信号与系统辅导与习题详解

经典 Classics

经典教材辅导用书 ▌电子信息系列

知识要点

重点与难点

例题精选

习题解答

▌《Signals and Systems》(Alan V. Oppenheim)

宋 琪 陆三兰 编

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

经典教材辅导用书·电子与信息类丛书

信号与系统辅导与习题详解

《Signals and Systems》(Alan V. Oppenheim)

宋 琪 陆三兰 编

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统辅导与习题详解/宋 琪 陆三兰 编.—武汉:华中科技大学出版社,2009年8月

ISBN 978-7-5609-5569-8

Ⅰ.信… Ⅱ.①宋… ②陆… Ⅲ.信号系统-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第133928号

信号与系统辅导与习题详解 宋 琪 陆三兰 编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:王汉江
责任校对:刘 竣
封面设计 潘 群
责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司
印 刷:湖北新华印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16 印张:17.25 字数:362 000
版次:2009年8月第1版 印次:2009年8月第1次印刷 定价:26.00元
ISBN 978-7-5609-5569-8/TN·150

前　言

信号与系统课程一般被认为是电子信息、通信及电气类专业的专业基础课程，但本领域权威专家奥本海姆教授认为，该课程中的一些核心的基本概念和基本方法，对于所有工科专业都是非常重要的。

由美国国家工程院院士奥本海姆教授主编的《信号与系统》(第2版)，是美国麻省理工学院(MIT)电气工程与计算机科学系的本科教材。该教材最早在1999年由清华大学出版社与Prentice Hall公司合作推出的“大学计算机教育丛书(影印版)”项目中被首次引入国内，21世纪初又由电子工业出版社与Pearson Education北亚洲有限公司合作出版。虽然电子工业出版社也引进了其他一些信号与系统教材，但这本教材很经典，不仅内容丰富，条理清楚，习题数量多，而且实际应用介绍得多，习题按照由易到难，由理论到实际，有层次地合理地安排。不仅有利于教师教学，也有利于学生自学。

华中科技大学自2002年首次在提高班的信号与系统课程中使用这本教材，2005年开始在电子与信息工程系的信号与系统双语教学中使用这本教材。由于学时所限，我们一般只讲解了教材的第1～5章，第7章的前3节，第9章和第10章。通过这些年的教学，我们非常了解学生在学习这门课程，以及使用这本教材中的一些普遍性的问题。为了帮助学生学好这门课程，掌握本课程的基本理论和基本方法，深入理解物理意义，我们总结了教学经验，编写了这本辅导教材和习题解答。本书第1～4章由陆三兰老师编写，第5～8章由宋琪老师编写，全书由宋琪老师统稿。

感谢华中科技大学出版社的大力支持。由于编者水平有限，书中难免有不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

2009年6月于武昌

目　　录

第 1 章　信号与系统

1.1　学习要点

1.1.1　信号

1. 信号的定义及其数学表示

信号是带有信息(如语言、音乐、图像、数据等)的随时间(和空间)变化的物理量或物理现象,其图像称为信号的波形。

在电子系统中,信号通常是随时间变化的电压或电流(有时可能是电荷或磁通)。

在数学上,信号表示为一个时间的函数 $x(t)$,故信号与函数一般互相通用。

2. 信号的分类

信号的形式多种多样,可以从不同的角度进行分类:

(1) 按函数值的确定性可分为确定信号与随机信号;

(2) 确定信号按函数值的重复性可分为周期信号和非周期信号;

(3) 确定信号按时间是否连续可分为连续时间信号和离散时间信号;

(4) 根据能量特性,信号还可分为能量信号和功率信号。

3. 信号的基本特性

信号的基本特性是指其时间特性和频率特性。

时间特性:信号随时间变化快慢的特性,体现为信号的周期 T 和信号中单个脉冲的持续时间 τ 及上升时间和下降时间的不同。

频率特性:信号的频率特性可由频谱来描述。

4. 信号的时移

$$x(t)\rightarrow x(t-t_0)$$

(1) $t_0>0$ 表示信号 $x(t-t_0)$滞后于 $x(t)$,其波形由 $x(t)$波形沿时间轴右移 t_0;

