奥林匹克数学导读与训练

初一年级

周春荔 主编

农村读物出版社

前言

初中阶段对每个孩子都是极为重要的智力发展时期，也是青少年思维发展的重要时期。在初中阶段，数学是一门重要的基础课。在此期间，要学习有理数、代数式、解方程等知识，逐步实现从算术到代数的飞跃；还要学平面几何，实现从几何入门到推理几何的飞跃。通过初中阶段的学习，为后继学习打下坚实的基础。对于广大的初中数学爱好者来说，初中数学课本的知识点和知识体系远远是“吃不饱的”，需要课外的、与教学基本同步的学习材料来补充营养。本书就是适应这种需求而写作的。比如关于整数数论的基本知识，关于平面几何的基本训练，我们都作了相应的补充。实践证明，学好这些知识对发展数学思维必将受益无穷。“学习几何能锻炼一个人的思维”，“解答数学题，最重要的是培养一个人的钻研精神”。这些至理名言在现阶段更应引起每个数学教育工作者的重视与深思。

在我国全面建设小康社会的过程中，需要造就数以亿计的高素质劳动者、数以千万计的专门人才和一大批拔尖创新人才。很显然，要造就这样的人才在初中义务教育阶段就必须夯实数学基础。因为数学是锻炼思维的体操，是打开科学大门的钥匙。数学是宇宙的语言。数学是具有创新意识的知识主体，数学为学生个体施展才华提供了广阔的知识空间。学好数学对创新型人才的培养是十分重要的。

本书属于竞赛数学的普及读物，是课外益智读本，读者对象定位于对数学感兴趣的初中学生。按年级分为三册，知识依次递

进，课内与课外内容交互穿插，与教材同步，又是教材的补充。引导中学生在学好教材基础知识的前提下，开拓数学视野，激发对数学的兴趣，通过知识与习题的演练，领悟数学的思维方法。数学抽象但并不神秘，奥林匹克数学灵活有趣但并非高不可攀。刻苦学习是前提，打好基础是关键，适量必要的演练是保证。本书通过导读与训练，引导初中数学爱好者走近奥林匹克数学，学习奥林匹克数学。学数学没有轻松取胜之路。因此，学习数学一定要聚精会神，要刻苦。要多动手，多动脑，多问几个为什么。阅读本书，可以先看例题，再做习题。做不出，有困难，可以问老师，也可以与同学们互相切磋，还可以索性不去管它。有兴趣、有时间就读一两页，无兴趣、无时间就放手不读。总之，开篇有益，不读也无妨。以一种平常的心态来读这套课外读物，它一定会引导你学好数学的。

总之还是那句老话：

千里之行，始于足下，勤奋进取，才能成功。

编　者

2003年5月

目录

一、

整数的多项式表示法

整数论在数学领域里占有非常重要的地位，是一个古老而历史悠久的课题．整数问题涉及的知识不多，解法灵活多变，技巧独特，所以在初中数学竞赛中经常出现这类题目来考查学生的智力和能力．本节介绍整数的多项式表示法．

一个十进制的多位整数应该如何表示呢？比如以字母 a、b、c、d 为数码组成的四位数，如果表示为 $abcd$，那么很容易与 $a\times b\times c\times d$ 相混淆．所以我们通常总是把数字及它所在数位的单位一起表示出来，将这个四位数表示为

$$a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$$

一般地，一个十进制的 $n+1$ 位正整数 N 可以表示为：

$$N=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0$$

其中 a_i 都是整数且 $0\leqslant a_i\leqslant9$（$i=0$，1，2，…，n），$a_n\neq0$．简记为 $N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$．

这种表示法称为整数的多项式表示法，a_n 叫做这个整数的首位数字，a_0 叫做这个整数的末（个）位数字．

例 1　一个两位数，它的个位数字与十位数字之和的 3 倍等于原数减 2．求这个两位数．

解：设这个两位数为 $\overline{ab}$，则依题意有

$3(a+b)=\overline{ab}-2$　即 $3(a+b)=10a+b-2$

化简得　$7a-2=2b$．　$\because 0\leqslant b\leqslant9$，　$\therefore 0\leqslant 2b\leqslant18$．$\therefore 1\leqslant a\leqslant2$．又 $2b$ 是偶数，$\therefore 7a-2$ 是偶数，知 $7a$ 是偶数，故 $a=2$，于是 $b=6$．因此，所求的两位数是 26．

例 2　有一个四位数，其十位数字减去 2 等于个位数字，个位数字加上 3 等于百位数字，将这个四位数的四个数字反序排列

所成的数与原数之和等于 8877. 试求这个四位数.

