学之道，在明明德，在新民，在止于至善”（《大学》）。温古知今，止于至善，是人类得以理解生命价值的人文情怀，亦是文明得以传承和发展的精神契机。欲实现中华民族的伟大复兴，必先培育中华民族的文化精神；由此，我们深知现代中国出版人的职责所在，以我之不懈努力，做一代又一代中国人的文化脊梁。

上海世纪出版集团  
世纪人文系列丛书编辑委员会  
2005年1月

# 前 言

有时，当我感到异常放松，思想开始遨游时，我就在想：如果人人都像我这样喜欢数学，世界将会是怎样的？电视新闻将不再报道俗丽的政治丑闻，转而把代数拓扑学上的最新定理作为头条新闻；青少年会把顶级的定理下载到他们的 mp3 中，卡里普索\*的演唱者(还记得他们吗?)将用吉他弹奏“引理 3”的曲调……这使我想起民歌歌手斯坦·凯利[现名斯坦·凯利-布特尔(Stan Kelly-Bootle)，可以在 Google 上查询此人]曾经写过的一首歌，那是 20 世纪 60 年代他在华威大学攻读数学专业硕士学位时写的。歌的开头是这样的：

引理 3 很漂亮，它的逆命题也很优雅，  
但只有上帝和费马知道哪个真哪个假。

---

\* 特立尼达岛上土人即兴演唱的歌曲。——译者

无论如何，我总把数学当作灵感和快乐的源泉。我知道它给多数人带来的纯粹是恐惧，而不是乐趣。对于这种观点，我不敢苟同。理性地说，我能理解人们普遍害怕数学的原因：当你希望用一两个吓人的空洞术语来灰溜溜地逃避麻烦时，再也没有比一门要求绝对精确的学科更糟糕的事了。但感性地说，我很难理解，为什么这样一门对我们所居住的世界如此重要、拥有如此悠久而精彩的历史、饱含人类所作的最辉煌顿悟的学科，竟未能引起人们的兴趣，未能让人们着迷。

另一方面，鸟类观察和研究者们也觉得很难理解，为什么这个世界上其他人都不能分享他们在项目清单上打钩的热情。“我的天，那不是小凤头傻瓜\*的繁殖羽吗？英国最近记录的一只是1834年在斯凯岛上观测到的，并且那一只还‘犹抱琵琶半遮面’——噢，不，那实际上不过是一只尾巴上沾了泥的椋鸟而已。”并非有意冒犯——我收集岩石。“噢！真正的阿斯旺花岗岩！”我们的房子里满是这个星球的碎片——各种各样的岩石。

大多数人说到“数学”这个词，指的就是常规的算术，这很可能是对数学不感兴趣的另一个原因。如果你会做数学，那么它是很有趣的，尽管看上去有点傻傻的。如果你不会做，那么它就很恐怖。此外，不管是数学研究还是鸟类观察，如果有人手握一支红笔，高高在上，就等着你犯点小错，这样他们就能趁机跳进来，胡乱评改一气，那么，你很难对其产生兴趣。（这里我采用了比喻的说法，它以往常常是字面上的意思。）毕竟，朋友之间一两个小数点算什么呢？但在全国课程与学生们对它的理解之间存在着差距，这种差距表明数

---

\* 指小凤头燕鸥。繁殖于北非、红海、波斯湾、印度、东南亚、菲律宾、马来西亚至澳大利亚北部。邻近海洋也有分布。十分罕见。——译者

学的趣味似乎已蜕变成一种傻气。这很可惜。

我并不是在宣称《如何切蛋糕》一书将对公众的数学能力产生巨大影响，尽管我是这样假设的。（以何种方式……那是另一回事。）这里我所试图去做的不过是给信徒们讲道。这是一本为数学迷、热心人、酷爱数学者、相信游戏能带来很多快乐的童心不改者写的书。斯派克·格勒尔(Spike Gerrell)绘制的令人愉悦的漫画加强了轻松的氛围，这些漫画完美地抓住了探讨的精神。