(2) $t_0<0$ 表示信号 $x(t-t_0)$超前于 $x(t)$,其波形由 $x(t)$波形沿时间轴左移 t_0。

5. 信号的尺度变换与反褶

$$x(t)\rightarrow x(at)$$

(1) 若 $a>1$,则表示信号 $x(at)$是由 $x(t)$沿时间轴压缩而得到的;

(2) 若 $0<a<1$,则表示信号 $x(at)$是由 $x(t)$沿时间轴展宽而得到的;

(3) 若 $a=-1$,则 $x(at)=x(-t)$,其波形是由 $x(t)$波形沿纵轴反褶而得到的;

(4) 若 $a<0$ 且 $a\neq -1$，则信号 $x(at)$ 是由 $x(t)$ 同时进行尺度变换和反褶得到的。

6. 信号的能量与功率

1) 连续时间信号 $x(t)$

总能量：
$$E_\infty = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

平均功率：
$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

2) 离散时间信号 $x[n]$

总能量：
$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

平均功率：
$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

7. 信号的偶分量与奇分量

偶信号：　$x(t) = x(-t)$，　$x[n] = x[-n]$

奇信号：　$x(t) = -x(-t)$，　$x[n] = -x[-n]$

一个任意信号 $x(t)$ 或 $x[n]$ 都可分解为一个偶分量和一个奇分量之和：

$$x(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\} + \mathrm{Od}\{x(t)\},\quad x[n] = \mathrm{Ev}\{x[n]\} + \mathrm{Od}\{x[n]\}$$

$$\mathrm{Ev}\{x(t)\} = x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t)+x(-t)],\quad \mathrm{Od}\{x(t)\} = x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$$

$$\mathrm{Ev}\{x[n]\} = x_e[n] = \frac{1}{2}\{x[n]+x[-n]\},\quad \mathrm{Od}\{x[n]\} = x_o[n] = \frac{1}{2}\{x[n]-x[-n]\}$$

1.1.2　几种基本信号

1. 基本连续时间信号

1) 指数信号

$$x(t) = Ce^{at}$$

当 C，a 都为实数时，$x(t)$ 为实指数信号；当 C，a 都为一般的复数时，$x(t)$ 为一般的复指数信号。当 $C=1$，$a=\mathrm{j}\omega_0$ 时，$x(t)=e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 仍为复指数信号，但其具有两个性质：一是对于任意的 ω_0，$x(t)=e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 总是周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega_0|}$ 的周期信号；二是 ω_0 越大，$x(t)=e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 的振荡速率就越高。

2) 正弦信号

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t+\phi)$$

由欧拉公式 $e^{\mathrm{j}\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)+\mathrm{j}\sin(\omega_0 t)$ 可知，$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)=\mathrm{Re}\{Ae^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\phi)}\}$，即正弦信号是其相应的周期复指数信号的实数部分，当然对于任意的 ω_0，它总是周期信号，且 ω_0 越大，其振荡速率就越高。

3) 单位冲激信号

定义：
$$\begin{cases}\delta(t) = \begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = 1\end{cases}$$

抽样性质：　$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$，　$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t)\mathrm{d}t=x(0),\quad \int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=x(t_0)$$

偶对称性：　$\delta(t)=\delta(-t)$

尺度性质：　$\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

4）单位阶跃信号

定义：　$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$

$\delta(t)$ 与 $u(t)$ 的关系：$\delta(t)=\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$，$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$

2. 基本离散时间信号

1）指数序列

$$x[n]=Ca^n$$

当C,a都为实数时，$x[n]$为实指数序列；当C,a都为复数时，$x[n]$为一般的复指数序列。当$C=1$,$a=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}$时，$x[n]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+\mathrm{j}\sin(\omega_0 n)$仍为复指数序列，但与连续信号$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$不同的是：只有当$\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$为有理数时，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$才具有周期性，且由于$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0+2\pi)n}$，所以$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$不具备随$\omega_0$在数值上的增加而不断增加其振荡速率的特性！

ω_0从零开始增加，其振荡速率愈来愈快，直到$\omega_0=\pi$，达到最大，若继续增加ω_0，其振荡速率就下降，直到$\omega_0=2\pi$时，又得到与$\omega_0=0$时同样的效果（常数序列）。