分析：有关这个四位数的信息都是它的各个数位上的数字之间的关系，所以考虑利用整数的多项式表示法来反映已知条件，进而确定各位数字.

解：设所求的四位数为$\overline{abcd}$，则

$$\overline{abcd}=a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$$

根据题意有

$$a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d+d\times10^3+c\times10^2+b\times10+a=8877$$

即$(a+d)\times10^3+(b+c)\times10^2+(b+c)\times10+(a+d)=8877$

比较等式两边首、末两位数字，得 $a+d=7$，于是 $b+c=17$. 又由于 $c-2=d$，$d+3=b$，所以有 $b-c=1$，解得 $a=1$，$b=9$，$c=8$，$d=6$.

∴所求的四位数为 1986.

例 3 从 1 开始的若干连续自然数的和等于一个各位数字都相同的三位数. 应取几个连续的自然数?

分析：假设取 n 个连续的自然数，则由题意可知 $1+2+\cdots+n=\overline{ccc}$

从上式入手，利用自然数的十进制表示以及等差数列求前 n 项和公式，寻求 n 的值.

解：形如$\overline{ccc}$的三位数可表示为：

$$\overline{ccc}=c\times10^2+c\times10+c=111c=37\times3c$$

这里 c 是数字 1，2，…，9 中的一个.

$\because 1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\therefore n(n+1)=2\times37\times3c$

于是，或者 n 是 37 的倍数，或者 $n+1$ 是 37 的倍数.

若 $n=37k$，则有 $k(37k+1)=6c$，而 $6\leqslant6c\leqslant54$，

$\therefore k=1$，于是 $n=37$，则$\dfrac{n(n+1)}{2}=703$，不合题意.

若 $n+1=37k$，则有 $k(37k-1)=6c$，k 只有一个可能的值 $k=1$，这时 $\frac{36\times 37}{2}=666$，符合要求.

综上可知，$n=36$，即应取 36 个连续自然数.

例 4 求满足以下条件的三位数：(1) 它的各位数字互不相同；(2) 它等于所有由它的数字组成的两位数之和.

解：设所求的三位数为 $\overline{abc}$，则 a，b，c 均不相等，并且有

$$\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{cb}+\overline{ca}$$

利用自然数的十进制表示将上式化为

$$100a+10b+c=10a+b+10b+c+10a+c+10b+a+10c+b+10c+a$$

化简得 $26a=4b+7c$

$\because 0\leqslant b\leqslant 9$，$0\leqslant c\leqslant 9$ $\therefore 26a\leqslant 99$ $\therefore a<4$.

故 $a=1$，2，3.

当 $a=1$ 时，$26=4b+7c$，则 c 必为偶数. 若 $c=2$，则有 $4b=12$ 得 $b=3$；若 $c\geqslant 4$，则有 $4b+7c\geqslant 28$，b 无解. 因此 $a=1$ 时，$b=3$，$c=2$.

当 $a=2$ 时，$52=4b+7c$，同上方法可求得 $c=4$，$b=6$.

当 $a=3$ 时，$78=4b+7c$，可求得 $c=6$，$b=9$.

综上，满足条件的三位数有三个：132，264，396.

例 5 证明：不存在这样的三位数 $\overline{abc}$，使 $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ 成为完全平方数.

分析：我们知道，如果 n 是完全平方数，则 $n=m^2$，m 为自然数. 要证明 $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ 不是完全平方数，需要从定义出发，说明它不能写成某一个自然数的平方. 这就需要改变它的表示形式，以寻求其本质.

证明：设 $n=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$，则

$$\begin{aligned} n &=(100a+10b+c)+(100b+10c+a)+(100c+10a+b) \\ &=111a+111b+111c=111(a+b+c)=3\times 37(a+b+c) \end{aligned}$$

上式说明 n 是质数 37 的倍数. 如果存在自然数 m，使得$n=m^2$，那么 m 也应是 37 的倍数，于是 $n=m^2$ 是 37^2 的倍数，即 $n=37^2k$，其中 k 是自然数. 由此得出

$$3(a+b+c)=37k$$

说明 $3(a+b+c)$ 是 37 的倍数. $\because (3,37)=1$ $\therefore a+b+c$ 是 37 的倍数. 但这是不可能的，因为 a、b、c 都是不超过 9 的数字，所以

$$1<a+b+c\leqslant 3\times 9=27<37$$

从而假设 $n=m^2$ 是不成立的，故对任意三位数$\overline{abc}$，$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$都不可能是完全平方数.

