高等学校教学用書

微分几何学

A. П. 諾尔金著

高等教育出版社

高等学校教学用書

微分几何学

（师范学院适用）

А. П. 諾尔金著
陈庆益譯

（修訂本）

高等教育出版社

本書系根据苏俄教育部教育出版社 (Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР) 出版的諾尔金(А. П. Норден)著"微分几何学"(Дифференциальная геометрия) 1948 年版本譯出。原書經苏俄教育部审定为师范学院用教学参考書。

本書原由商务印書舘出版，自 1958 年10月起改由本社出版。

微 分 几 何 学

А. П. 諾尔金著

陈庆益譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 054 号)

商务印书舘上海厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010·477　开本 850×1168 1/32　印張 7 2/16

字数 169,000　印数 1—4,000　定价(8) ¥ 0.85

1953 年 2 月商務初版(共印 15,500)

1958 年11月新 1 版(修訂本)　1958 年11月上海第 1 次印刷

序

本書所包括的內容，除了高等师范学校教学大綱所要求的必修材料之外，还有許多供选修作業和自动作業用的問題。

包括非必修材料的段、节、章，都用星号标志出来，在学習基本課文时，可以略去。第十章末就包括着这类的非必修的問題。这类非必修的問題，最好也讓学生們加以学習；同时这类問題的叙述，是以前面的基本課文和第四章§3做根据的。第十一章也是非必修的材料，它們是以前面的基本課文和第八章§17，§18以及第十章§5至§12做根据的。

基本課文加上补充材料，就完全包括了綜合性大学数理系教学大綱的要求。

Б. В. Кутузов 同志，在我忙于其他的事情的时候，担任本書的編輯工作，曾經化了不少的劳力，在这里向他表示衷心的感謝。

А. П. Норден

目　次

第　一　部

第　二　部

第 一 部

第一章 純量变元底向量函数

§1 导言 向量运算在几何上应用的根据是向量运算底許多基本定义与一些簡單的几何圖形有着密切的关系。例如任一向量对应于一有向綫段;向量底加法归于有向折綫及其封閉綫底作圖;純量积与射影运算有着紧密的联系,向量积与平行四边形面积底計算有着紧密的联系,混合积与平行六面体体积底計算有着紧密的联系;等等都是。

向量运算包含兩个部分:向量代数与向量分析。向量代数討論不变的向量,向量分析則研究变动的向量。

向量代数由普通代数取得它本身諸运算(加法、减法、乘法)底名称并定义之使一般的代数运算律(交換律、結合律、分配律)(除了少許的例外)对于向量仍保持它們底效用。

同样地:向量分析仿照極限論及微分法,为变动向量建立一些概念与运算,而和分析学底上述部分相似。为了区别向量分析与普通分析,以下我們將称后者为純量分析。

§2 無限小向量 在变动向量中,無限小向量处于一种特殊重要的地位。一个向量如果它底絕对值(或模)趋于零,卽称为無限小向量。

为了标示向量 α 是無限小的,仍沿用通常的記法:

$$\alpha \to 0。$$

关于無限小向量,可以建立一些在說法上与普通分析底定理

一致的定理。

定理 1. 有限多个無限小向量底和，仍为無限小向量。

設 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 等为無限小向量，而 $\boldsymbol{\sigma}$ 为它們底和。

对应于向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的綫段，作为由对应于各相加向量的綫段所成折綫之端点底連綫，其長度小于（或者最多是等于）折綫底長度，因此

$$\sigma \leqslant \alpha + \beta + \gamma + \cdots。$$

上面的不等式底右边各項都是無限小，而 σ 不能为負的，故 σ 亦趋于零，此卽表示向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 是無限小的。

轉到乘积底討論，我們指出：在向量代数方面可講到：

（i）向量与純量底乘积

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda \boldsymbol{\alpha},$$

（ii）二向量底純量积

$$\lambda = \boldsymbol{\alpha\beta},$$

（iii）二向量底向量积

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}。$$

在所有这三种情形中，乘积底絕对值小于或等于各因子之絕对值底乘积。所以，如果因子之一为無限小，而另一因子仅取有界的絕对值，則乘积底絕对值亦为無限小，此卽表示乘积为無限小的。因此，卽得下面关于上述三种乘积的一般定理：

