

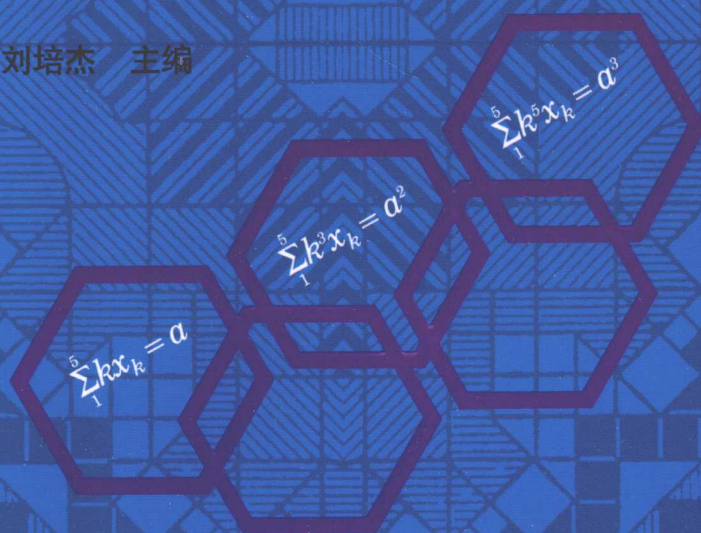
CHINESE
MATHEMATICAL
OLYMPIAD



历届 **CMO**

中国数学奥林匹克 **试题集**
1986—2009

刘培杰 主编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

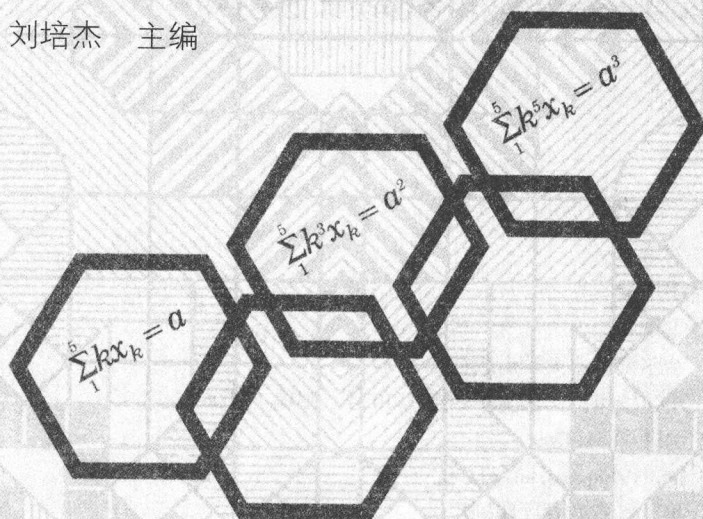
CHINESE
MATHEMATICAL
OLYMPIAD

历届 **CMO**

中国数学奥林匹克 **试题集**

1986—2009

刘培杰 主编



哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

全国中学生数学冬令营是在全国高中数学联赛的基础上进行的一次较高层次的数学竞赛,后改名为中国数学奥林匹克。本书汇集了第1届至24届中国数学奥林匹克竞赛试题及解答,适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

历届 CMO 试题集/刘培杰主编.—2版.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.7

ISBN 978-7-5603-2715-0

I. 历… II. 刘… III. 数学课—中学—试题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 127953 号

策划编辑 刘培杰

责任编辑 李广鑫

封面设计 卞秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 13.5 字数 225 千字

版 次 2008 年 10 月第 1 版 2009 年 7 月第 2 版

2009 年 7 月第 2 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-2715-0

印 数 3 001~5 000 册

定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序 | Prelude

在首届数学冬令营上的讲话^①

吴大任

同学们：

我非常高兴和你们见面。数学这个共同的爱好把我们聚在一起了。你们不但对数学有较浓厚的兴趣，而且已经表现出了对数学有较高的才能。可以肯定，你们当中的绝大多数将要在数学方面继续深造，并且运用这个有力工具为四化服务。我祝愿你们在建设有中国特色的社会主义中，作出自己的贡献。

（一）数学的巨大作用

我们有理由为数学有巨大作用而自豪。

时至今日，数学已经无所不在。基础科学和技术科学中，自然科学和社会科学中，数学的应用越来越广泛。可以说，数学的应用方兴未艾。数学对自然科学包括理论科学和技术科学的重要性，人们都比较了解。我只简略谈谈数学应用于经济学的一些情况，作为它渗入社会科学的一例。数学的许多分支，它的丰硕成果，都用到经济学里去了。数学和经济学相