例 6 若将一正整数的末位数字删掉形成一个新整数，则原数是新数的倍数. 求所有具有这样性质的正整数.

解： 首先，所有末位数字是零的正整数都符合条件. 然后我们寻求那些末位数字不是零的符合条件的正整数.

设 $N=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_1\times 10+a_0$，其中 a_i 都是整数，$0\leqslant a_i\leqslant 9$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$，$a_n\neq 0$，$a_0\neq 0$，则删掉末位数字形成的新数为

$$M=a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_2\times 10+a_1$$

要使 N 是 M 的倍数，即$\dfrac{N}{M}$是整数，则

$$\frac{N}{M}=\frac{10(a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_2\times 10+a_1)+a_0}{a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_2\times 10+a_1}$$

$$=10+\frac{a_0}{a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_2\times 10+a_1}$$ 为整数，

于是 $a_n\times 10^{n-1}+a_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+a_2\times 10+a_1$ 只能是一位整数，所以 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_2=0$，从而 N 至多是一个两位数. 又原整数删掉末位数字后仍为新整数，所以 N 至少是两位数，因此，N 必是两位整数.

设 $N=10a+b$，则 $M=a$，由 $\dfrac{N}{M}=10+\dfrac{b}{a}$ 知 b 是 a 的倍数.

当 $b=a$ 时，N 为 11，22，33，44，55，66，77，88，99；

当 $b=2a$ 时，N 为 12，24，36，48；

当 $b=3a$ 时，N 为 13，26，39；

当 $b=4a$ 时，N 为 14，28；

当 b 分别等于 $5a$，$6a$，$7a$，$8a$，$9a$ 时，N 分别为 15，16，17，18，19.

通过上述例题的求解过程可以看出，整数的多项式表示是解决许多整数问题的起点，所以要掌握好有关的基本概念，还要能熟练地运用数式的恒等变形和正确的逻辑推理.

习题一

A 组

1. 填空题

(1) 可用十进制把自然数 $\overline{a_0a_1\cdots a_8a_9}$ 表示为________.

(2) 一个两位数，若将它的数字互换后，所得的数比原数大 9，这样的两位数共有____个.

2. 一个两位数，十位上的数字是个位上数字的 $\frac{2}{3}$，把它的数字颠倒次序写出的数比原数大 18，求这个两位数.

3. 一个三位数的各位数字互不相同，将它的各位上的数字任意交换位置，可得到另外五个三位数. 若这六个三位数之和为 2 220，则在所有满足条件的三位数中，最小的三位数是多少？

4. a 和 b 是彼此不等的非零数字，求 $\overline{ababab}$ 与 4017 的最大公约数.

B 组

1. 设十位数 $N=\overline{a_0a_1a_2\cdots a_9}$ 具有如下性质：a_0 是 N 中数字 0 的个数，a_1 是 N 中数字 1 的个数，…，a_9 是 N 中数字 9 的个数，试求出这个十位数.

2. 求所有的自然数 $N=\overline{a_1a_2\cdots a_n}$，使得 $\overline{2a_1a_2\cdots a_n1}:\overline{1a_1a_2\cdots a_n2}$

$=21:12.$

3. 求所有这样的四位数，在这样的四位数的左边写上 400 后是一个完全平方数.

2. 质数与合数

一个大于 1 的正整数 a，如果除了 1 和 a 以外不能再被其他正整数整除，或者说仅有 1 与 a 这两个正约数，那么 a 叫做质数(又叫素数)；如果除了 1 和 a 以外还能被另外的正整数整除，那么 a 叫做合数. 于是全体正整数可以分为：

数 1——只有一个约数，即 1；

质数——只有两个约数，即 1 和它自身；

合数——多于两个约数.