定理 2. 若向量出現于某一乘积中，因子之一为無限小，而另一在絕对值上为有界的时，則此乘积也是無限小的。

于本节終了，在向量方面，一如对于純量，可提到由二無限小向量之絕对值底比，来决定它們底相对的阶。若二無限小向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 絕对值之比底極限为 0，則称 $\boldsymbol{\alpha}$ 底阶高于 $\boldsymbol{\beta}$ 底阶；若此極限等于一个不为零的数，則二者底阶相等。

習題 1. 証明三向量底混合积，当三向量之一为無限小，而其余二向量

在絕对値上为有界时，也是無限小的。

2. 証明二無限小向量之向量积底阶，高于任一因子底阶。

§3 变向量底極限 若常向量 $\boldsymbol{a}$ 与变向量 $\boldsymbol{u}$ 底差为無限小时，$\boldsymbol{a}$ 即称为 $\boldsymbol{u}$ 底極限。

沿用通常的記法，可写为：

若
$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\alpha}\to 0,$$
則
$$\boldsymbol{a}=\lim \boldsymbol{u}$$
或
$$\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{a}。$$

由定义可推出：变向量等于其極限与某一無限小向量底和。

应用此种关系以及無限小向量底特性，可証明关于和与积底極限的一些定理；并可注意，这些証明在形式上与純量分析对应定理底証明一無区别。

定理 1. 諸向量之和底極限等于各相加向量之極限底和。

設 $\boldsymbol{w}$ 为二向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 底和，則
$$\boldsymbol{w}=\lim \boldsymbol{u}+\boldsymbol{\alpha}+\lim \boldsymbol{v}+\boldsymbol{\beta},$$
其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 均为無限小向量。但二無限小向量底和仍为無限小，故有
$$\boldsymbol{w}-(\lim \boldsymbol{u}+\lim \boldsymbol{v})\to 0,$$
由此即得
$$\lim \boldsymbol{w}=\lim(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\lim \boldsymbol{u}+\lim \boldsymbol{v}。$$

定理 2. 对于向量与純量底相乘以及向量間純量的或向量的相乘，乘积底極限等于各因子之極限底乘积。

因为在所有这三种情形下，証法是完全相似的，所以只取其中的一种来証明。

設 $\boldsymbol{w}$ 为二向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 底向量积，則
$$\boldsymbol{w}=(\lim \boldsymbol{u}+\boldsymbol{\alpha})\times(\lim \boldsymbol{v}+\boldsymbol{\beta}),$$
其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 均为無限小向量。但向量积遵从分配律，故有：

$$\boldsymbol{w}=(\lim \boldsymbol{u}\times\lim \boldsymbol{v})+(\boldsymbol{\alpha}\times\lim \boldsymbol{v})+(\lim \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})。$$

上式底后三項都含有無限小因子，故都为無限小；因此它們底和也是無限小，此卽表示

$$\boldsymbol{w}-(\lim \boldsymbol{u}\times\lim \boldsymbol{v})\to 0,$$

由此卽得

$$\lim(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\lim \boldsymbol{u}\times\lim \boldsymbol{v}。$$

在所論向量积底情形，应注意到因子底次序。上式右边相乘的極限，应各与其在左边的对应因子具有同一的次序。至于定理关于另二种情形的証明，則讓給讀者。

可視常向量底極限卽等于其自身。

注意到这一点，卽得下面的定理。

定理 3. 在定理 2 底条件下，常向量因子可拿出極限符号之外。

習題 3. 証明定理 2 对于純量积以及向量与純量底乘积的情形。

4. 証明向量与純量之比底極限等于二者極限底比，但假定純量底極限不为 0 。

5. 証明变向量之坐标底極限等于其極限底坐标。

§4 純量变元底向量函数 向量可依从变动的純量而变化。这种依从关系底例子可在力学中見到。若 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 为动点 M 底向徑，則 $\boldsymbol{r}$ 随着时間变动，而后者卽以純量測度。一般地說，若对于純量变元 t 底每一个值，有变向量 $\boldsymbol{u}$ 底一个确定的值与之对应，卽称向量 $\boldsymbol{u}$ 为純量变元 t 底函数。