2）正弦序列

$$x[n]=A\cos(\omega_0 n+\phi)$$

同样地，由欧拉公式$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+\mathrm{j}\sin(\omega_0 n)$可知，正弦序列是复指数序列$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 n+\phi)}$的实数部分，因此，正弦序列同样只有当$\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$为有理数时，才具有周期性，且不具备随$\omega_0$在数值上的增加而不断增加其振荡速率的特性！

3）单位脉冲序列

定义：　$\delta[n]=\begin{cases}0, & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases}$

抽样性质：　$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$，　$x[n]\delta[n-k]=x[k]\delta[n-k]$

4）单位阶跃序列

定义：　$u[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n\geqslant 0\end{cases}$

$\delta[n]$ 与 $u[n]$ 的关系：　$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$

$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]\quad 或\quad u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

1.1.3 系统

1. 系统的定义

系统，是由若干相互关联的单元组合而成的具有某种功能以用来达到某些特定目的的有机整体。

系统的功能是对输入信号进行“加工”、“处理”并发送输出信号。

2. 系统模型

系统模型是系统物理特性的数学抽象，以数学表达式或具有理想特性的符号组合图形来表征系统特征。

具体而言，电路、数学方程和方框图都是系统模型的表达形式。

3. 系统的分类

系统的分类错综复杂，主要考虑其数学模型的差异，可以划分为：

(1) 连续时间系统和离散时间系统；　(2) 即时(无记忆)系统与动态(记忆)系统；

(3) 集总参数系统与分布参数系统；　(4) 线性系统与非线性系统；

(5) 时变系统与时不变系统；　(6) 可逆系统与不可逆系统。

除此之外，还可按系统的性质划分为：(1) 因果系统与非因果系统；(2) 稳定系统与不稳定系统。

1.1.4 系统的性质

系统的主要性质有以下四种，它们之间是相互独立的。

1. 线性

线性是指系统同时具备齐次性和叠加性(可加性)。

1) 齐次性

若 $x(t) \to y(t)(x[n] \to y[n])$，则 $kx(t) \to ky(t)(kx[n] \to ky[n])$。

2) 叠加性(可加性)

若 $\quad x_1(t) \to y_1(t), x_2(t) \to y_2(t)(x_1[n] \to y_1[n], x_2[n] \to y_2[n])$

则 $\quad x_1(t)+x_2(t) \to y_1(t)+y_2(t)(x_1[n]+x_2[n] \to y_1[n]+y_2[n])$

线性系统：

若 $\quad x_1(t) \to y_1(t), x_2(t) \to y_2(t)(x_1[n] \to y_1[n], x_2[n] \to y_2[n])$

则 $k_1x_1(t)+k_2x_2(t) \to k_1y_1(t)+k_2y_2(t)(k_1x_1[n]+k_2x_2[n] \to k_1y_1[n]+k_2y_2[n])$

2. 时不变性

时不变性表现为系统响应的形状不随激励施加的时间不同而改变。

若 $$x(t) \to y(t)(x[n] \to y[n])$$

则 $$x(t-t_0) \to y(t-t_0)(x[n-n_0] \to y[n-n_0])$$

1) 线性时不变连续系统

若 $$x_1(t) \to y_1(t), x_2(t) \to y_2(t)$$

则 $$k_1x_1(t-t_1)+k_2x_2(t-t_2) \to k_1y_1(t-t_1)+k_2y_2(t-t_2)$$

2）线性时不变离散系统

若 $$x_1[n] \to y_1[n], x_2[n] \to y_2[n]$$

则 $$k_1x_1[n-n_1]+k_2x_2[n-n_2] \to k_1y_1[n-n_1]+k_2y_2[n-n_2]$$

3. 因果性

因果性是指系统的响应不应出现在激励之前，只对自变量是时间的系统有意义。

若 $x(t)=0, t<t_0$（或 $x[n]=0, n<n_0$），则 $y(t)=0, t<t_0$（或 $y[n]=0, n<n_0$）

4. 稳定性

稳定性是指对有界的激励，系统的零状态响应也是有界的。

当 $|x(t)|<\infty$（$|x[n]|<\infty$）时，则 $|y(t)|<\infty$（$|y[n]|<\infty$）（零状态响应）

1.2 典型例题

例 1-1 对下列每一个信号求 P_∞ 和 E_∞：

(a) $x_1(t)=e^{-2t}u(t)$； (b) $x_2(t)=e^{j(2t+\pi/4)}$； (c) $x_3(t)=\cos(t)$；

(d) $x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$； (e) $x_2[n]=e^{j\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{8}\right)}$； (f) $x_3[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$。