质数与合数是整数中的重要概念. 在正整数列中质数的分布是不规则的，关于质数与合数，我们有以下结论：

1 既不是质数，也不是合数；

质数有无穷多个，即不存在最大质数；

2 是质数中惟一的偶数，且是最小质数；

互质的数不一定都是质数，如$(4,9,14)=1$；

任何大于 1 的整数都可以分解成质数的乘积，如果不考虑这些质因数的顺序，分解方法是惟一的；

若整数 N（$N>1$）可表示为 $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$，其中 p_i（$i=1$，2，…，n）是质数，且 $p_1<p_2<\cdots<p_n$，α_i（$i=1$，2，…，n）是正整数，则 N 的约数个数为$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$，其中包括 1 和 N 这两个约数. 这个性质也称为约数个数定理.

例 1 若 p 和 q 都是质数，并且关于 x 的一元一次方程$px+$

$5q=97$ 的根是 1，求 p^2-q 的值.

解：把 $x=1$ 代入已知方程得 $p+5q=97$，由此可知 p 与 $5q$ 中有一个为偶数，而 p、q 都是质数，$\therefore p=2$ 或者 $q=2$.

若 $p=2$，则有 $5q=95$，于是 $q=19$，$p^2-q=-15$；

若 $q=2$，则有 $p=87$，$\because 87=3\times29$，$\therefore p$ 不是质数，不符合要求.

故 $p^2-q=-15$.

例 2 求三个质数，使得它们的积为和的 5 倍.

分析：所求三个质数的乘积能被 5 整除，则其中必有一个数是 5，所以再求另外两个质数即可.

解：$\because$所求三个质数的积是和的 5 倍，$\therefore$三个质数的积能被 5 整除，则必有一个质数是 5. 设 p、q 为另外两个质数，则有方程 $5pq=5(p+q+5)$，于是 $pq-p-q+1=6$，即 $(p-1)(q-1)=6$. 易知将 6 分解成两个数的乘积只有两种方式：$6=2\times3=1\times6$.

第一种情形：$p-1=2$，$q-1=3$，得 $q=4$ 不是质数；

第二种情形：$p-1=1$，$q-1=6$，得 $p=2$，$q=7$，所以符合要求的三个质数是 2，5，7.

本题求解过程中将 $pq-p-q=5$，变形为 $pq-p-q+1=6$，进而得到 $(p-1)(q-1)=6$ 的形式. 这一步是很巧妙的，它的作用是将解一个二元一次不定方程的复杂问题转化为解两个二元一次方程组的简单问题，体现了化归的数学思想方法.

例 3 已知 p，$p+2$，$p+6$，$p+8$，$p+14$ 都是质数，则这样的质数 p 共有多少个?

分析：要求符合条件的质数的个数，必须先找出这些质数. 由于质数的分布无一定规律，所以我们从最小的质数开始试验，研究符合条件的质数具有的特征，从而找出所要求的质数.

$\because 2+2=4$，$2+6=8$，$2+8=10$，$2+14=16$ $\therefore 2$ 不适合；

$\because 3+2=5$，$3+6=9$，$3+8=11$，$3+14=17$ $\therefore 3$ 不适合；

$\because 5+2=7$，$5+6=11$，$5+8=13$，$5+14=19$

$\therefore 5$ 符合要求；

$\because 7+2=9$，$7+6=13$，$7+8=15$，$7+14=21$

$\therefore 7$ 不适合；

$\because 11+2=13$，$11+6=17$，$11+8=19$，$11+14=25$

$\therefore 11$ 不适合；

…

观察上面试算的结果，我们猜测符合条件的质数只有 5，这必须加以证明. 证明除了 5 以外的所有正整数都不符合要求. 为此我们只要把正整数按模 5 同余去分类说明就可以了.

解：把正整数按模 5 同余分为五类：$5k$，$5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$（k 为正整数）.

$\because (5k+1)+14=5k+15=5(k+3)$ 为合数；

$(5k+2)+8=5k+10=5(k+2)$ 为合数；

$(5k+3)+2=5k+5=5(k+1)$ 为合数；

$(5k+4)+6=5k+10=5(k+2)$ 为合数.

$\therefore 5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$ 这四类整数中的质数 p 均不能使 $p+2$，$p+6$，$p+8$，$p+14$ 都是质数. 因此 $5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$ 这四类整数中没有符合要求的质数.

对于 $5k$ 这类整数，只有在 $k=1$ 时，$5k$ 才是质数，其余均为合数. 所以只有质数 5 符合条件. 因此 p，$p+2$，$p+6$，$p+8$，$p+14$ 都是质数的 p 只有一个，就是质数 5.