然而，本书的目的却是极为严肃的。

实际上，我曾想把书名定为《数学娱乐的武器》(Weapons of Math Distraction)，在我心目中，这个书名更准确地表达了严肃与轻松之间的平衡。我或许应当感谢销售部的否决。但取现在这个“蛋糕取向”的书名也存在风险，有些读者可能是想获取烹饪技术指导而买这本书。对此我申明：本书内容是具有数学性质的谜题和游戏，而不是烹饪。蛋糕实际上就是波莱尔测度空间。

隆重伪装成……一块蛋糕。数学教给我们的并不是如何做蛋糕，而是任意多个人之间如何均分蛋糕。并且，更难的是，不引起嫉妒。切蛋糕问题为资源分享的数学理论提供了简单入门知识。和多数数学入门知识一样，切蛋糕问题也是一种专业人士所称的“玩具模型”——由现实世界中的事物经过大大简化而得。但它促使你去思考一些关键性的问题。例如，它揭示了如下事实：几个竞争群体公平分配资源，当各群体对资源持有不同的价值观时，分配起来就更容易。

与我以前出版的《游戏，集合与数学》(Game, Set and Math)、《你让我走进另一个数学佳境》(Another Fine Math You've Got Me Into)和《数学癡病》(Math Hysteria)(此书和本书一样，由牛津大学出版社出版)诸书一样，本书源于我在1987年至2001年之间为《科



学美国人》及其外文翻译版所写的数学游戏专栏文章。我对所有专栏文章均已作了适当的校订，对所有已知的错误都已进行了纠正，对新发现的若干错误也已作了介绍。读者的评论放在“反馈”之中。我增加了若干由于杂志版面所限未能收入的材料，有点像“导演的剪裁部分”。从图论到概率论，从逻辑学到极小曲面，从拓扑学到准晶体，本书话题涉猎甚广。当然，还有蛋糕分配。话题的选择主要出于娱乐价值的考量，而不是从重要性方面来考虑。所以，请不要想象成本书内容完全代表了当前数学研究前沿。

不过，本书的确反映了当前研究前沿的活动。切蛋糕这一炙手可热的问题乃是悠久的数学传统——在轻松情境中提出严肃问题——的一部分，它至少可以上溯到3500年前的古巴比伦时期。在本书里，当你读到“电话线何以缠结”时，该话题并非只是在整理话机与话筒之间乱成一团的连线时才有用。最好的数学都具有奇妙的普适性，一些思想源于某个简单问题，最终却可以用来解决许多别的问题。现实世界中，许多事物都会扭转：电话线、植物藤蔓、DNA分子以及海底通信电缆。扭转数学的这四大应用在许多重要方面都截然不同：如果电信工程师拿走你的电话线，并代之以一段缠绕性旋花类植物的话，你当然有理由感到不安。但它们在一个重要方面也有共同点：它们都可用同一个简单的数学模型来解释。这个模型可能并不能回答你想要回答的每一个问题，也可能会忽略某些重要的实际问题，但是，一旦简单的模型开启了数学分析之门，在其基础上就能发展出更复杂、更详尽的模型。

这里，我的目标是将抽象思维与现实世界相结合，以激发出各种不同的数学思想。对我来说，回报不仅仅在于获取现实问题的实用解法。主要的回报是获得新数学。不可能在寥寥数页里就开发出数学的重要应用，但对于想象力足够丰富的人来说，却有可能欣赏从一

种情境中导出来的数学思想是如何出人意料地运用到另一个不同情境之中的。或许，本书中最好的例子就是“帝国”与电路之间的关联。这里，一个奇怪且人为的地月图着色难题(第9章)竟在电路板缺陷检测(第10章)这一重要问题上大显身手。关键是，数学家们先在一个轻松的情境中(当然，并不像本书所描述的那么轻松)偶遇核心思想，之后，这种思想的严肃应用才变得显而易见。