解 (a) $$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[e^{-2t}u(t)]^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T e^{-4t}\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(1-e^{-4T})}{2T}$$

$$=0$$

$$E_\infty=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}[e^{-2t}u(t)]^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-4t}\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4}(1-e^{-4T})=\frac{1}{4}$$

(b) $$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|e^{j(2t+\pi/4)}|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1\cdot\mathrm{d}t=1$$

$$E_\infty=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|e^{j(2t+\pi/4)}|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}1\cdot\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}2T=\infty$$

(c) $$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\cos(t)]^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}[1+\cos(2t)]\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{2T+\sin 2T}{4T}=\frac{1}{2}$$

$$E_\infty=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}[\cos(t)]^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\left(T+\frac{1}{2}\sin 2T\right)=\infty$$

(d) $$P_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right]^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{4}}=0$$

$$E_\infty=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right]^2=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\lim_{N\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

(e) $P_{\infty}=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{N}\left|e^{j\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{8}\right)}\right|^2=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{N}1=1$

$$E_{\infty}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left|e^{j\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{8}\right)}\right|^2=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}1=\lim_{N\to\infty}(2N+1)=\infty$$

(f) $P_{\infty}=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{N}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}n\right)\right]^2=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{N}\left[\dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{2}\right]$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E_{\infty}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]^2=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}(2N+1)=\infty$$

例 1-2 设 $x[n]=0, n<-2$ 或 $n>4$，对以下每个信号确定其值保证为零的 n 值。

(a) $x[n-3]$； (b) $x[n+4]$； (c) $x[-n]$； (d) $x[-n+2]$； (e) $x[-n-2]$。

解 (a) $x[n-3]=0, n-3<-2$ 或 $n-3>4$，即

$$x[n-3]=0,\quad n<1 \text{ 或 } n>7$$

(b) $x[n+4]=0, n+4<-2$ 或 $n+4>4$，即

$$x[n+4]=0,\quad n<-6 \text{ 或 } n>0$$

(c) $x[-n]=0, -n<-2$ 或 $-n>4$，即

$$x[-n]=0,\quad n<-4 \text{ 或 } n>2$$

(d) $x[-n+2]=0, -n+2<-2$ 或 $-n+2>4$，即

$$x[-n+2]=0,\quad n<-2 \text{ 或 } n>4$$

(e) $x[-n-2]=0, -n-2<-2$ 或 $-n-2>4$，即

$$x[-n-2]=0,\quad n<-6 \text{ 或 } n>0$$

例 1-3 设 $x(t)=0, t<3$，对以下每个信号确定其值保证为零的 t 值。

(a) $x(1-t)$； (b) $x(1-t)+x(2-t)$； (c) $x(1-t)x(2-t)$；

(d) $x(3t)$； (e) $x(t/3)$。

解 (a) $x(1-t)=0, 1-t<3$，即

$$x(1-t)=0,\quad t>-2$$

(b) $x(1-t)+x(2-t)=0, 1-t<3$ 且 $2-t<3$，即

$$x(1-t)+x(2-t)=0,\quad t>-1$$

(c) $x(1-t)x(2-t)=0, 1-t<3$ 或 $2-t<3$，即

$$x(1-t)x(2-t)=0,\quad t>-2$$

(d) $x(3t)=0, 3t<3$，即 $\quad x(3t)=0, t<1$

(e) $x(t/3)=0, t/3<3$，即 $\quad x(t/3)=0, t<9$

例 1-4 判断下列信号的周期性。

(a) $x_1(t)=2e^{j(t+\pi/4)}u(t)$； (b) $x_2[n]=u[n]+u[-n]$；

(c) $x_3[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta[n-4k]-\delta[n-1-4k]\}$。

解 (a) 由于 $$x_1(t)=\begin{cases}2\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+2\mathrm{j}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right), & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

对于 $-\infty<t<\infty$，$x_1(t)$ 的值不具备重复性，所以 $x_1(t)$ 不是周期信号。

(b) 由于 $x_2[n]=\begin{cases}1, & n>0,\\ 2, & n=0,\\ 1, & n<0,\end{cases}$ 所以 $x_2[n]$ 也不具备周期性。

