普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学系列教材（第二版）

大学数学 3

湖南大学数学与计量经济学院 组编

主编 曾金平 彭亚新

Mathematics

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
大学数学系列教材（第二版）

大学数学

3

湖南大学数学与计量经济学院　组编
主　编　曾金平　彭亚新

高等教育出版社

内容简介

本书是《大学数学》系列教材之一，内容包括行列式、矩阵理论、向量空间、线性方程组和二次型等五章。各节后配有适量习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨、内容丰富、重点突出、难点分散，概念、定理及理论叙述准确、精炼，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性。

本书是为高等本科院校非数学类专业学生编写的"线性代数"课程教材，也适合各类需要提高数学素质和能力的人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.3/曾金平，彭亚新主编:湖南大学数学与计量经济学院组编.—2版.—北京:高等教育出版社，2009.2

(大学数学系列教材)

ISBN 978-7-04-026419-7

Ⅰ.大… Ⅱ.①曾…②彭…③湖… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 008058 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	高等教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2003 年 1 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2009 年 2 月第 2 版
印　　张	9.25	印　　次	2009 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	160 000	定　　价	10.70 元

物料号　26419-00

大学数学系列教材
（第二版）

湖南大学数学与计量经济学院组编

《大学数学1》　主编　黄立宏　马柏林
《大学数学2》　主编　曹定华　孟益民
《大学数学3》　主编　曾金平　彭亚新
《大学数学4》　主编　罗　汉　杨湘豫
《大学数学5》　主编　李董辉　蒋月评

前　　言

湖南大学数学与计量经济学院于2001年组织编写了《大学数学》(1~5)系列教材，由刘楚中任总主编，黄立宏任副总主编，其中，《大学数学1》由黄立宏和戴斌祥主编，刘楚中、杨湘豫、李亚琼、邓爱珍、孟益民、朱惠延参加编写；《大学数学2》由曾金平和李晓沛主编，彭亚新、邓爱珍、蒋月评参加编写；《大学数学3》由刘楚中和曹定华主编，杨冬莲、李建平、刘开宇、彭亚新、历亚、朱郁森参加编写；《大学数学4》由杨湘豫和邓爱珍主编，喻胜华、谭德俊、彭国强、晏木荣、刘先霞、胡春华参加编写；《大学数学5》由李董辉和曾金平主编，马传秀参加编写。该系列教材被列为“普通高等教育‘十五’国家级规划教材”，由高等教育出版社于2002年和2003年相继出版。教材出版后已历经湖南大学非数学类专业多届本科生使用，国内许多高校也将其选作一些本科专业的教材，得到师生的好评，同时我们也收集到了许多宝贵意见和修改建议。为了进一步提高教材质量，打造精品教材，学院决定组织人员对该系列教材进行修订，并于2005年底由黄立宏教授牵头将教材的修订申报了“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”，得到顺利通过。现出版的此套教材就是在原《大学数学》(1~5)系列教材的基础上修订而成的。由于参加原系列教材编写的部分教师相继退休或调离，在此次修订工作中，我们新成立了编写委员会，委员会由黄立宏任主任，罗汉任副主任，修订版各分册的主编为成员。

本分册是在原系列教材之一的《大学数学2》的基础上修订而成的，由曾金平和彭亚新任主编，内容包括行列式、矩阵理论、向量空间、线性方程组和二次型等。修订版在原教材的基础上对教材内容的取舍和叙述进行了进一步锤炼，调整和改写了部分内容，使之更加清晰、易懂、便于教学，更切合理工科非数学类专业的实际要求，也删改和补充了部分例题和习题，修改了个别错误和不当之处。

本教材中难免会有不妥之处和有待进一步改进的地方，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材的编写和出版得到湖南大学数学与计量经济学院各位教师、湖南大学教务处、高等教育出版社的大力支持，在此表示衷心感谢。

湖南大学数学与计量经济学院

2008年11月

目　录

第一章　行　列　式

在中学代数中，我们解过一元、二元、三元乃至四元一次方程或一次方程组．本书中我们将讨论更多变元的一次方程组，即多元线性方程组．线性方程组理论有相当广泛的应用线性代数问题．特别是计算机技术飞跃发展的今天，线性方程组的求解问题几乎涉及大规模科学与工程计算中的各个分支领域．比如，数值天气预报、土木结构设计等实际问题都可归结为大规模线性方程组的求解．因此，了解线性方程组的理论体系是相当必要的．实际上，早在 18 世纪，线性方程组就已经成为数学家和数学爱好者所关心的话题．他们通过引入行列式这一重要数学工具，完美地建立了线性方程组的理论体系．这套理论的基础便是依托行列式建立起来的克拉默(Cramer)法则．为此，我们首先引入 n 阶行列式的定义并讨论它的性质和计算方法，然后介绍 n 元线性方程组的克拉默法则．

第一节　n 阶行列式的定义

一、二元和三元线性方程组的克拉默法则

给出一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 均为给定的系数．利用消元法，将第一个方程乘以 a_{22}，第二个方程乘以 a_{12}，然后相减，可消去变元 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

将上式代入第一个方程并化简，有

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

其中 D 称为方程组(1)的系数行列式,而 D_1, D_2 分别是用方程组(1)中常数项 b_1, b_2 代替 D 中 x_1, x_2 的系数后得到的行列式.(2)和(3)式表明:当系数行列式 $D\neq 0$ 时,方程组(1)的解可简单地表示为:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{4}$$

公式(4)称为解二元线性方程组的克拉默法则.