为标明此种依从性，沿用記法：

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)。$$

为了用坐标 u_x, u_y, u_z 給定依从于純量变元 t 的向量 $\boldsymbol{u}$，必須用 t 底函数来給定这些坐标。从这个观点看来，純量变元之某一向量函数底給定，等价于依从純量变元的三个純量函数的給定：

$$u_x=u_x(t),\quad u_y=u_y(t),\quad u_z=u_z(t)。$$

向量函数底連續性，如在純量分析中一样地定义。对应于已給值 $t=t_1$ 及增加后的值 $t=t_1+\Delta t$，函数值底差

$$\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t_1+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t_1),$$

称为对应于变元增量 Δt 的函数底增量。

若对于变元在 $t=t_1$ 的無限小增量，函数底增量也是無限小时，則称函数在 $t=t_1$ 为連續的。

增量底絕对值可用坐标底增量表示为：

$$|\Delta\boldsymbol{u}|^2=\Delta u_x^2+\Delta u_y^2+\Delta u_z^2。$$

若当 $\Delta t\to 0$ 时坐标底增量亦均趋于零，則 $|\Delta\boldsymbol{u}|\to 0$ 而函数 $\boldsymbol{u}$ 为連續的。反之，若 $|\Delta\boldsymbol{u}|\to 0$，則每一坐标底增量，例如

$$|\Delta u_x|\leqslant|\Delta\boldsymbol{u}|$$

亦趋于零。由此可知：对于純量变元之向量函数底連續性，其所有坐标底連續性是必要且充分的条件。

*若一純量函数 $v=v(t)$ 对屬于区間 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 的变元底任一值 t 都是連續的，則对于任何正数 η，可找到一个充分小的正数 ε，使得当 $|\Delta t|<\varepsilon$ 时对区間上每一个 t，有 $|\Delta v|<\eta$。連續函数底此种特性称为其連續底均匀性。若 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$ 在区間 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 底所有的点都是連續的，則其坐标也是連續的，此即表示可以找到一个充分小的 ε，使得当 $|\Delta t|<\varepsilon$ 时有：

$$|\Delta u_x|<\frac{\eta}{\sqrt{3}};\quad |\Delta u_y|<\frac{\eta}{\sqrt{3}};\quad |\Delta u_z|<\frac{\eta}{\sqrt{3}},$$

但在这种情形下，

$$|\Delta\boldsymbol{u}|^2=\Delta u_x^2+\Delta u_y^2+\Delta u_z^2<\eta^2,$$

$$|\Delta\boldsymbol{u}|<\eta。$$

因此，即进入关于向量函数底均匀連續性的定理：若函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$ 对 t 在区間

$$t_1\leqslant t\leqslant t_2$$

中所有的值都是連續的，則对每一个任意小的 η，可找到一个充分小的 ε，使得当 $|\Delta t|<\varepsilon$ 时对屬于上述区間的任何一个 t，有

$$|\Delta \boldsymbol{u}|<\eta。$$

§5 向量函数底导数 在向量分析中与純量分析中完全一样地引入微分运算。

向量函数关于其純量变元的导数，是函数增量与对应的变元增量底比，当变元增量趋于零时的極限。

至于导数底記法，可采用純量分析方面通常的 Leibniz 符号；或仿照 Newton，在表示函数的字母上打一个全点，有如：

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\dot{\boldsymbol{u}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta t}。$$

既然一个向量 $\Delta \boldsymbol{u}$ 以一个純量 Δt 除时仍为一个向量，所以这个向量底極限，即导数，也是一个向量。过渡于極限的結果，显然与增量 Δt 所屬的値 t 有关，此即表示导向量底本身亦与 t 有关，而为变元 t 底一个新的向量函数：