(c) 由于
$$\begin{aligned}x_3[n+4]&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta[n+4-4k]-\delta[n+4-1-4k]\}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta[n-4(k-1)]-\delta[n-1-4(k-1)]\}\\&=\sum_{k'=-\infty}^{\infty}\{\delta[n-4k']-\delta[n-1-4k']\}=x_3[n]\end{aligned}$$

所以 $x_3[n]$ 是基波周期为 4 的周期序列。

例 1-5 对以下信号求信号的偶部保证为零的所有自变量值。

(a) $x_1[n]=u[n]-u[n-4]$； (b) $x_2(t)=\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$；

(c) $x_3[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$； (d) $x_4(t)=\mathrm{e}^{-5t}u(t+2)$。

解 (a)
$$\begin{aligned}\mathrm{Ev}\{x_1[n]\}&=\frac{1}{2}\{x_1[n]+x_1[-n]\}\\&=\frac{1}{2}\{u[n]-u[n-4]+u[-n]-u[-n-4]\}\\&=\frac{1}{2}\{\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[-n]\\&\quad+\delta[-n-1]+\delta[-n-2]+\delta[-n-3]\}\end{aligned}$$

只有当 $|n|>3$ 时， $\mathrm{Ev}\{x_1[n]\}=0$

(b) $$\mathrm{Ev}\{x_2(t)\}=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)+\sin\left(-\frac{1}{2}t\right)\right\}=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right\}=0$$

即对一切 t， $\mathrm{Ev}\{x_2(t)\}=0$

(c)
$$\begin{aligned}\mathrm{Ev}\{x_3[n]\}&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]+\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n-3]\right\}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n-3]+2^{n-1}u[-n-3]\end{aligned}$$

由于 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n-3]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & n\geqslant 3,\\ 0, & n<3,\end{cases}$ $2^{n-1}u[-n-3]=\begin{cases}2^{n-1}, & n\leqslant -3\\ 0, & n>-3\end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n-3]=0,\quad \lim_{n\to-\infty}2^{n-1}u[-n-3]=0$$

所以当 $|n|<3$ 及 $|n|\to\infty$ 时，$\mathrm{Ev}\{x_3[n]\}=0$

(d) $\mathrm{Ev}\{x_4(t)\}=\dfrac{1}{2}\{\mathrm{e}^{-5t}u(t+2)+\mathrm{e}^{5t}u(-t+2)\}$

由于 $\mathrm{e}^{-5t}u(t+2)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-5t}, & t>-2,\\ 0, & t<-2,\end{cases}\quad \mathrm{e}^{5t}u(-t+2)=\begin{cases}\mathrm{e}^{5t}, & t<2\\ 0, & t>2\end{cases}$

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-5t}u(t+2)=0,\quad \lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{5t}u(-t+2)=0$$

所以只有当 $|t|\to\infty$ 时，$\mathrm{Ev}\{x_4(t)\}=0$。

例 1-6 将下列信号的实部表示成 $A\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t+\phi)$ 的形式，这里 A,a,ω 和 ϕ 都是实数，且 $A>0$ 和 $-\pi\leqslant\phi\leqslant\pi$。

(a) $x_1(t)=-2$；　　(b) $x_2(t)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}\cos(3t+2\pi)$；

(c) $x_3(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin(3t+\pi)$；　　(d) $x_4(t)=\mathrm{j}\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{j}100)t}$。

解 (a) $\mathrm{Re}\{x_1(t)\}=x_1(t)=2\mathrm{e}^{-0\cdot t}\cos(0\cdot t+\pi)$，即

$$A=2,\quad a=0,\quad \omega=0,\quad \phi=\pi$$

(b) $x_2(t)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\cos(3t+2\pi)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{j}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\cos(3t)$

$=\cos(3t)+\mathrm{j}\cos(3t)$

$$\mathrm{Re}\{x_2(t)\}=\cos(3t)=\mathrm{e}^{-0\cdot t}\cos(3t+0)$$

即
$$A=1,\quad a=0,\quad \omega=3,\quad \phi=0$$

(c) $x_3(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin(3t+\pi)=\mathrm{e}^{-t}\sin\left(3t+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{-t}\cos\left(3t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\mathrm{Re}\{x_3(t)\}=x_3(t)=\mathrm{e}^{-t}\cos\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$$