类似地,给出一个三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{5}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D\neq 0$ 时,通过消元,可得线性方程组(5)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{6}$$

公式(6)称为解三元线性方程组的克拉默法则.

二、排列及其逆序数

当线性方程组(1)和(5)的系数行列式 $D\neq 0$ 时,其解可以很简单地用二阶或三阶行列式表示出来.我们自然会问,对于含有 n 个变量的线性方程组,其解是否同样也能用类似于(4)和(6)的公式来表达呢?为了回答这个问题,首先我们定义 n 阶行列式.作为定义 n 阶行列式的准备,我们先引入排列及其逆序数的概念.

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即大数排在小数的前面,则称它们为一个逆序.一个排列中所有逆序的总数称为该排列的逆序数.逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$,简记为 τ.

例如,五级排列 12345 中没有逆序,故 $\tau(12345)=0$;而在排列 54321 中,

54,53,52,51,43,42,41,32,31,21 是逆序,故 $\tau(54321)=10$;在排列 43512 中,43,41,42,31,32,51,52 是逆序,故 $\tau(43512)=7$. 排列 12345 和 54321 是偶排列,而排列 43512 是奇排列.

将一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列. 这样一个变换称为一个对换. 如经过 1,3 对换,排列 123 变成 321,排列 652314 变成 652134. 容易看出,排列 123 是偶排列,而对它作一次对换后的排列 321 却是奇排列;排列 652314 是奇排列,而对它作一次对换后的排列 652134 却是偶排列. 下面的定理表明,上面的结论具有普遍性.

定理 1　对换改变排列的奇偶性,即经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.

***证**　先考虑相邻两个数的对换. 设排列

$$\cdots jk\cdots$$

经 j,k 对换变成排列

$$\cdots kj\cdots.$$

显然这时排列中除 j,k 两个数本身顺序改变外,其他数的顺序并没有改变. 而 j,k 之间,若 $j<k$,则经过对换后的排列的逆序数比原排列的逆序数增加 1. 若 $j>k$,则经对换后的排列的逆序数比原排列的逆序数减少 1. 因此,对换 j,k 的位置改变排列的奇偶性.

再看一般的情形. 设排列

$$\cdots j i_1 i_2\cdots i_m k\cdots$$

经 j,k 对换变成排列

$$\cdots k i_1 i_2\cdots i_m j\cdots.$$

现先对原排列施行 m 次相邻两个数的对换:依次对换 k 与 $i_m,i_{m-1},\cdots,i_2,i_1$ 的位置,则原排列变为 $\cdots jki_1i_2\cdots i_m\cdots$;然后,再经过 $m+1$ 个相邻两个数的对换:依次对换 j 与 k,j 与 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 的位置,则原排列就变成了 $\cdots ki_1i_2\cdots i_mj\cdots$.

因为每次相邻两个数的对换都改变排列的奇偶性,上面一共施行了 $2m+1$ 次相邻两个数的对换,于是奇数次相邻两个数的对换仍然改变了排列的奇偶性.

由上面的定理可推知,在 $n(\geqslant 2)$ 级排列中,奇偶排列各占一半(即各有 $\frac{n!}{2}$ 个).

三、n 阶行列式的定义

根据排列与逆序数的概念可以看出

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2)}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2j_3)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中在第一个式子中，$\sum\limits_{(j_1j_2)}$ 表示对所有的二级排列求和；在第二个式子中，$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示对所有的三级排列求和.

仿照上面，我们引入 n 阶行列式的定义.

定义 2 设 $n(\geqslant 2)$ 为自然数，由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为一个 n 阶行列式，其中 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的元素. 该行列式的值等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和

$$\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 级排列，$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{7}$$

由定义立即看出，n 阶行列式由 $n!$ 项组成，其中一半带正号，一半带负号. n 阶行列式(7)有时简记为 $|a_{ij}|$.

定理 2 n 阶行列式的定义也可写成

$$D=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

证 将项

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{8}$$

重新排成如下形式

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}. \tag{9}$$

因为数的乘法可交换，因此(8)和(9)是相等的.