① 本文是吴大任 1986 年 1 月 21 日对全国数学冬令营营员的讲演词。

结合,甚至产生了像数理经济学、计量经济学这样的自成体系的交叉学科。从 1969 年到 1981 年,13 次的诺贝尔经济奖中,就有 7 次可以看成是对应用数学颁发的,其中一次是苏联数学家获得的,他为处理经济问题创立了一项新方法,并得到成功。

18 世纪德国大哲学家康德说过:“我坚决认为,任何一门自然科学,只有当它数学化之后,才是完备的。”那时候,即使在自然科学中,数学的应用还不广泛,他能有这样的预见,是难能可贵的。马克思对康德这句话十分欣赏。康德那个时候,还不能预见到数学对社会科学的作用。现在康德的预言已经实现,而且对社会科学也在实现中。有人甚至说,人文科学也可能数学化。

(二)数学应用广泛的根本原因

为什么数学有那样大的威力呢?最根本的原因是,数学研究的对象是空间形式和数量关系,而这两者正是客观世界一切事物共同的基本要素。所以柏拉图说:“数学是现实世界的真髓。”19 世纪一位数学家说:“数学是科学的语言。”这都是对数学本质的很好概括。

数学来源于实践,这和一切科学没有什么不同。所不同的是,别的科学必须研究事物的具体性质,或多或少,涉及它们的某些方面的特殊性,而数学则只研究它们的共性,并且把这些共性抽象化,把其中规律加以高度概括。我们说“一加二等于三”不说“一本书加两本书等于三本书”。我们说,圆周长等于圆周率乘直径,不管是圆桌边还是地球赤道。由于这个原因,数学就有自己的概念符号以及表达其规律的特殊方式。数学家对客观事物的形状和数量中的五花八门的关系进行分析,找出其中少数最简单而基本的作为公理,然后从公理出发,通过严格的逻辑推理来得到其他关系。这些概念、符号、表达形式等放在一起,就成为数学语言。无论自觉或不自觉,我们都是这样做的。其结果,就是从比较简单的关系,推得比较复杂的关系。数学以及它的各个分支就这样逐步建立起来了。

数学来源于实践,而在数学推导中,又不联系到它的实际内容,这不是脱离实际,恰恰相反;这使得它的结论会有最广泛的(也许是潜在的)实际应用。与此同时,数学家对所得到的结果通过分析综合,找出其内在联系,整理成一定的体系,并逐步使它成为完善的逻辑结构。对于这种过程,我们就常

说:数学内部的矛盾促使它相对地独立于实践而发展。历史上一个著名的例子,就是非欧(几里得)几何的发现。在欧几里得《几何原本》出世之后,无数的数学家考察了它里面的公理体系。在这些公理中,有一个现在称为平行公理的第五公设。它本质上是说:已给一条直线和不在它上面的一点,恰好有一条直线经过所给点而平行于所给直线。人们希望从其他公理推得平行公理,但一切尝试都失败了。经过了两千多年,在十九世纪,人们终于认识到平行公理和其他公理是完全独立的,如果用另一个公理来代替平行公理,具体地说,假定有两条直线经过所给点而和所给线不相交,就得到了和欧几里得几何不同,但在逻辑上完全不含任何矛盾的双曲几何学,这就是两种非欧几何学之一(另一种非欧几何叫做椭圆几何)。起初,许多人不承认双曲几何,又过了几十年,才彻底证明了双曲几何和欧氏几何在逻辑上有同等的地位。到二十世纪初,狭义相对论创立,闵可夫斯基几何对相对论提供了天然的几何阐述,它和非欧几何的理论基础联系密切,非欧几何的实践意义才获得进一步承认。

另一方面,微积分和几何相结合,产生了微分几何。就在非欧几何出现后不久,黎曼推广了高斯关于曲面的成果,建立了黎曼几何,它成为广义相对论的基础。广义相对论的出现,促使近代的伟大几何学家E·嘉当用十年时间来研究各种联络的空间,这些研究后来导致陈省身等创立纤维丛理论。物理学家杨振宁说:“我所惊叹的是,(物理中的)规范场恰好就是纤维丛上的联络,而后者是数学家没有参照物质世界所发展起来的。”在我们看来,这是十分有意思的事例,但并不奇怪。因为数学既然是从实际中来的,它本质就是联系着实际的。在它的自我完善中,有时似乎是离实际很远,但联系着它和实际的纽带并没有完全割断,它的成果,有朝一日又能用来说明或解决实际问题,就是很自然的了。可以认为,纤维丛和规范场的同一性是客观世界统一性的反映。