数学应用还有别的方式。第15章的数学问题是受一类亚洲萤火虫异乎寻常行为的启发。雄性萤火虫同步发光——很可能是为了提高吸引异性的集体能力(而不是个体能力)。闪光是怎么变同步的呢?这里，首先有严肃的问题，接着数学处理这个问题，并至少提供了部分解答，之后人们才明白，同样的数学可以用来解决其他许多同步性问题。我的方法是把整件事转化为一个易于操作的棋盘游戏。故事有一个出人意料的转折：该游戏中一些貌似十分简单的问题至今仍未得到解决。从某种意义上说，我们对实际应用的理解胜过对简单模型的理解。

除了极少数例外，本书每一章内容都是独立的。你可以从任何一章开始读，如果出于什么原因卡住了，你可以放弃这一章，转而去读另一章。我相信，你对于数学这门学科有多么的渊博，数学较之学校里教过的任何其他学科有多么的深远，数学的应用范围有多么的广阔，整个数学学科融为一体时会有多么的强大，都将产生更深刻的理解。一切都是通过解谜题和玩游戏得到的。

更重要的是，还要通过拓展你的思维才能产生这种理解。

决不能低估游戏的力量。

伊恩·斯图尔特

2006年4月于考文垂

## 目录

### 1 前言

---

|     |                   |
|-----|-------------------|
| 1   | 1 你那一半比我这一半大!     |
| 9   | 2 否定平均律           |
| 23  | 3 算术与鞋带           |
| 35  | 4 失悖论             |
| 45  | 5 密封的沙丁鱼罐头        |
| 57  | 6 无尽的棋局           |
| 67  | 7 quods 和 quazars |
| 75  | 8 零知识协议           |
| 83  | 9 月球上的帝国          |
| 95  | 10 帝国与电子学         |
| 107 | 11 复活洗牌法          |
| 117 | 12 双气泡的艰辛         |

|     |    |              |
|-----|----|--------------|
| 127 | 13 | 砖瓦厂的交叉线      |
| 135 | 14 | 无嫉妒的分割       |
| 145 | 15 | 猛发光的萤火虫      |
| 157 | 16 | 电话线何以缠结      |
| 167 | 17 | 无所不在的谢尔宾斯基垫片 |
| 179 | 18 | 保卫罗马帝国!      |
| 187 | 19 | 三角形移除        |
| 197 | 20 | 复活节是个准晶体     |

---

|     |  |          |
|-----|--|----------|
| 205 |  | 进一步阅读的文献 |
|-----|--|----------|

你那一半比我这一半大！



两人欲分蛋糕而无争议,则自古以来的解决方法是“我切,你选”。在两人以上的情形,问题变得出人意料地棘手,人越多,问题就越棘手。除非你用一把慢慢移动的刀去切开困难……以及蛋糕。

一个大个子和一个小个子坐在火车的餐车里，他俩都点了鱼。当服务生把菜端上时，只见一条大鱼和一条小鱼。大个子先选，立即拿了大鱼；小个子抱怨说，这样做极不礼貌。

大个子忿忿地问：“如果让你先选，你会怎么做？”

“我会很礼貌，拿那条小鱼。”小个子沾沾自喜地说。

“很好，这就是你该得的！”大个子回答。

正像这个古老的笑话所说明的那样，不同的人在不同的环境中会对事物作出不同的评价，众口难调。在过去 50 年中，数学家们一直在设法解决公平分割问题(通常用蛋糕来说明，而不是鱼)，现在已形成了一套博大精深的理论。罗伯逊(Jack Robertson)和韦布(William Webb)的畅销书《切蛋糕算法》(*Cake Cutting Algorithms*)(详见“进一步阅读的文献”)对整个领域作了考察。在本章和第 14 章，我们将讨论其中的一些思想，这些思想即源于“分割蛋糕让人人满意”这一貌似简单的问题。

最简单的情形只涉及两个人。重申一下，他们要分蛋糕，且都觉得分法很公平，皆大欢喜。这里的“公平”是指，“在我看来自己的一份要多于一半。”分享者可能会对给定的任何一份蛋糕的价值都持有不同意见。例如，爱丽思喜欢樱桃而鲍勃则偏爱酥皮。从分蛋糕理论中产生的一个更奇怪的观点是，当分享者对哪一份更好持有不同看法时，蛋糕就更好分。从上例中即可看到这一点，因为我们可以把酥皮分给鲍勃，把樱桃分给爱丽思，两人各取所爱。如果两人都想要酥皮，问题就更麻烦了。