即
$$A=1,\quad a=1,\quad \omega=3,\quad \phi=\frac{\pi}{2}$$

(d) $x_4(t)=\mathrm{j}\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{j}100)t}=\mathrm{e}^{-2t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(100t+\frac{\pi}{2})}$，　$\mathrm{Re}\{x_4(t)\}=1\cdot\mathrm{e}^{-2t}\cos\left(100t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

即
$$A=1,\quad a=2,\quad \omega=100,\quad \phi=\frac{\pi}{2}$$

例 1-7 判断下列信号的周期性，若是周期的，给出它的基波周期。

(a) $x_1(t)=\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}10t}$；　(b) $x_2(t)=\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j})t}$；　(c) $x_3[n]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}7\pi n}$；

(d) $x_4[n]=3\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\pi(n+\frac{1}{2})/5}$；　(e) $x_5[n]=3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3}{5}(n+\frac{1}{2})}$。

解 (a) $x_1(t)=\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}10t}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(10t+\frac{\pi}{2})}=\cos\left(10t+\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{j}\sin\left(10t+\dfrac{\pi}{2}\right)$，故 $x_1(t)$ 为周期信号，基波周期 $T=\dfrac{2\pi}{10}=\dfrac{\pi}{5}$。

(b) $x_2(t)=\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j})t}=\mathrm{e}^{-t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}=\mathrm{e}^{-t}\cos(t)+\mathrm{j}\mathrm{e}^{-t}\sin(t)$，故 $x_2(t)$ 不是周期信号。

(c) $x_3[n]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}7\pi n}=\cos(7\pi n)+\mathrm{j}\sin(7\pi n)\Rightarrow\dfrac{\omega_0}{2\pi}=\dfrac{7\pi}{2\pi}$，即 $\dfrac{m}{N}=\dfrac{7}{2}$，故 $x_3[n]$ 是周期序列，基波周期 $N=2$。

(d) $x_4[n]=3e^{j3\pi(n+\frac{1}{2})/5}=3e^{j(\frac{3}{5}\pi n+\frac{3}{10}\pi)}=3\cos\left(\frac{3\pi}{5}n+\frac{3\pi}{10}\right)+3j\sin\left(\frac{3\pi}{5}n+\frac{3\pi}{10}\right)\Rightarrow$ $\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{3\pi/5}{2\pi}=\frac{3}{10}$,即$\frac{m}{N}=\frac{3}{10}$,故 $x_4[n]$ 是周期序列,基波周期 $N=10$。

(e) $x_5[n]=3e^{j\frac{3}{5}(n+\frac{1}{2})}=3e^{j(\frac{3}{5}n+\frac{3}{10})}=3\cos\left(\frac{3}{5}n+\frac{3}{10}\right)+3j\sin\left(\frac{3}{5}n+\frac{3}{10}\right)$,又$\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{3/5}{2\pi}=\frac{3}{10\pi}$为无理数,故 $x_5[n]$ 不是周期序列。

例 1-8　求信号 $x(t)=2\cos(10t+1)-\sin(4t-1)$ 的基波周期。

解　由于 $\cos(10t+1)$ 和 $\sin(4t-1)$ 都为周期信号,且 $\omega_1=10$,$\omega_2=4$,$\omega_1:\omega_2=5:2=m_1:m_2$,故 $x(t)$ 的基波周期为 $T=m_i\frac{2\pi}{\omega_i}=5\times\frac{2\pi}{10}\left(\text{或 }2\times\frac{2\pi}{4}\right)=\pi$。

例 1-9　求信号 $x[n]=1+e^{j4\pi n/7}-e^{j2\pi n/5}$ 的基波周期。

解　对于 $e^{j4\pi n/7}$,其 $\omega_1=\frac{4\pi}{7}$,$\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{2}{7}$为有理数,所以 $e^{j4\pi n/7}$ 是周期信号。同样,$e^{j2\pi n/5}$ 中 $\omega_2=\frac{2\pi}{5}$,$\frac{\omega_2}{2\pi}=\frac{1}{5}$ 为有理数,故 $e^{j2\pi n/5}$ 也是周期信号。又 $e^{j4\pi n/7}$ 的基波周期 $N_1=7$,$e^{j2\pi n/5}$ 的基波周期 $N_2=5$,N_1 与 N_2 的最小公倍数为 35,所以 $x[n]$ 的基波周期为 $N=35$。