上面举的例子也表明,数学(包括其中最抽象的部分)是如何和其他学科交织在一起,互相作用,互相促进的。而这也是数学发展最重要的动力之一。伟大的数学家希尔伯特说过:“只要一门(数学)分支能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题的缺乏,就预示着独立发展的中止。”数学的问题是哪里来的?一部分来自它的内部矛盾,但更多的则来自实践。应用数学大师,现代计算机的创始人冯·诺伊曼说:“大多数最美妙的灵感来源于经验。”就是这个道理。数学和实践是

有直接联系的,优选法就是一例,但更多的是间接的,是通过其他科学的。著名数学家 F·克莱因指出:“最伟大的数学家,像阿基米得、牛顿和高斯,总是把理论和应用等量地糅合在一起。”其实,不止数学家,历史上其他伟大的科学家也总是不同程度上把自己的学科和别的学科相结合的。可以说,当一门科学和其他科学割裂的时候,它发展就相对地慢,而当它和别的学科结合的时候,它发展就快。当前,不同科学的结合,产生了难以尽数的交叉学科,这是现代科学发展的一个特点,也是现代科学之所以迅速发展的重要因素。本来,客观世界是一个统一体,反映客观世界的科学也应当是统一的。分成不同学科是为了研究的便利。把不同学科相结合,在一定意义上就是部分地还其本来面目。这样看,交叉学科之富有生命力就不足为奇了。苏东坡咏庐山诗:“横看成岭侧成峰,远近高低各不同,不识庐山真面目,只缘身在此山中。”要认识庐山真面目,就要坐上飞机,要认识地球真面目,就要坐上航天飞机。瞎子摸象,有很大局限性,但如果多摸几个部位,也能对大象的轮廓获得较多的了解。

话说远了,让我们回到本题。在学科与学科的结合中,数学处于非常特殊的地位。因为数学可以和一切其他学科直接结合,而它又是打开科学大门的钥匙,没有它就难以深入到事物的本质。数学和其他学科结合,产生了应用数学;和不同学科结合,就有不同的应用数学。数学本身也还是一个整体,“分家”仍然是为了研究的便利。有人出于个人的爱好,认为只有纯粹数学是好的或漂亮的,而把应用数学说成是坏的或不漂亮的数学,这是不公正的。从逻辑体系看,纯粹数学是基础,应用数学是派生的;但从实践观点看,谁也离不开谁,就像一棵树的根、躯干和枝叶那样。

(三)中国数学的状况

现在我想谈谈中国的情况。

我们都知道,我国古代数学和其他科学都有着光辉的成就,许多成果比外国早得多。到近几百年,西方后来居上,把我们远远抛在了后面。我国老一辈的数学家努力把现代数学移植到国内,使它生根发芽,工作是很艰苦的。移植,首先是培养人,其次也作些研究工作。但是,在那时的半封建半殖民地社会,生产建设规模小,战乱频繁,数学工作者的活动范围基本上限于纯粹数学研究,工作也只能是零散的。新中国成立以后,形势有了根本改变,数学工作者们感到有用武之地了。

特别是从1956年制订科学规划起,不但纯粹数学,应用数学也受到了重视,特别是1958年展开的“教育革命”,强调了理论联系实际,许多数学工作者大搞应用研究,有些纯粹数学的转到了应用数学方面。这是好现象。缺点是基础数学受到了削弱。三年困难时期过后,情况有所转变,可惜好景不长,又发生了“文化大革命”。培养人的工作停顿了,科研工作中止了,只有个别可以直接取得经济效益的数学应用,还能进行一些。这样,数学,和其他科学一样,新中国成立后本来在缩小中的同先进国家的差距,又拉大了。

“文化大革命”结束,开始了中国的历史新篇章,也开始了数学教育和科研的新篇章。和国外交流的增加,使我们对自己的差距有了比较明确的认识。这激励我们非全力以赴地赶上去不可,而中央四个现代化的要求和十一届三中全会以后的英明决策,又创造了能够赶上的条件。几年来,中国数学会组织了四次全国性会议和为数众多的专业会议。前后比较,我高兴地看到,大批年轻有为的数学家正在迅速成长。我们的研究工作和国际上前沿工作的联系,也明显地多起来了。我们的信心大为增强,我们的前途无比光明。

但是,必须清醒地估计我们的现状。我们的数学队伍已经不小,但和先进国家比,还不够壮大,总的来说,质量还不够高。我们的研究成果,有的居于前列,个别的处于领先地位,但面还不够宽,而且还有缺口。我们多数的研究课题,涉及的面较窄,因而没有足够的分量。这些都是现阶段难以避免的。无论我的这些估计对或不对,都应当这样看:认识差距,才能缩短以至消灭差距。

