

高等院校精品课程系列教材·省级

离散数学及其应用

第2版

徐凤生◎主编 巩建闽 宁玉富◎副主编



*Discrete Mathematics
and Its Applications*

Second Edition



机械工业出版社
China Machine Press

高等院校精品课程系列教材·省级

离散数学及其应用

第2版

徐凤生◎主编 巩建闽 宁玉富◎副主编



*Discrete Mathematics
and Its Applications
Second Edition*



机械工业出版社
China Machine Press

本书是山东省省级精品课程“离散数学”的主讲教材，是全国教育科学“十一五”国家课题“我国高校应用型人才培养模式研究”重点子课题“应用型本科院校计算机专业课程体系构建研究”的研究成果。

本书系统讲解离散数学基础知识和应用方法，由六部分构成：第一部分数理逻辑，内容包括命题逻辑和谓词逻辑；第二部分集合论，内容包括集合的基本知识、排列与组合、递推关系、集合论在命题逻辑中的应用、关系、函数、经典集合的扩展等；第三部分数论，内容包括整除和同余；第四部分代数系统，内容包括代数系统的基本概念及性质、半群、独异点、群、环、域、布尔代数等；第五部分图论，内容包括图的基本概念及矩阵表示、几类重要的图、最短路径、关键路径等；第六部分计算机科学中的应用，内容包括形式语言与自动机、纠错码等。

本书在内容安排上，突出由浅入深、循序渐进、通俗易懂的特点，另外各章配备了大量的例题，便于自学。为了体现与前导课和后继课的联系，激发学生的学习兴趣，书中融入了一些编程的思想，并加进了上机实验内容。

本书可作为高等院校计算机及相关专业本科生的“离散数学”课程教材，也可供相关科技人员学习参考。

版权所有，侵权必究。

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

图书在版编目(CIP)数据

离散数学及其应用 第2版 / 徐凤生主编. —北京: 机械工业出版社, 2009.7

(高等院校精品课程系列教材)

ISBN 978-7-111-27284-7

I. 离… II. 徐… III. 离散数学-高等学校-教材 IV. O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第082630号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑: 迟振春

三河市明辉印装有限公司印刷

2009年7月第2版第1次印刷

184mm×260mm·17.5印张

标准书号: ISBN 978-7-111-27284-7

定价: 30.00元

凡购本书, 如有倒页、脱页、缺页, 由本社发行部调换
本社购书热线: (010) 68326294

出版者的话

机械工业出版社华章公司秉承“全球采集内容，服务中国教育”的理念，经过十余年的不懈努力，引进、翻译、出版了大量在计算机科学界、电子科学界享有盛名的专家名著与名校教材，其中包括Donald E. Knuth、Alfred V. Aho、Jim Gray、Jeffrey D. Ullman、R. Jacob Baker等大师名家的一批经典作品，这些作品对国内计算机教育事业的发展起到了一定的推动作用。今天，全国高等学校精品课程建设工作的蓬勃开展为我们更好地服务于计算机教育、电子信息科学教育提供了良好的契机，我们将以严谨的治学态度及全面服务的专业出版精神，在国内广大院校老师们的支持与帮助下，陆续推出具有国内一流教学水平的“高等院校精品课程系列教材”。

精品课程是具有一流教师队伍、一流教学内容、一流教学方法、一流教材、一流教学管理等特点的示范性课程，是教育部实施的“高等学校教学质量与教学改革工程”的重要组成部分，是教育部深化教学改革，以教育信息化带动教育现代化的一项重要举措。自2003年精品课程建设项目持续推进以来，国内高校中的优秀教师纷纷在总结本校富有历史传统而又特色突出的课程教学方法与经验成绩的基础上，充分运用现代网络传播技术将优质的教学资源上网共享，使国内其他高校在实施同类课程教学的过程中能够借鉴、使用这些优质的教学资源，在更大范围内提高高等学校的教学和人才培养质量，提升我国高等教育的综合实力和国际竞争能力。经过几年的共同努力，已经建立起了较为齐全的各门类及各专业的校、省、国家三级精品课程体系，期间先后有总计750门课程通过了专家评审，获得了“国家精品课程”称号。