例 4 求证：(1) $1\underbrace{00\cdots0}_{2002个0}1$是合数；(2) $2^{2002}+1$ 是合数.

证明：(1) 数$1\underbrace{00\cdots0}_{2002个0}1$的奇数位数字的和与偶数位数字的和都是 1，所以它的奇数位数字之和与偶数位数字之和的差为零，满足被 11 整除的数的特征，故$1\underbrace{00\cdots0}_{2002个0}1$有约数 11，从而知$1\underbrace{00\cdots0}_{2002个0}1$是合数.

(2) $\because 2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，$\cdots\therefore 2^{4k+1}$的末位数字是 2，$2^{4k+2}$的末位数字是 4，$2^{4k+3}$的末位数字是 8，$2^{4k+4}$的末位数字是 6（$k$ 为非负整数）.

而 $2002=4\times500+2$，$\therefore 2^{2002}$的末位数字是 4，$\therefore 2^{2002}+1$ 的末位数字是 5. 根据被 5 整除的数的特征，$2^{2002}+1$ 有约数 5，且 $2^{2002}+1\neq5$，所以 $2^{2002}+1$ 是合数.

由上面两例的求解过程可以看出：通过对简单或特殊情况的研究去寻求一般性结论或解题思路的方法是解决数学问题的行之有效的常用方法.

例 5 一间屋子里有 100 盏电灯排成一横行，依从左到右的顺序编号为 1，2，3，…，100. 每盏灯有一个拉线开关. 最初所有的电灯都是关着的，现有 100 个学生，第一个学生把凡是编号是 1 的倍数的电灯开关拉了一下；第二个学生把凡是编号是 2 的倍数的电灯开关拉了一下；第三个学生把凡是编号是 3 的倍数的电灯开关拉了一下；…第 100 个学生把编号是 100 的倍数的电灯开关拉了一下. 这个过程结束后，哪些电灯是亮着的？

解：$\because$最初所有的电灯都是关着的，$\therefore$只有那些被拉了奇数次开关的电灯才是亮着的. 而每一盏灯的拉线开关被拉的次数与这盏电灯的编号数字的正约数的个数相同. 因此最后亮着的电灯的编号数字的约数个数必为奇数，由约数个数定理知它们的编号数一定是完全平方数. 所以最后编号为 1，4，9，16，25，36，49，64，81，100 的电灯是亮着的.

例 6 求自然数 N，使得它能被 5 和 49 整除，并且它共有 10 个约数（包括 1 和 N 在内）.

分析：已知 N 的约数个数是 10，且它有质因数 5 和 7，所以考虑从 N 的质因数分解式入手，结合约数个数定理去求 N 的值.

解：把数 N 写成质因数乘积的形式：$N=2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdot$

$7^{\alpha_4}\cdots p_n^{\alpha_n}$，其中 $\alpha_k\geqslant 0$ $(k=1, 2, \cdots, n)$.

∵N能被 5 和 $49(=7^2)$整除，∴有 $\alpha_3\geqslant 1$，$\alpha_4\geqslant 2$，而 N 共有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$个约数，由题意，$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)=10$.

∵该等式左边乘积中至少有两个因数不等于 1，即 $\alpha_3+1\geqslant 2$，$\alpha_4+1\geqslant 3$，∴10 只能分解成“$10=5\times 2$”，故 $\alpha_1+1=\alpha_2+1=\alpha_5+1=\cdots=\alpha_n+1=1$，即 N 只有两个不同的质因数 5 和 7. 由 $\alpha_4+1\geqslant 3>2$ 及 $(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=10$，知 $\alpha_3+1=2$，$\alpha_4+1=5$

∴$N=5^{2-1}\times 7^{5-1}=5\times 7^4=12\ 005$.

例 7 求两个自然数，它们的和是 667，它们的最小公倍数除以最大公约数所得的商是 120.

解： 设所求自然数是 a、b $(a\leqslant b)$，且 $(a, b)=d$，并设 $a=a_1d$，$b=b_1d$，则 $(a_1, b_1)=1$.（把问题向“互质”转化是简化问题的重要方法）

∴$a+b=d(a_1+b_1)=667=23\times 29$

∵23，29 都是质数，∴$d=1$ 或 $d=23$ 或 $d=29$.