有一个现象不能不引起我们严重关注,那就是,人们对数学重要性的认识还缺乏深度。我们对数学事业的支持还有待加强。例如在高等学校,数学以外的专业还没有开设足够的数学课程(包括选修课程),以满足部分有较高数学才能的学生的要求。包括数学专业在内,急于求专,忽视基础的现象还严重存在。基础不宽不牢,提高就要受到限制。近几年来,高考中报考数学(还有物理)专业的很不踊跃。这个现象如果不改变,其后果将是很严重的,我们不当要求有数学才能的青年都去学数学,但是,中国如果没有一定数量的高水平数学家,我们的科学技术就不可能立足于国内。

造成这些令人不安的情况,原因是多方面的,在这里我不进行全面分析。我只谈谈数学重要性为什么不易为人们所充分了解。首先,它的语言是非大众化的。对于专家来说,这种

语言有利于准确地表达抽象而带高度概括性的数学概念和关系。遗憾的是,其发展趋势离大众化不是越来越近而是越来越远。我现在感到,这个矛盾很难统一。我希望有人能用大众化的语言来阐明现代数学,只要说得明白而准确,哪怕噜苏一点也行。其次数学直接应用的少,间接应用的多。数学通过别的学科应用于实际,人们往往归功于那个学科而忽略了数学的作用。这个时候,数学便成了无名英雄。“英雄”,因为没有它不可;“无名”,因为“论功行赏”时,它没有份。数学是不声不响地渗入到科学技术各个领域的。在这方面,我们特别应当感谢不久去世的华罗庚同志。他搞了那么多带来直接经济效益的数学应用,又写了那么多数学普及读物,对帮助人们认识数学起了很大作用。

了解过去和现状,才能规划未来。我讲这段话是要说明:第一,我们数学目前和世界先进水平的差距还是不小的;第二,要避免重复过去对纯粹数学和应用数学认识的片面性;第三,要宣传数学的巨大作用。在强调经济效益的今天,最后一点是特别重要的。我们高兴的是,在中央的关怀和扶持下,我们已经有了科学院的几个关于数学的研究所和北京大学、复旦大学、武汉大学等数学研究所,又把原来的南开大学数学研究所改组成“立足南开,面向全国,放眼世界”的南开数学研究所。我以为,成立这个所的目的,就是在国内建立一个和世界有较多联系的,培养现代数学人才和发展现代数学研究的基地。全国数学界正在紧密团结合作来把它办好。

(四)对同学的几点建议

同学们!为四化服务,你们可以把数学作为工具来从事其他专业的工作,也可以把数学作为自己的终身事业。在后一种情况下,你们可以成为纯粹数学工作者,也可以成为应用数学工作者。那么在学习和研究数学中,有哪些需要注意的问题呢?我想提几点建议,供大家参考。

首先,要尽可能把基础打得宽广些、扎实些。这是老生常谈了。在这里所谓基础数学包括分析、代数和几何。许多年来,几何没有受到应有的重视,这是不恰当的。因为这三方面也是互相联系,互相促进的,不能偏废。许多数学家,包括希尔伯特在内,都曾强调过几何的重要性。

在现代物理中,几何的作用更是突出的。

我们不能搞实用主义,特别是对基础数学,不要认为有用的就学,用处不明显的就不学。现在,在国内、在苏联,都开始

注意到这个问题,都在适当加大几何和代数的比重,并且开始尝试把这三个分支在一定程度上结合起来讲授。我所谓扎实,就是掌握好基本概念和方法,培养自学能力、分析能力、运算能力、逻辑推理和逻辑表达等能力。要创造性地学习,要作书本的主人,不作书本的奴隶,还要学习查文献。这些要通过实践环节来逐步达到。基本功扎实了,就能够通过自学来学到在课堂上没有学到的东西,否则就会在业务上停滞不前,更谈不上创新。

对于有志从事应用数学的人,当然要兼顾某一门或更多门其他学科,这是不在话下的。现在不是有双学位制吗?这是个好制度。在一个专业毕业,再作为另一个专业的研究生继续学习,也是发展应用数学的一种方式。据我了解,许多应用数学家是纯粹数学家出身的,因为学数学的兼学别的学科比较容易,反过来就比较困难。