这些各个层次的“精品课程”建设过程都比较充分地体现了教育部所要求的七个重点，即：具有科学的建设规划，配备高水平的教学队伍，不断进行教学内容和课程体系的改革，使用先进的教学方法和手段，注重建设系列化的优秀教材，高度重视理论与实践两个环节，切实激励各方人员共同参与。也正因为这样的多方面积极参与，使得我国的高等教育在近年来由精英教育转向大众教育的跨越式发展中取得了教学质量上的突破与飞跃。精品课教材作为精品课程的要件之一，比以往教材更加具有实践检验性，教学辅助资源经过不断地更新与补充更加丰富，是精品课教学团队智慧的共同体现。

“师者，所以传道授业解惑也”。教材是体现教学内容和教学要求的知识载体，是教师进行教学活动的基本工具，是提高教学质量的重要保证。精品课程教学团队中优秀的老师们集多年治学经验撰写出版相关教材，也是精品课程建设的一个重要方面。华章作为专业的出版团队，长久以来以“传承专业知识精华，服务中国教育事业”为使命，遵循“分享、专业、创新”的价值观，实践着“国际视野、专业出版、教育为本、科学管理”的出版方针，愿与高等院校的老师共同携手，为中国的高等教育事业走向国际化而努力。

为更好地服务于精品课程配套教材的出版，华章不仅密切关注高校的优秀课程建设，而且还将利用自身的优势帮助教师完善课程设置、提供教辅资料、准备晋级申报、推广教学经验。具体详情可访问专门网站<http://www.hzbook.com/jpkc.aspx>，并可在线填写出版申请，欢迎您对我们的工作给予帮助和指导。

投稿专线：010-88379604

投稿Email：hzjsj@hzbook.com



华章科技图书出版中心

前 言

目前,在计算机科学的研究和应用中遇到的许多重大问题,不仅是技术问题,而且是理论问题,至少是技术方面的理论问题。因此,无论学生今后从事计算机的理论研究,还是应用开发或者技术管理工作,都必须打下坚实的数学理论基础,以适应学科迅速发展和知识更新的需要,而离散数学是必备的数学基础。

离散数学是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科。它是计算机及相关专业的核心和骨干课程,为数据结构、编译原理、数据库、算法分析和人工智能等课程提供必要的数学基础。

离散数学的特点是概念多、理论性强和高度抽象,学生学习起来往往比较困难。针对这种情况,我们在参考各种离散数学教材的基础上,结合作者多年的教学实践,编写了这本普通高等院校计算机及其相关专业本科生适用的离散数学教材。

本书按“精、广、新”的要求组织教学内容,并本着实用的原则增加了上机实验内容等,确保了计算机专业学生能够获得应有的数学知识和解决问题的能力。全书由六部分构成。第一部分数理逻辑(第1章和第2章),内容包括命题逻辑和谓词逻辑;第二部分集合论(第3章、第4章和第5章),内容包括集合的基本知识、排列与组合、递推关系、集合论在命题逻辑中的应用、关系、函数、经典集合的扩展等;第三部分数论(第6章和第7章),内容包括整除和同余;第四部分代数系统(第8章和第9章),内容包括代数系统的基本概念及性质、半群和群、环与域、布尔代数等;第五部分图论(第10章),内容包括图的基本概念及矩阵表示、几类重要的图、最短路径、关键路径等;第六部分计算机科学中的应用(第11章和第12章),内容包括形式语言与自动机、纠错码等。

本书由徐凤生任主编,巩建闽、宁玉富任副主编,参与编写工作的人员还包括郭长友、李天志、刘建军、潘东静、戎丽霞、王付山、张建臣、李海军。最后,全书由徐凤生统稿并定稿。

本书具有以下特色:

- (1) 内容涉猎面广,可满足不同层面学生的需求。
- (2) 讲述全面而翔实,阐述简洁而明了。
- (3) 重点突出解题思路,注重培养学生的数学思维能力和分析、解决问题的能力。
- (4) 为了体现与前导课和后继课的联系,激发学生的学习兴趣,书