(1) 若 $d=1$，则$[a,b]=ab=120$，说明 a、b 是 120 的约数，不可能有 $a+b=667$.

∴$d\neq 1$；

(2) 若 $d=23$，则有 $a_1+b_1=29$

$$[a,b]=23[a_1,b_1]=23\times a_1b_1$$

∴$a_1b_1=\dfrac{[a,b]}{d}=120$　即 $a_1b_1=120$

∴有 $a_1(29-a_1)=120$，将 120 分解质因数，试验得 $a_1=5$，则 $b_1=29-5=24$.

∴$a=23\times 5=115$，$b=23\times 24=552$

(3) 若 $d=29$，则有 $a_1+b_1=23$

$[a, b]=29[a_1, b_1]=29\times a_1b_1$

∴$a_1b_1=\dfrac{[a, b]}{d}=120$，即 $a_1b_1=120$

∴有 $a_1(23-a_1)=120$，将 120 分解质因数，试验得 $a_1=8$，则 $b_1=23-8=15$.

∴$a=29\times8=232$，$b=29\times15=435$.

综上，和为 667，最小公倍数除以最大公约数的商是 120 的两个自然数为 115，552 或 232，435.

习题二

A 组

1. 若 a、b、c 是 1998 的三个不同的质因数，且 $a<b<c$，则 $(b+c)^a$ 的值是多少？

2. 若 p 为质数，p^3+5 也为质数，问 p^5+7 是质数吗？为什么？

3. 在 1，2，3，…这 n 个正整数中已知共有 p 个质数，q 个合数，k 个奇数，m 个偶数，则 $(p-m)+(q-k)$ 的值是多少？

4. 已知 p 和 q 都是质数，并且 $7p+q$ 与 $pq+11$ 也都是质数，试求 p^q+q^p 的值.

5. 求这样的质数，当它加上 10 或加上 14 时仍为质数.

B 组

1. 在不大于 100 的自然数中，哪些数的约数个数最多？

2. 设 p 是大于 3 的质数，若 p^n 有 20 位数字，其中 n 为正整数. 证明：在这 20 个数字中至少有 3 个数字是相同的.

3. 奇数与偶数

我们将正整数分为两部分：正奇数和正偶数，是以正整数被 2 除的余数情况为标准分类的. 0 作为偶数. 负整数同样可以分

为负奇数和负偶数. 因此我们以整数被 2 除的余数情况为标准把整数分为两部分：奇数和偶数，能被 2 整除即被 2 除余数为 0 的整数叫做偶数，如 0，±2，±4，…，表示为 $2k$；被 2 除余数为 1 的整数叫做奇数，如±1，±3，±5，…，表示为 $2k-1$ 或 $2k+1$，这里 k 为整数.

由奇数与偶数的定义可以推出以下结论：

1. 奇数与偶数不可能相等.

2. 两个连续的整数中，必有一个奇数，一个偶数；三个连续的整数中，至少有一个奇数，至少有一个偶数.

3. 两个相邻的整数必互质，或者表示为 $(2n,\ 2n+1)=1$ 或 $(2n-1,\ 2n)=1$.

4. 奇数±奇数=偶数；奇数±偶数=奇数；偶数±偶数=偶数；奇数×奇数=奇数；奇数×偶数=偶数；偶数×偶数=偶数.

进而有：奇数个奇数的和是奇数；偶数个奇数的和为偶数；如果若干个整数之积是奇数，那么每个数都是奇数；如果若干个整数之积是偶数，那么其中至少有一个是偶数.

5. 若 a 和 b 为整数，则 $a+b$ 与 $a-b$ 有相同的奇偶性.

例 1 若 n 是大于 1 的整数，那么 $p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$ 的值是奇数还是偶数?

分析： p 的值由 $n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$ 来决定.

$\because\ (-1)^n=\begin{cases}1 & (n\text{ 为偶数})\\ -1 & (n\text{ 为奇数})\end{cases}$

∴应分别由 n 的奇偶情况来讨论 p 的奇偶性.

解： (1) n 为大于 1 的奇数，则 $\because\ (-1)^n=-1$，

$\therefore \dfrac{1-(-1)^n}{2}=1$，$\therefore p=n+(n^2-1)^1=n^2+n-1$. 又 $\because n$ 为奇数，$\therefore n^2$ 为奇数，$\therefore n^2+n$ 为偶数，n^2+n-1 为奇数.