对于有志从事纯粹数学工作的人,最好也能学点别的学科。在数学内部,也力求知识面宽一些,经典的要学,现代的也要学。英国著名数学家阿梯亚说:“数学像是发育中的机体,它同过去以及同其他学科的联系是历史悠久的。”数学内部的横向联系,当然也是这样。数学家常常意外地发现各个数学分支之间有许多相似的地方;它们是可以互为工具,互相启发的。1983年三个菲尔兹奖获得者(其中有一位是丘成桐)都是由于他们在几何和分析的交叉领域中的工作而被评上的。这当然有偶然性,但偶然性是寓于必然性之中的。伟大的数学家往往是精通几个分支的,但这不妨碍他以其中一两个分支为主。

为了扩大知识领域,扩展视野,我们提倡交朋友,交同行朋友,也交不同行的朋友。南开数学所每年确定一两个研究方向,各年方向不同,年年邀请有关方面的国内外专家来进行研究和学术交流,这是我们的数学工作者广交朋友、扩大视野的好机会。

其次要分清当前数学研究的主流和支流。主流就是最活跃的研究领域,问题最丰富的领域。主流不是国内一段时间在“业余数学家”中出现的热门,像一个时期的四色问题、哥德巴赫问题之类。年轻同志在主流中选题较容易学到新概念、新方法、新成果,也较容易做出有意义的结果。非主流的东西也可以做,但不能成为多数人的主攻方向。学点数学史,了解数学的过去和现状,了解它的发展规律,也便于识别主流和支流。

第三,要不懈地、勤奋地工作。我非常欣赏“天才来自勤奋”这句话。人的天赋是有所不同的,但是天赋好的不少,科学上取得好成就的相对地不多,起决定作用的还是勤奋。我还非常欣赏体育界流行的一句话“从头开始”。不因胜利而骄傲自满,不因失败而丧失信心。在座的同学在数学竞赛中取得好成绩,现在也要“从头开始”。在一切工作中,总有成功和失败,在数学研究中更是失败多于成功,失败提供反面经验,而有些反面经验比正面经验更宝贵。

任何重大成就都是不是侥幸得来的。牛顿看到苹果落地而发现万有引力,瓦特看到水壶中的水烧开后把壶盖掀起而发明蒸汽机,这种传说是很片面的。有人把这叫做“灵感”,那么这种灵感就来自长期的观察和深入思考,而不是凭空突然发生的。许多人都有这样的经验:当他对一个问题钻研很久,碰到困难,解决不了时,他在休息当中或者休息以后会忽然发现解决问题的途径。有人会在半夜睡觉醒来的时候,或在卫生间里找出办法。英国数学家李特伍德说,他有不少问题是星期一解决的。我自己也有这样的经验,假期之后,常常容易获得研究的进展。这说明脑力劳动要“一张一弛”。在紧张的脑力劳动之后,特别是遇到难以克服的困难时,就该休息一段时间,再把工作捡起来。这会提高效力。

同学们!陈省身教授认为,到本世纪末,中国可能成为数学大国。这是有根据的。历史和现状都证实,中国人是有数学才能的,我们又处在新中国成立以来政治经济最好的时期。到1990年,你们大学毕业,到本世纪末,你们已从事科学工作十年。那时我国要达到小康水平,成为数学大国,都包含着你们的贡献。你们工作到八十岁,就到了21世纪中叶,可以预期,那时候中国在各个方面的,包括数学在内,都会处于领先地位。这将是在座同学和全国人民一道奋斗的结果。

祝愿冬令营成功,同学们前途无量!

吴大任(Wu Daren, 1908—),中国人。出生于天津市(祖籍广东省肇庆市)。1930年毕业于南开大学;1933年赴英留学;1935年获硕士学位;1935年至1937年在德国汉堡大学进修积分几何;1937年回国后先任武汉大学、四川大学教授,后任南开大学教授、教务长、副校长。还曾任中国数学会副理事长。

吴大任在几何学方面作出了贡献。他对三维椭圆空间的积分几何作了系统研究,并得到其中运动的基本公式。他出版了《微分几何讲义》(人民教育出版社,1959)等著作。

前言 | Preface

中学生参加数学竞赛对他们一生都有着深刻的影响,如印度天才数学家拉马努金,在高中阶段就经常赢得数学问题解决竞赛第一名,以至他的校长纳斯瓦米·耶耳(Krishnaswami Iyer)在1904年授予他“K·郎迦纳萨·桡(K. Ranganatha Rao)数学奖”时评价说:“拉马努金是如此出色,满分也不足以说明。”非线性科学中的最为大众所知晓的通俗解释是“蝴蝶效应”,即非线性系统的输出对初始条件有敏感依赖性(就是古语所云:差之毫厘,谬以千里)。从人的成长来看人的童年和少年的经历就类似于初始条件,而人成年后的行为则类似于数学中函数 n 次迭代结果,而人生显然是非线性的(线性行为多为决定性的,而非线性以非决定居多),我们来看一个典型的与数学竞赛有关的蝴蝶效应。