在两个人的情形，问题并不是特别困难。“爱丽思切，鲍勃选”这一分法可以上溯到2800年前！双方对最终结果并没什么理由好抱怨，在这个意义上说，他们都觉得结果是公平的。如果爱丽思不喜欢鲍勃留下的那一份，那么，这是她自己的错，未能再仔细一点把蛋糕均分(据她自己的估计)。如果鲍勃不喜欢他的那一份，那是因为他自己作了错误的选择。

在三个人的情形，整个领域开始变得有趣起来。汤姆、迪克和哈里分蛋糕，每人根据各自的估计，都觉得自己至少分得三分之一，于是皆大欢喜。顺便指出，在所有情形中，都假定蛋糕无限可分，尽管当蛋糕具有一定大小的“原子”(指至少被一个接受者赋予了非零值的单个点)时，该理论多半仍然成立。不过，简单起见，我假定“原子”不存在。罗伯逊和韦布通过分析似是而非的答案解决了这一情形，过程如下：

第一步：汤姆把蛋糕切成  $X$  和  $W$  两块，在他看来， $X$  占  $1/3$ ， $W$  占  $2/3$ 。

第二步：迪克把  $W$  切成  $Y$  和  $Z$  两块，在他看来，每一块均为  $W$  的  $1/2$ 。

第三步：哈里从  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  中选择他喜欢的一块。汤姆从剩下的两块中选一块。迪克拿最后一块。

这种算法公平么？

显然，哈里是满意的，因为他先挑。汤姆也是满意的，不过原因稍稍复杂一些。若哈里选  $X$ ，则汤姆只能选  $Y$  和  $Z$  中他认为较大的那块(或者在他看来  $Y$  和  $Z$  大小相同)。由于他认为  $Y$  和  $Z$  共占  $2/3$ ，因此，他必认为至少其中有一块占  $1/3$ 。另一方面，若哈里选  $Y$  或  $Z$ ，则汤姆可选  $X$ 。



然而，迪克可能对结果并不满意。如果他不同意汤姆的第一次切法，可能会觉得  $W$  要少于  $1/3$ 。那么只有  $X$  能让他满意。但哈里也可选  $Y$ ，汤姆可选  $X$ ，因而迪克只能取  $Z$ ——他不想要的那一份。

因此，上述算法是不公平的。对于公平三分问题的第一个正确解法是由斯泰因豪斯(Hugo Steinhaus)于1944年给出的。斯泰因豪斯和一群波兰数学家定期在利沃夫的一家咖啡馆里聚会。他的方法涉及一种叫“修剪”的技术：

第一步：汤姆把蛋糕切成  $X$  和  $W$  两块，在他看来， $X$  占  $1/3$ ， $W$  占  $2/3$ 。

第二步：汤姆把  $X$  递给迪克，如果迪克认为这部分超过  $1/3$ ，就将其修剪成  $1/3$ ，如果不超过  $1/3$ ，就将其置于一边。我们把所得的那块记为  $X^*$ ：它要么就是  $X$ ，要么小于  $X$ 。

第三步：迪克把  $X^*$  递给哈里，哈里要么接受，要么拒绝。

第四步：(a)若哈里接受  $X^*$ ，汤姆和迪克就把剩下的蛋糕—— $W$  加上从  $X$  上修剪下来的碎片——堆在一起，并把它看成单独一块(零乱的)蛋糕。对其施以“你切，我选”法。(b)若哈里拒绝  $X^*$ ，且迪克修剪过  $X$ ，则迪克取  $X^*$ ，而汤姆和哈里对剩余部分施以“你切，我选”法。(c)若哈里不接受  $X^*$ ，且迪克也不曾修剪  $X$ ，则汤姆取  $X$ ，迪克和哈里对剩余部分施以“你切，我选”法。

这是其中的一种解法(我把这里的逻辑证明留给你)。一般地说，任何一个对自己所得感到不满意的人，先前一定作出过错误的选择，或切的时候判断失误，这种情况下，他只能怪自己了。