又因为(9)是由(8)经过一系列元素的对换得来的，而每作一次元素对换，相应的行下标和列下标所成排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 也同时作了一次对换，因此由定理 1 知，行下标和列下标的排列的逆序数同时改变了奇偶性，因而行下标和

列下标的排列的逆序数之和不改变奇偶性，于是

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12 \cdots n)+\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')}=(-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')},$$

故

$$\begin{aligned}&\sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \\ =&\sum_{(j_1' j_2' \cdots j_n')}(-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')} a_{1 j_1'} a_{2 j_2'} \cdots a_{n j_n'} .\end{aligned}$$

按定理 2 决定行列式中每一项的符号的好处在于，行下标与列下标的地位是对称的. 因此，行列式的每一项也可以将列下标以自然顺序排起来，即得如下推论：

推论 1

$$D=\sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} . \tag{10}$$

例 1　计算行列式

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

解　所计算的行列式为一个四阶行列式. 根据行列式的定义，应该有 $4!=24$ 项，但由于有许多零元素，使得不为零的项大大减少. 实际上，分析项

$$a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3} a_{4 j_4}$$

知，如果 $j_1 \neq 4$，则 $a_{1 j_1}=0$，即只需考虑列下标 $j_1=4$ 的项. 同理，只需考虑列下标 $j_2=3, j_3=2, j_4=1$ 的项. 换句话说，行列式中不为零的项只有一项，即 $a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$. 由于逆序数 $\tau(4321)=6$，故这一项带正号. 所以

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=24.$$

例 2　计算下列 n 阶行列式

(1) $D_1=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$；　(2) $D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$；

解　根据行列式的定义，行列式 D_1 应该有 $n!$ 项，但由于有许多零元素，使得许多项为零. 注意到行列式 D_1 的第一行元素除了 a_{11} 以外，其余全为零，因而，只需考虑 $j_1=1$ 的项. D_1 的第二行元素除了 a_{21}, a_{22} 以外，其余全为零，因而只需

考虑 $j_2=1$ 或 $j_2=2$ 的项. 但由于 $j_1=1$, j_2 不能再取 1, 因而只需考虑 $j_2=2$ 的项. 这样逐步递推, 不难看出, 在行列式的各项中, 除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 以外, 其余全为零. 于是

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似地可以证明

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

我们称形如 D_1 的行列式, 即主对角线(从左上角元素到右下角元素的连线)的右上方元素全为零的行列式为下三角形行列式; 而形如 D_2 的行列式, 即主对角线的左下方元素全为零的行列式为上三角形行列式. 下三角形行列式和上三角形行列式统称为三角形行列式. 从上例中可以看出, 三角形行列式的值非常容易计算, 就等于主对角线上元素(简称为对角元)的乘积. 作为特殊情形, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

我们称上述行列式, 即对角元以外的元素全为零的行列式为对角形行列式, 它的值也等于对角元的乘积.

习题 1-1

1. 用行列式的定义计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 写出 4 阶行列式中所有带负号且含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

3. 证明:若在一个 n 阶行列式中等于 0 的元素的个数大于 n^2-n,则该行列式为 0.

4. 分别选择 i 和 j,使得(1) $1274i56j9$ 成奇排列;(2) $1i25j4897$ 成偶排列.

第二节　行列式的性质

利用行列式的定义直接计算行列式一般很困难,尤其当行列式的阶数增大时,困难程度就愈加显著. 本节我们首先研究行列式的基本性质,然后通过这些基本性质,将复杂行列式的计算化为简单行列式的计算(比如三角形行列式的计算),将高阶行列式的计算化为低阶行列式的计算,达到简化计算的目的.

一、行列式的性质

性质 1　将 n 阶行列式 D 的行和列互换,其值不变,即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=D^{\mathrm{T}}$,且称行列式 D^{T} 为行列式 D 的转置.

证　在 D 中位于第 i 行,第 j 列的元素 a_{ij} 在 D^{T} 中位于第 j 行,第 i 列. 记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则有 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 由行列式的定义及上一节推论 1 有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \\ &= D. \end{aligned}$$

性质 1 表明,在行列式中行与列的地位是对称的,因此凡是有关行的性质,对列也同样成立.

性质 2 互换 n 阶行列式的任意两行(列),行列式仅改变符号.

证 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 第\, i\, 行 \\ \\ 第\, k\, 行 \\ \\ \\ \end{matrix},$$

交换 D 的第 i 行和第 k 行,得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ 第\, i\, 行 \\ \\ 第\, k\, 行 \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

因 D 中任意一项 $a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$ 也是 D_1 中的一项 $a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$,其中 a_{kj_k} 是 D_1 中第 i 行第 j_k 列元素,a_{ij_i} 是 D_1 中第 k 行第 j_i 列元素. 故项 $a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$ 在 D 中的符号为 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}$,项 $a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$ 在 D_1 中的符号为 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}$. 又因为排列 $j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n$ 是由排列 $j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n$ 对换 j_i 和 j_k 的位置后得到的,所以

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}.$$

因此

$$D=-D_1.$$

推论 1 若行列式中某两行(列)的元素对应相等,则行列式为零.

性质 3 行列式的某一行(列)的所有元素同乘以一个数 k,等于以 k 乘以这个行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots ka_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= kD. \end{aligned}$$

推论 2　若行列式的两行(列)的元素对应成比例,则该行列式为 0.

推论 3　若行列式的某行(列)的元素全为 0,则该行列式为 0.

性质 4　若行列式的某行(列)的各元素是两个数之和,则该行列式等于两个行列式之和,而这两个行列式除了这一行(列)以外与原来行列式的对应行(列)一样,即

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

证　设