中融入了一些编程的思想，并加进了上机实验内容。

(5) 例题丰富，题型多样，便于学生自学。

(6) 通过典型例题的分析，使学生对所学知识的掌握更加系统化和条理化，更易于对所学知识融会贯通和举一反三。

(7) 本书配有电子教案、习题答案和上机实验参考源程序，有需要的教师可与出版社直接联系或发送邮件至 xfs@dzu.edu.cn 与作者联系。

本教材的出版得到了德州学院教材出版基金的资助。在本书编写过程中，得到了德州学院计算机系一些老师的帮助，谨对他们表示衷心的感谢。另外，在编写中参阅了许多离散数学教材和相关资料，在此也向作者表示感谢。最后，还要特别感谢机械工业出版社华章分社的大力支持，使得本书得以顺利出版。

限于作者水平，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编者

教学建议

教 学 内 容	学 习 要 点 及 教 学 要 求	课 时 安 排
第 1 章 命 题 逻 辑	<p>掌握命题及五个命题联结词的概念</p> <p>重点掌握命题公式类型的判定</p> <p>熟悉常用的等价式与蕴涵式</p> <p>了解其他联结词和最小全功能联结词组</p> <p>重点掌握求主范式的方法</p> <p>重点掌握利用 P 规则、T 规则、CP 规则进行命题逻辑的推理</p>	12
第 2 章 谓 词 逻 辑	<p>掌握谓词、量词、自由变元和约束变元的概念</p> <p>了解谓词公式的解释与分类</p> <p>熟悉常用的谓词等价式与蕴涵式</p> <p>熟练掌握前束范式的表示, 了解斯柯林范式的表示</p> <p>重点掌握利用 UG 规则、US 规则、EG 规则、ES 规则进行谓词演算的推理</p>	6
第 3 章 集 合	<p>掌握集合的基本概念、运算及性质</p> <p>掌握空集、全集和幂集的概念</p> <p>了解有限幂集元素的编码表示</p> <p>重点掌握集合相等的证明</p> <p>了解集合的划分与覆盖的概念</p> <p>掌握排列、组合的概念, 了解排列、组合的生成方法</p> <p>了解结构归纳原理, 掌握数学归纳原理</p> <p>重点掌握容斥原理及其应用, 了解抽屉原理</p> <p>了解递推关系及其求解方法</p> <p>了解集合论在命题逻辑中的应用</p>	8
第 4 章 关 系	<p>掌握序偶、笛卡儿积、关系的概念</p> <p>熟练掌握关系性质的判定</p> <p>熟练掌握关系闭包的求法、等价关系的证明</p> <p>了解相容关系</p> <p>重点掌握偏序关系与哈斯图</p>	6
第 5 章 函 数	<p>掌握函数的概念</p> <p>重点掌握单射、满射、双射的证明</p> <p>了解集合的基数、可数集、不可数集的概念, 掌握基数的比较方法</p> <p>了解 Fuzzy 集、Rough 集、Vague 集的概念</p>	4
第 6 章 整 除	<p>掌握因数、倍数、素数、合数、最大公因数、最小公倍数的概念</p> <p>重点掌握带余除法与辗转相除法, 会求最大公因数和最小公倍数</p> <p>了解算术基本定理</p>	4 (选讲)

(续)

教学内容	学习要点及教学要求	课时安排
第7章 同余	掌握同余、剩余类、剩余系的概念 了解欧拉定理和威尔逊定理 掌握一次同余式和一次同余式组的求解方法 了解数论在密码学中的作用	4(选讲)
第8章 代数系统	掌握代数系统、同态、同构、同余关系、群、环、域等概念 掌握同余关系的证明 重点掌握群、子群、正规子群的证明方法,掌握群同态和同构的证明 掌握循环群、置换群的概念,重点掌握循环群相关结论的证明 掌握环、子环、域的证明	18
第9章 格与布尔代数	掌握格、分配格、有界格、有补格、有补分配格、模格和布尔代数的概念 能够判别某个偏序集或代数系统是否构成格 能够证明格中的等式或不等式 了解格的同态与同构	4(选讲)
第10章 图	掌握图的基本概念,理解路、回路与连通性的概念 掌握图的矩阵表示,能够由邻接矩阵求可达矩阵 掌握欧拉图、哈密顿图的判定 了解二部图及匹配的概念 了解平面图的概念,重点掌握欧拉公式及相关结论的证明 掌握无向树和根树的概念,重点掌握求最小生成树和最优二叉树的方法 了解点着色、面着色和边着色的含义 掌握求最短路径和关键路径的方法	18
第11章 形式语言与 自动机简介	掌握语言、文法、正规语言、上下文无关语言等概念 了解有限自动机、下推自动机、图灵机 掌握文法类型的判定 重点掌握求已知文法的最左推导、最右推导和相应的导出树	4(选讲)
第12章 纠错码简介	掌握纠错码、群码的概念 重点掌握纠错码的构造	2(选讲)