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{u}}(t)。$$

对此函数，仍可計算其导数，并可类推下去。二阶、三阶等导数可記为：

$$\frac{d\dot{\boldsymbol{u}}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2}=\ddot{\boldsymbol{u}};\quad \frac{d\ddot{\boldsymbol{u}}}{dt}=\frac{d^3\boldsymbol{u}}{dt}=\dddot{\boldsymbol{u}}。$$

若函数对某一区間 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 中所有的値 t 容許一定阶数的导数之存在，即称此函数在所述区間上可微到对应的次数。

習題 6．証明对于一次函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}$（其中 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是常向量）：

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{a}。$$

§6 向量函数底圖解 为取得向量函数底明晰表象，可如下进行。对函数 $\boldsymbol{u}$ 底每一个値，由坐标原点作对应的有向綫段，其另一端落于某一点 M。当 $\boldsymbol{u}$ 变动时，点 M 繪成一空間曲綫，而称为已給函数 $\boldsymbol{u}$ 底圖解。

向量圖在討論向量函数时所起的作用，在一定程度內相似于

函数圖解在純量分析中所起的作用。但关于向量函数底完全表示，圖解的給定还是不充分的。除了它在空間中形狀与位置底确定外，还应有可能决定变元底那一个值对应于它底那一个点。为此，可想像在圖解上已作出变数 t 底值之标度，以对应圖解上所有的点(圖 1)。

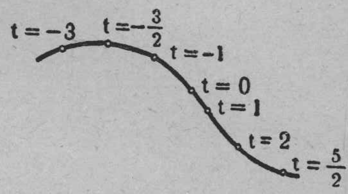

圖 1

習題 7. 証明一次函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}$ 底圖解为一直綫。

8. 証明函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\cos t+\boldsymbol{b}\sin t+\boldsymbol{c}$ 底圖解为一橢圓，位于过点 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{c}$ 且包含向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的平面上，但假定此二向量不共綫。

解：导入 Descartes 坐标系 xoy，以点 $\boldsymbol{c}$ 为原点，二軸沿向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之方向。若 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 为二軸底單位向量，則

$$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{b}=b\boldsymbol{j}。$$

在此坐标系中，圖解上的点將具坐标：

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,$$

而滿足橢圓方程式：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。\text{(圖 2)}$$

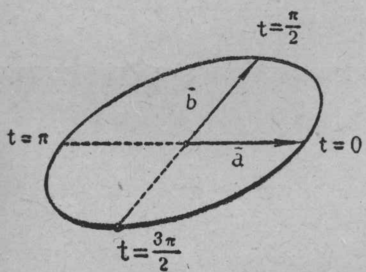

圖 2

特別若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 底絕对值相等 $(a=b=R)$，且互相垂直，則圖解即为圓。

9. 証明：若在上題中 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共綫，則圖解为直綫綫段。

10. 証明函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\operatorname{ch}t+\boldsymbol{b}\operatorname{sh}t$ 底圖解为双曲綫(假定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共綫)。

11. 証明函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t+\boldsymbol{c}t^2$ 底圖解为拋物綫($\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共綫)。

§7 向量函数之导数底几何意义 借助于向量圖，可建立微分运算底几何意义。

取圖解上二点 M 与 M_1，各对应于变元底值 t 与 $t+\Delta t$。作向徑

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{u} \text{ 与 } \overrightarrow{OM_1}=\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u}。$$

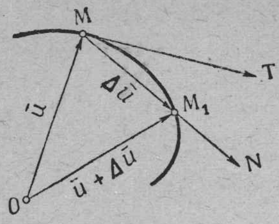

圖　3

函数底增量等于二向徑之差

$$\Delta\boldsymbol{u}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MM_1},$$