卡尔·波莫伦斯(Carl Pomerance)在美国读高中时参加了一次数学竞赛,其中有一道题目是要求分解8 051,并要求在5分钟之内完成,而当时还没有微型计算器,虽然波莫伦斯长于心算,但他决定首先看看,是否可以找到一个巧妙的捷径,而不是通过一个一个地尝试来找到答案,他回忆说:“我用了两分钟左右寻找新方法,逐渐地我觉得自己浪费了太多时间,我开始变得焦急,于是重新开始尝试可能的因子,但由于时间浪费太多,我没有做出这道题。”

分解8 051的失败,激起了波莫伦斯一生对于快速分解整数方法的研究,并最终发明了“二次筛选法”。1994年4月,

两位数学家阿仁·兰斯特拉(Arjen Lenstra)和马克·玛纳斯(Mark Manasse)使用波莫伦斯的“二次筛选法”,集合了 24 个国家数百台计算机的威力,加上 8 个月的实时计算终于破解了 MIT 三剑客 RSA,即罗恩·瑞威斯特(Ron Rivest)、莱昂纳德·阿德曼(Leonard Adleman)和阿迪·沙米尔(Adi Shamir)提出的挑战 RSA129,而三剑客开始估计需要 4×10^{16} 年才能破解.

从 8 051 到 RSA129 就是从数学竞赛到数学研究的过程.

类似的例子很多,如领袖数学家法国的庞加莱(Henri Poincare)在 1871~1872 学年的全面基础数学竞赛中获得了头等奖;1872~1873 学年他进入了特殊数学班,并再次获得全面竞赛的头等奖.这使得他对数学产生了浓厚的兴趣,最后成为一代大师.

在青少年成才的规律中还有一个皮格马利翁效应,即人们期待你成为什么样的人你就会成为什么样的人.现在密码学中最热门的话题是椭圆曲线,这些曲线由具有特殊形式的方程所定义,并在安德鲁·怀尔斯关于费马大定理的证明中处于核心地位,它们已经作为一种快速地将整数分解为素数的方法进入了密码学世界,华盛顿大学西雅图分校的尼尔·柯布利兹(Neal Koblitz)在 20 世纪 80 年代中期就研究利用椭圆曲线来进行加密.

作为一名资深的数学家,柯布利兹对数学有很高的热情,他回忆说那是由童年时期意外发生的一连串偶然事件引起的:

“当我 6 岁时,我们全家在印度的巴罗大(Baroda)待了一年,那里学校对数学的要求比美国的要高许多,第二年当我返回美国时,我已经超过同班同学一大截,我的老师误认为我对数学有特殊天分.就像其他一些容易在头脑中形成的错误概念一样,这种错觉逐渐变成了一种自我实现的预言.我从印度回来之后受到的所有鼓励,促使我走上了数学家的道路.”

我们必须强调一点,任何形式的考试都只能判断出一个人是否优秀但不足以判断一个人是否天才.例如法国心理学家比奈(Alfred Binet, 1859—1911)发明的智商测试方法在一段时间内被公认为比较科学,但是数学界的领袖人物庞加莱在数学和科学创造与普及的影响都达到巅峰时,曾参加了一组比奈智力测试,他的表现大失水准,被判为傻子,人们把这归结为天才通常比测试的发起者或组织者看问题更深远,所以有些数学家也考不过中学生.

另外,参加数学竞赛越早对其一生的影响越深远,这并不

是像张爱玲所说的“成名要趁早”，而是因为中学阶段正是观念形成的重要时期。

意大利解析数论专家邦比里(Enrilo Bombieri)因为对黎曼假设的成立有一种绝对的信心.这像是一种宗教的信仰.“如果它不正确,那么整个世界都将崩溃,因此它必须正确.”为此邦比里详细地描述过了这点:“当我在十一年级的時候,我读过一些中世纪哲学家的东西,其中一位叫奥卡姆(William of Occam).他提出过一个思想,当我们必须在两种解释中选择一个的时候,总是应该选简单的那一个.这就是奥卡姆剃刀的原则,排除困难的,选取简单的.”对邦比里而言,落在临界线之外的零点就像是管弦乐队中某件乐器“掩盖了其他乐器的声响——这是一种非美学的情形.作为奥卡姆剃刀的忠实信徒,我拒绝接受这个结论,因此我相信黎曼假设是正确的”。