说明:

- (1) 本教材主要是为计算机专业的本科“离散数学”课程而编写的。建议授课时数为72~90学时(包含习题课、讨论课等必要的教学环节,实验另行安排学时),不同学校可根据各自的教学要求、教学计划学时及学生实际情况对教材内容进行取舍。
- (2) 非计算机专业的师生在使用本教材时可适当降低要求或减少教学内容。
- (3) 本书的重点是第1章、第2章、第3章、第4章、第5章、第8章、第10章。如果受教学时数限制,第1章的1.5节,第3章的3.4节、3.5节、3.7节、3.8节,第6章,第7章,第8章的8.4节、8.5节,第9章,第11章,第12章可以略去不讲。
- (4) 上机实验可以根据学生实际情况进行合理安排。

目 录

出版者的话

前言

教学建议

第 1 章 命题逻辑	1
1.1 命题与联结词	1
1.1.1 命题的基本概念	1
1.1.2 命题分类及命题标识符	2
1.1.3 命题联结词	2
1.2 命题公式、翻译与真值表	4
1.2.1 命题公式	4
1.2.2 命题的符号化	4
1.2.3 真值表	5
1.3 公式分类与等价式	6
1.3.1 公式分类	6
1.3.2 等价公式(等值演算)	6
1.3.3 基本等价式——命题定律	7
1.3.4 代人规则和替换规则	7
1.3.5 证明两个命题公式等价的方法	8
1.4 对偶式与蕴涵式	9
1.4.1 对偶式	9
1.4.2 蕴涵式	10
1.4.3 蕴涵式的证明方法	11
1.5 联结词的扩充与全功能联结词组	11
1.5.1 联结词的扩充	11
1.5.2 与非、或非、异或的性质	12
1.5.3 全功能联结词组	13
1.6 公式标准型——范式	13
1.6.1 简单合取式与简单析取式	13
1.6.2 析取范式与合取范式	13
1.6.3 范式的应用	14
1.7 公式主范式	15

1.7.1 主析取范式	15
1.7.2 主合取范式	17
1.7.3 主范式的应用	19
1.8 命题逻辑的推理理论	20
1.8.1 推理规则	20
1.8.2 推理定律	21
1.8.3 判断有效结论的常用方法	21
1.9 典型例题分析	24
1.10 上机实验	28
习题	29
第 2 章 谓词逻辑	33
2.1 基本概念	33
2.1.1 个体、谓词和命题的谓词形式	33
2.1.2 量词	34
2.2 谓词公式与翻译	35
2.2.1 谓词公式	35
2.2.2 谓词逻辑的翻译	36
2.3 自由变元和约束变元	36
2.4 谓词公式的解释与分类	37
2.4.1 谓词公式的解释	37
2.4.2 谓词公式的分类	38
2.5 谓词演算的等价式与蕴涵式	39
2.5.1 等价式	39
2.5.2 蕴涵式	41
2.6 谓词演算中的公式范式	42
2.6.1 前束范式	42
2.6.2 斯柯林范式	43
2.7 谓词演算的推理理论	43
2.8 典型例题分析	47
习题	49
第 3 章 集合	53
3.1 集合的概念与表示法	53