而对应于圖解上連接二点 M 与 M_1 的弦(圖 3)。

作增量底比，得向量

$$\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}=\overrightarrow{MN};$$

因为向量以純量除时不改变方向，故 $\overrightarrow{MN}$ 仍沿割綫 $\overrightarrow{MM_1}$ 底方向。若增量 Δt 底絕对値充分地小，則綫段 MN 底長度將大于弦 MM_1 底長度，如圖所示。

今假定函数連續。使变元增量 Δt 趋于零，則向量 $\Delta\boldsymbol{u}=\overrightarrow{MM_1}$ 也趋于零，而点 M_1 卽沿向量圖無限地接近于点 M。

同时，向量 $\dfrac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}=\overrightarrow{MN}$ 卽繞着点 M 随割綫一齐轉动，而趋于某一極限位置 $\overrightarrow{MT}$。

但通过曲綫上無限地接近的二点的割綫，其極限位置卽为此曲綫底切綫。

因此，向量

$$\overrightarrow{MT}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

乃沿向量圖之切綫底方向。

所以：向量函数关于其純量变元的导数仍为向量，而沿圖解上对应点底切綫之方向。

所得的导数底几何釋义，仅决定向量 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 底方向；而其絕对値，則与变元 t 底含义有关。特別若 t 为时間，則 $|\dot{\boldsymbol{u}}|=v$ 卽为一点沿圖形运动的速率。向量 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 本身此时称为点 M 底速度向量。

§8　向量底微分法則　关于和与积的通常微分法則，在向量

分析中仍然成立。

定理 1. 諸向量之和底导数等于各項之导数底和。

置 $$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 均为 t 底可微函数。則

$$\Delta\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\Delta\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{v},$$

$$\frac{\Delta\boldsymbol{w}}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t},$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{w}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

或

$$\frac{d(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})}{dt}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}。\tag{1}$$

定理 2. 向量与純量底乘积，純量积以及向量积，均可按照純量分析底通常法则微分。

对于所述的三种情形，証法是完全相似的，所以只須取一种来討論；不妨仍就向量积証明。

置 $$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v},$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 均为 t 底可微函数。$\boldsymbol{w}$ 底增量

$$\Delta\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u})\times(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v})-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=$$

$$=\boldsymbol{u}\times\Delta\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{u}\times\Delta\boldsymbol{v},$$

$$\frac{\Delta\boldsymbol{w}}{\Delta t}=\boldsymbol{u}\times\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}\times\boldsymbol{v}+\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}\times\Delta\boldsymbol{v},$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{w}}{\Delta t}=\boldsymbol{u}\times\lim\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}+\lim\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}\times\boldsymbol{v}+\lim\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}\times\lim\Delta\boldsymbol{v},$$

但 $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt},\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

而由于函数 $\boldsymbol{v}$ 底連續性，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\boldsymbol{v}=0。$$

所以　$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}=\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}。$$

在其余二种情形施行完全类似的运算与討論(均讓給讀者)，即得下面的三个公式：

$$\frac{d}{dt}(\lambda\boldsymbol{u})=\lambda\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\lambda}{dt}\boldsymbol{u},\tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\boldsymbol{v},\tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}。\tag{4}$$

由公式(3)可得純量自乘积底微分法則：

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}^2)=2\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}。\tag{5}$$

定理 3. 向量底混合积依照下面的法則微分：

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{uvw})=\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\boldsymbol{vw}\right)+\left(\boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{w}\right)+\left(\boldsymbol{uv}\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right)。\tag{6}$$

定理底証明讀者自己不难求得，只須注意

$$(\boldsymbol{uvw})=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}。$$

定理 4. 常向量底导数为零(因为其增量等于零)。

定理 5. 純量或向量的常数因子可拿出微分符号之外(由定理 2, 4 可推得)。

已得諸定理可用以由可微向量底已給坐标求出其导向量底坐标。

置　$$\boldsymbol{u}=u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k}。$$

应用和底微分法則于上式底右边，并將常向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 拿出微分符号之外，即得：

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{du_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{du_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{du_z}{dt}\boldsymbol{k}。\tag{7}$$

因此：向量函数之导向量底坐标等于此函数对应坐标底导数。