对于国际中学生数学奥林匹克,陈省身说:“这项竞赛的难度是高中程度,不包括微积分,但题目需要思考,我相信我是考不过这些小孩子的.因此有人觉得,好的数学家未必长于这些考试,竞赛胜利者也未必是将来的数学家.这个意见似是而非.数学竞赛大约是在百年前在匈牙利开始的,而匈牙利产生了同它的人口不成比例的许多大数学家.”在匈牙利那些大数学家中没有参加过数学竞赛的只有两位——爱尔特希和冯·诺伊曼,而这两位据说都是因为竞赛时没在国内.(陈省身.怎样把中国建为数学大国.原载《数学传播》第14卷第4期,1990年12月)

在许多公开的数学竞赛中,学生并不一定会输给职业数学家,例如在全世界范围的寻找大素数的竞赛中,开始是数学家领先,如著名数学家罗宾逊的丈夫拉非尔·罗宾逊,他在伯克利的数学家们的协助下,在一台由小莱默建造的叫标准西部自动计算机(Standards Western Automatic Computer)上发现了一个大梅森素数 $2^{2^{281}} - 1$,而一位加拿大的学生迈克尔·卡梅隆(Michael Camevon)1个人仅用个人计算机就证明了 $2^{13\,466\,917} - 1$ 为素数,这是一个超过400万位的数。

对于想进一步学习数学的学生参加数学竞赛是大有益处的.陈省身教授说:“我们每年派去参加国际数学奥林匹克数学竞赛的中学生都很不错.虽然中学里数学念得好将来不一定都研究数学,但希望有一部分人搞数学,而且能有所成就.昨天,我和在北京的一些数学竞赛中获奖的学生见面,谈了话.我对他们说,搞数学的人将来会有大的前途,10年、20年之后,世界上一定会缺乏数学人才.现在的年青人不愿念数学,

势必造成人才短缺.学生不想念数学也难怪,因为数学很难,又没有把握.苦读多年之后,往往离成为数学家还很远.同时,又有许多因素在争夺数学家,例如计算机.做一个好的计算机软件,需要很高的才能,很不容易,不过它与数学相比,需要的准备知识较少.搞数学的人不知要念多少书,好像一直念不完.这样,有能力的人就转到计算机领域去了.也有一些数学博士,毕业后到股票市场做生意,例如预测股票市场的变化.写个计算机程序,以供决策使用,其收入比大学教授高得多了.因此,数学人才的流失,是世界性的问题.”(科技导报.1992 年第 11 期)

10 多年过去了,陈老的话应验了,数学人才成了稀缺资源,特别是高端的数学人才.当然部分原因是由于我们国家选拔人才的途径还比较少.数学竞赛官方承认的只有初、高中全国数学联赛几种,而像美国类似的大奖却有很多,如英特尔科学与工程大奖赛(Intel ISEF)(从原来的西屋奖改来,原名为 Siemens Westinghouses Science and Technology Competition).它是美国历史最悠久的一项高中科学竞赛,该科学奖常常成为高中生进入哈佛、耶鲁等名牌大学的“录取通知书”,人们将该奖项看做是未来科学家的摇篮,自该奖设立以来的 54 年间,获奖者中已有 30 人成为美国国家科学院院士,5 人获诺贝尔奖.2006 年获奖者是年仅 16 岁的美国加州少年迈克尔·维斯卡尔迪(Michael Viscardi),他凭借对一个历史悠久的数学难题——“迪利克雷(Dirichlet)问题”的全新解法获奖,并斩获高达 10 万美元的奖学金.

在英国也有类似的科学竞赛,优秀选手层出不穷.1991 年 1 月《泰晤士报》刊登了一篇头版文章,标题是“少女破解电子邮件密码”.这项成就为爱尔兰少女萨拉·弗兰娜瑞(Sarah Flannery)获得了一项科学竞赛的奖励.弗兰娜瑞以一篇长达 50 页题为《密码研究——一种与 RSA 相对的新算法》(《Cryptography: A New Algorithm Versus the RSA》)的报告获物理、化学和数学类第一名,并荣获大赛全能奖,被提名为 1999 年“爱尔兰年度青年科学家”.1999 年 9 月,弗兰娜瑞又以一篇题为《密码学——和 RSA 相对的一种新算法的研究》(《Cryptography: An Investigation of a New Algorithm Versus the RSA》)的报告被提名为 1999 年欧洲青年科学家,获得了 5 000 欧元的奖励并参加了在瑞典举行的诺贝尔颁奖典礼.