3.1.1 集合的概念	53	4.4 关系的性质	83
3.1.2 集合的表示法	53	4.5 关系的闭包	85
3.1.3 集合的包含与相等	54	4.6 等价关系和等价类	90
3.1.4 空集、集族、幂集和全集	55	4.7 相容关系	92
3.1.5 有限幂集元素的编码表示	56	4.8 偏序关系	94
3.2 集合的运算与性质	56	4.9 典型例题分析	97
3.2.1 集合的交、并和补	56	4.10 上机实验	99
3.2.2 集合的对称差	58	习题	99
3.2.3 集合的广义并和广义交	58	第5章 函数	102
3.2.4 集合的文氏图	59	5.1 函数的概念	102
3.3 集合的划分与覆盖	59	5.1.1 函数定义	102
3.4 排列与组合	61	5.1.2 函数性质	103
3.4.1 加法原理与乘法原理	61	5.2 逆函数和复合函数	104
3.4.2 排列	61	5.2.1 逆函数	104
3.4.3 组合	62	5.2.2 函数的复合	104
3.4.4 排列与组合的生成	62	5.2.3 几种特殊的函数	107
3.5 归纳原理	63	5.3 集合的基数	107
3.5.1 结构归纳原理	63	5.3.1 基数的概念	108
3.5.2 数学归纳原理	64	5.3.2 可数集与不可数集	108
3.6 容斥原理和抽屉原理	65	5.3.3 基数的比较	109
3.6.1 容斥原理	65	5.4 经典集合的扩展	110
3.6.2 抽屉原理(鸽巢原理)	66	5.4.1 Fuzzy 集	110
3.7 递推关系	67	5.4.2 Vague 集	111
3.7.1 递推关系的概念	67	5.4.3 Rough 集	112
3.7.2 递推关系的求解	67	5.5 典型例题分析	113
3.8 集合论在命题逻辑中的应用	69	5.6 上机实验	115
3.8.1 命题逻辑中的集合表示	69	习题	115
3.8.2 应用举例	71	第6章 整除	117
3.9 典型例题分析	71	6.1 因数和倍数	117
3.10 上机实验	73	6.2 素数和合数	117
习题	74	6.3 带余除法与辗转相除法	118
第4章 关系	77	6.4 最大公因数和最小公倍数	119
4.1 序偶与笛卡儿积	77	6.5 算术基本定理	121
4.1.1 序偶及有序 n 元组	77	6.6 典型例题分析	122
4.1.2 笛卡儿积	77	6.7 上机实验	124
4.2 关系及其表示	79	习题	124
4.2.1 关系	79	第7章 同余	125
4.2.2 关系矩阵与关系图	81	7.1 同余及其性质	125
4.3 复合关系及逆关系	81	7.2 剩余类和剩余系	127

7.3 欧拉定理与威尔逊定理	128	第9章 格与布尔代数	177
7.4 一次同余式	130	9.1 格的定义与性质	177
7.5 一次同余式组	132	9.2 子格与格同态	179
7.6 数论在密码学中的应用	133	9.3 特殊的格	180
7.6.1 仿射加密法	134	9.4 布尔代数	181
7.6.2 RSA 系统	135	9.5 典型例题分析	184
7.6.3 MH 系统	136	习题	185
7.7 典型例题分析	137	第10章 图	186
7.8 上机实验	138	10.1 图的基本概念	186
习题	138	10.1.1 图	186
第8章 代数系统	140	10.1.2 子图与补图	187
8.1 代数系统的定义	140	10.1.3 结点的度	188
8.2 代数系统的性质	141	10.1.4 图的同构	190
8.3 代数系统的同态与同构	145	10.2 路、回路与连通性	191
8.4 同余关系	147	10.3 图的矩阵表示	195
8.5 商代数与积代数	148	10.4 欧拉图与哈密顿图	198
8.6 半群和独异点	149	10.4.1 欧拉图	198
8.6.1 半群	149	10.4.2 哈密顿图	200
8.6.2 独异点	150	10.5 二部图与匹配	202
8.7 群与子群	151	10.6 平面图	204
8.7.1 群	151	10.6.1 平面图的基本概念	204
8.7.2 元素的阶	152	10.6.2 欧拉公式	205
8.7.3 子群	153	10.6.3 平面图的判定	206
8.8 循环群和置换群	154	10.6.4 平面图的对偶图	207
8.8.1 循环群	154	10.7 树及其应用	208
8.8.2 置换群	156	10.7.1 无向树及生成树	208
8.9 陪集和正规子群	159	10.7.2 根树及其应用	211
8.9.1 陪集	159	10.8 着色问题	216
8.9.2 正规子群	161	10.8.1 图中结点的着色	216
8.10 群的同态与同构	162	10.8.2 地图的着色与平面图 的点着色	217
8.11 环与域	164	10.8.3 边着色	218
8.11.1 环	164	10.9 最短路径和关键路径	218
8.11.2 子环与理想	166	10.9.1 最短路径问题	218
8.11.3 域	166	10.9.2 关键路径问题	220
8.11.4 环的同态与同构	168	10.10 典型例题分析	222
8.12 典型例题分析	169	10.11 上机实验	225
8.13 上机实验	173	习题	229
习题	173		