不过在中国这个不足正在开始弥补.2008 年 3 月 26 日,在北京隆重地举办了“丘成桐中学数学奖”启动仪式,这是丘

成桐先生提议并得到泰康人寿保险响应的一个面向全球华人青少年的大赛.希望通过专题研究,培养新一代中学生的数学素养,引发青年人探索知识的兴趣及提升他们的创新能力.第一届“丘成桐中学数学奖”颁奖仪式定于2008年10月24日在北京举行,届时美国哈佛大学、布朗大学等名校的本科招生主任将会出席,并面试部分获奖学生.

本书是刘培杰数学工作室继成功推出《历届IMO试题集》之后的续集,按下来还会有《历届美国大学生数学竞赛试题集》,《历届俄罗斯大学生数学竞赛试题集》.这几本试题集的一个共同特点是先易后难,体现了这几种竞赛活动从幼稚走向成熟的过程,也表明选手们一代更比一代精.前苏联数学不论是中学还是大学均领先于我们姑且不论,而美国单就数学竞赛而言是弱于中国的,但大学例外,其早期也不像我们想象的那样强.

美国早期的大学主要是为了训练神职人员,因而紧跟英国的计划,将他们的工作主要限制在拉丁文和希腊文,结果,即便是硕士学位的科学课程,也没有什么价值,1700年前美国产生的唯一数学硕士论文的标题是“圆面积可求吗”,这篇论文1693年出现在哈佛大学,还好作者认为是可求的.

为了更清楚地看出早期美国大学数学的标准,我们找到了1718年耶鲁大学学士学位论文的若干题目,水平之低,可见一斑.

1. 任何给定的数乘以一个小数,其值减小,而除以一个小数,其值增大.
2. 被乘方的数可以从开方得到.
3. 给定三角形底和高,底角不能用含有正弦函数的公式表达.
4. 运用对数能精确求解三角问题.
5. 球体表面积是其最大圆周面积的4倍.

当然这并不能说明西方人不聪明没有学习数学的天分,而是说在当时并不重视这一学科.有一则轶事是说,19世纪英格兰数学家哈米尔顿发现四元数的热情鼓励着泰特(Peter Guthrie Tair, 1831—1901),在剑桥大学当学生时,那儿的数学教授总被人嘲笑没有《圣经》知识,泰特和另一个学数学的同学决心为他们雪耻.结果在接下来的两年里,他们相继赢得了《圣经》知识竞赛的一等奖.就是说学数学的人素质是有的,关键是是否重视.早年东西德国未合并之前,东德在IMO一直是屈居末位.后来当时的执政党专门开了一次政治局会议研究这一问题,结果第二年就跃居首位.

目前社会上有些人将数学奥林匹克妖魔化,这并不足怪,因为纵观历史我们发现对数学的轻视、敌视也曾反复出现,如中世纪宗教领袖奥古斯丁就曾说过:“好的基督徒应该警惕数学家和所有制造空洞预言的那些人,危险已经存在,数学家已经与魔鬼结盟,要一起来败坏灵魂,把人们禁闭在地狱。”

公元 4 世纪时,在罗马皇帝的法典中有:“任何人都不要向占星士和数学家请教。”在公元 6 世纪的法典中也有一条“关于凶犯、数学家和类似的人”的法律。将凶犯和数学家并列是对数学最大的不敬,而现在社会上也有人将奥数 and 杂技并列,其实奥数是社会留给天才人物的一架后楼梯,否则类似拉马努金那样的超级天才只能偶然地被哈代发现而别无他途。

会解难题是数学天才的最显著特征,以至于好莱坞的编剧们都知道这一点。

由马特·戴蒙担任主演的好莱坞电影《心灵捕手》(《Good will Hunting》)讲的是一个出生于劳苦家庭的野孩子,在剑桥的后街里巷中长大.他是麻省理工学院的门房警卫,没事的时候常与地痞流氓厮混,打架斗殴.然而麻省理工学院的教授们却吃惊地发现,这个市井小地痞实际上是个数学天才,对于看似纠缠不清的数学难题,他能够一挥而就地写出答案.意识到这个野小子已经自己学完了高等数学以后,其中一个教授脱口而出地说他就是“下一个拉马努金”。

任何一个高中生如果仅凭自己能独立解出本书中的全部题目,那他也很有可能就是下一个拉马努金,我们期待发现他。

原定本书由吴康先生作序,但因吴先生身体有恙,故由我代之。

刘培杰

2008.8.20