第 11 章 形式语言与自动机简介	235
11.1 语言及其表示.....	235
11.1.1 语言.....	235
11.1.2 文法.....	236
11.1.3 识别器.....	237
11.2 正规语言与有限自动机.....	238
11.2.1 确定的有限自动机.....	238
11.2.2 不确定的有限自动机.....	241
11.3 上下文无关语言与下推自动机.....	243
11.3.1 上下文无关语言.....	244
11.3.2 下推自动机.....	244
11.3.3 下推自动机与上下文 无关语言的关系.....	246
11.4 图灵机.....	247
11.4.1 图灵识别器.....	247
11.4.2 用于计算的图灵机.....	249
11.5 线性界限自动机.....	250
11.6 典型例题分析.....	250
11.7 上机实验.....	251
习题.....	252
第 12 章 纠错码简介	253
12.1 纠错码的基本概念.....	253
12.2 纠错码的纠错能力.....	255
12.3 纠错码的选择.....	257
12.4 群码的校正.....	261
12.5 典型例题分析.....	262
12.6 上机实验.....	263
习题.....	264
参考文献	265

第1章 命题逻辑

数理逻辑是用数学的方法来研究推理的形式结构和推理规律的学科，它与数学的其他分支、计算机科学、人工智能、程序理论和数据库理论等有着密切的关系。数理逻辑的内容相当丰富，本书只介绍其中的命题逻辑和谓词逻辑两部分。本章讲述命题逻辑；谓词逻辑在第2章讨论。

1.1 命题与联结词

1.1.1 命题的基本概念

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提和结论都是可以判断真假的陈述句，即命题。因此，命题是推理的基本单位。在命题逻辑中，对命题的成分不再细分，因而命题也是命题逻辑中的最小的研究单位。

定义 1.1 能判断真假的陈述句称为命题。一个命题的真或假称为命题的真值，分别用 T (或 1) 与 F (或 0) 表示。真值为真的命题称为真 (T) 命题，真值为假 (F) 的命题称为假命题。

由定义可知，判断一个句子是否为命题，应分为两步：首先判断它是否为陈述句，其次判断它能否确定真假。另外还要注意，一个陈述句能否判断真假，和我们是否知道它的真假是两回事。

例 1 判断下列句子哪些是命题。

- (1) 雪是黑的。
- (2) 天气多好呀!
- (3) 别的星球上有生物。
- (4) $1+101=110$ 。
- (5) 你上网了吗?
- (6) 全体立正!
- (7) $x+y>5$ 。
- (8) 人有五指。
- (9) 现在是 6 点钟。
- (10) 我正在说谎。

解 在上述 10 个句子中，(2) 是感叹句，(5) 是疑问句，(6) 是祈使句，因此它们都不是命题。(7) 和 (10) 虽然都是陈述句，但因为 (7) 没有确定的真值，而 (10) 是悖论 (即由真能推出假，也能由假推出真)，因而它们也不是命题。(1)、(3)、(8)、(9) 都是命题，其中，(3) 虽然目前无法判断，但就其本质而言是可以判断真假的，因此我们说它是命题；(8) 的真值因人而异；(9) 的真值因地而异。(4) 所表达的内容在十进制范围中真值为假，而在二进制范围中真值为真，因此其真值由上下文而定。 ■

1.1.2 命题分类及命题标识符

根据命题的结构形式,可以把命题分为原子命题和复合命题。简单地说,原子命题是能判断真假的简单陈述句,而复合命题是由原子命题组成的。

定义 1.2 不能再分解为其他命题的命题称为原子命题。由原子命题和命题联结词构成的命题称为复合命题。

例如,例 1 中的命题都是原子命题,而命题“张三和李四都是大学生”是复合命题,因为它由“张三是大学生”和“李四是大学生”两个原子命题组成。

在命题逻辑中,采用的是一种形式语言,它由规定了特定意义的符号和规则组成,其特征是有确切的含义。

一个原子命题一般用大写字母来表示,表示原子命题的符号称为命题标识符。命题标识符通常写在命题的前面,两者之间用冒号分开。

例 2 P : 雪是黑的。 ■

定义 1.3 如果命题标识符表示真值确定的命题,则称其为命题常元。如果命题标识符表示真值不确定的陈述句,则称其为命题变元。

显然,命题变元不是命题。

1.1.3 命题联结词

通过命题联结词可以把原子命题复合成一个复合命题。命题逻辑中常用的联结词有以下五种:“非”(否定词)、“且”(合取词)、“或”(析取词)、“如果……,则……”(条件词)、“……当且仅当……”(双条件词),下面给出它们的确切含义和符号表示。

1. 否定词 \neg

定义 1.4 复合命题“非 P ”称为命题 P 的否定,记作 $\neg P$,读作非 P 。 $\neg P$ 为真当且仅当 P 为假。

例 3 设 P : 离散数学是计算机专业的核心课程,则 $\neg P$ 表示离散数学不是计算机专业的核心课程。 ■

2. 合取词 \wedge

定义 1.5 复合命题“ P 且 Q ”称为 P 与 Q 的合取式,记作 $P \wedge Q$,读作 P 且 Q 。 $P \wedge Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 都为真。

例 4 设 P : 今天上机, Q : 今天下雨,则 $P \wedge Q$ 表示今天上机且今天下雨。 ■

需要指出的是,上例中的两个命题是不相干的,在自然语言里 $P \wedge Q$ 是没有意义的,但在数理逻辑中这是允许的。

3. 析取词 \vee

定义 1.6 复合命题“ P 或 Q ”称为 P 与 Q 的析取式,记作 $P \vee Q$,读作 P 或 Q 。 $P \vee Q$ 为假当且仅当 P 和 Q 都为假。

由于自然语言中的“或”具有多义性,包括“可兼或”、“排斥或”和“表示近似的或”,因此需要指出命题逻辑中的“或”是指哪一种。先看下面表 1-1 给出的例子。

表 1-1

或的含义	例子		说明
联结词	可兼或	$a \cdot b = 0$ 即 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $a = b = 0$	两者至少有一个发生, 不排斥两者都发生的情况
	排斥或	小张在教室上课或参加长跑比赛	非此即彼, 不可兼得
非联结词	表示近似的或	去主楼需 6 分钟或 8 分钟	表示近似数

命题逻辑中的析取词 \vee 表示的是可兼或, 即允许 $P \vee Q$ 中的 P 和 Q 同时为真。

例 5 (1) 李强是 100 米或 400 米赛跑冠军。

(2) 今天晚上我在家看电视或去剧场看戏。

解 (1) 中的“或”是可兼或, 可以用联结词 \vee 表示。设 P : 李强是 100 米赛跑冠军, Q : 李强是 400 米赛跑冠军, 则 (1) 表示为 $P \vee Q$ 。

(2) 中的“或”是排斥或, 不能用联结词 \vee 直接表示。设 P : 今天晚上我在家看电视, Q : 今天晚上我去剧场看戏, 则 (2) 可以表示为 $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$, 也可用后面介绍的异或联结词表示为 $P \oplus Q$ 。 ■

4. 条件词 \rightarrow

定义 1.7 复合命题“如果 P , 则 Q ”称为 P 与 Q 的条件式, 记作 $P \rightarrow Q$, 读作如果 P 则 Q 。其中 P 称为前件, Q 称为后件。 $P \rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 为真而 Q 为假。

在自然语言中, “如果”与“则”之间通常有因果联系, 否则没有意义, 但对条件命题 $P \rightarrow Q$ 来说, 只要 P 和 Q 能够确定真值, $P \rightarrow Q$ 即成为命题。在条件命题中, 若前提为假, 条件命题的真值为真, 称为善意的推断。前件假而整个句子为真的例子, 在自然语言中也是常见的, 例如: 假如给我一根合适的杠杆, 我可以把地球撬起来。

条件式 $P \rightarrow Q$ 表示的基本逻辑关系是: Q 是 P 的必要条件或 P 是 Q 的充分条件。复合命题“只要 P , 就 Q ”、“因为 P , 所以 Q ”、“除非 Q , 才 P ”、“除非 Q , 否则非 P ”、“ P 仅当 Q ”、“只有 Q , 才 P ”等均可符号化为 $P \rightarrow Q$ 的形式。

例 6 (1) 只要不下雨, 我就骑自行车上班。

(2) 只有不下雨, 我才骑自行车上班。

解 设 P : 天下雨, Q : 我骑自行车上班, 则 (1) 表示为 $\neg P \rightarrow Q$, (2) 表示为 $Q \rightarrow \neg P$ 。 ■

5. 双条件词 \leftrightarrow

定义 1.8 复合命题“ P 当且仅当 Q ”称为 P 和 Q 的双条件复合命题, 记作 $P \leftrightarrow Q$, 读作 P 当且仅当 Q 。 $P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 的真值相同。

例 7 (1) 两个三角形全等当且仅当它们的三组对应边相等。

(2) $2+2=4$ 当且仅当雪是黑的。

解 (1) 设 P : 两个三角形全等, Q : 两个三角形的三组对应边相等, 则 (1) 表示为 $P \leftrightarrow Q$ 。

(2) 设 P : $2+2=4$, Q : 雪是黑的, 则 (2) 表示为 $P \leftrightarrow Q$ 。 ■

与前面的联结词一样, 双条件式命题中的两个命题也可以没有因果关系, 只要能确定其真值即可。

1.2 命题公式、翻译与真值表

1.2.1 命题公式

定义 1.9 (1) 单个命题变元是命题公式。

(2) 如果 A 是命题公式, 那么 $\neg A$ 也是命题公式。

(3) 如果 A, B 是命题公式, 那么 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 都是命题公式。

(4) 经过有限次地使用 (1)、(2)、(3) 所组成的有意义的符号串都是命题公式。

上述定义采用的是递归定义方式, 以后还将出现这种定义方式。

由定义可知, 命题公式是没有真假的, 因此它不是命题。仅当在一个公式中命题变元用确定的命题代入时, 才得到一个命题。

例 1 $\neg(P \wedge Q), (P \rightarrow (P \wedge Q)), (((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \rightarrow R))$ 都是命题公式。而 $\neg P \vee Q \vee ((P \rightarrow Q) \rightarrow (\wedge Q)), (P \rightarrow Q)$ 都不是命题公式。 ■

为了减少命题公式中的括号数量, 我们规定: ①联结词的优先次序依次为: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$; ②具有相同优先级的联结词, 按出现的先后次序进行计算, 其括号可以省去; ③最外层的括号可以省去。

定义 1.10 设 B 是命题公式 A 的一部分, 且 B 也是命题公式, 则称 B 是 A 的子公式。

例如, $P \rightarrow Q$ 和 $Q \rightarrow R$ 都是 $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \rightarrow R)$ 的子公式。

1.2.2 命题的符号化

有了命题公式的概念之后, 我们就可以把自然语言中的一些句子翻译成命题逻辑中的符号化形式。把一个用文字叙述的命题相应地写成由命题标识符、联结词和圆括号表示的命题公式称为命题的符号化或翻译。

把命题符号化, 是不管具体内容而突出思维形式的一种方法。

例 2 将下列命题符号化。

(1) 小王现在在宿舍或在图书馆。

(2) 李明既聪明又用功。

(3) $\sqrt{2}$ 是有理数的话, $2\sqrt{2}$ 也是有理数。

(4) 张三与李四是表兄弟。

(5) 除非你努力, 否则你将失败。

(6) 除非天气好, 我才骑自行车上班。

(7) 小王晚上要回家, 除非天下大雨。

(8) 只有睡觉才能恢复疲劳。

(9) 只要我还有口气, 我就要战斗。

(10) A 中没有元素, A 就是空集。

(11) 如果我上街, 我就去书店看看, 除非我很累。

解 (1) 因为“小王现在在宿舍”与“小王现在在图书馆”不能同时成立, 所以该命题