例 1-10　考虑离散时间信号 $x[n]=1-\sum_{k=3}^{\infty}\delta[n-1-k]$,试确定整数 M 和 n_0 的值,使得 $x[n]$ 可表为 $x[n]=u[Mn-n_0]$。

解　$x[n]=1-\sum_{k=3}^{\infty}\delta[n-1-k]=1-\sum_{k'=4}^{\infty}\delta[n-k']=\sum_{k=-\infty}^{3}\delta[n-k]=u[-n+3]$

即
$$M=-1,\quad n_0=-3$$

例 1-11　考虑连续时间信号 $x(t)=\delta(t+2)-\delta(t-2)$,试对 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ 计算 E_∞ 值。

解
$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{-\infty}^{t}[\delta(\tau+2)-\delta(\tau-2)]d\tau=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau+2)d\tau-\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-2)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{t+2}\delta(\tau')d\tau'-\int_{-\infty}^{t-2}\delta(\tau')d\tau'=u(t+2)-u(t-2)=\begin{cases}1, & -2<t<2\\0, & \text{其他}\end{cases}\end{aligned}$$
$$E_\infty=\int_{-\infty}^{\infty}[y(t)]^2dt=\int_{-2}^{2}1\cdot dt=4$$

例 1-12　考虑一个周期为 $T=2$ 的周期信号 $x(t)$,其中 $x_0(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1\\-2, & 1<t<2\end{cases}$是其在$0\leqslant t<2$期间的表达式。可以证明这个信号的导数也是一个周期信号,周期仍为 $T=2$,且$\frac{dx(t)}{dt}=A_1g(t-t_1)+A_2g(t-t_2)$,其中 $g(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)$ 是"冲激串",求 A_1,t_1,A_2 和 t_2 的值。

解　$x(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x_0(t-2k)$，$x(t)$ 波形如图 1-1 所示，$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ 波形如图 1-2 所示。

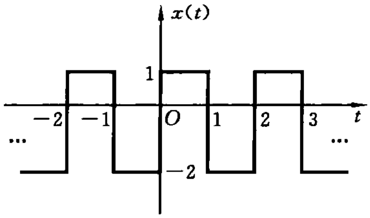

图 1-1

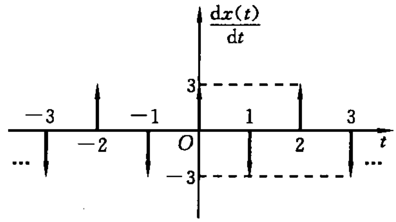

图 1-2

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[3\delta(t-2k)-3\delta(t-1-2k)]=3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)-3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-1-2k)$$
$$=3g(t)-3g(t-1)$$

故　$$A_1=3,\quad t_1=0,\quad A_2=-3,\quad t_2=1$$

例 1-13　考虑一系统 S，其输入为 $x[n]$，输出为 $y[n]$，这个系统是经由系统 S_1 和 S_2 级联后得到的，S_1 和 S_2 的输入 - 输出关系为

$$S_1:y_1[n]=2x_1[n]+4x_1[n-1],\quad S_2:y_2[n]=x_2[n-2]+\frac{1}{2}x_2[n-3]$$

这里 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 都为输入信号。(a) 求系统 S 的输入 - 输出关系；(b) 若 S_1 和 S_2 的级联次序颠倒的话(也即 S_1 在后)，系统 S 的输入 - 输出关系改变吗?

解　(a) 系统 S 可用框图表示，如图 1-3 所示。

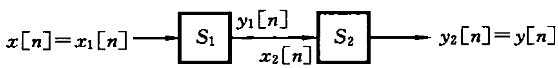

图 1-3

由图 1-3 可知，$y_1[n]=2x[n]+4x[n-1]$

$$y[n]=y_2[n]=x_2[n-2]+\frac{1}{2}x_2[n-3]=y_1[n-2]+\frac{1}{2}y_1[n-3]$$
$$=2x[n-2]+4x[n-3]+\frac{1}{2}\times 2x[n-3]+\frac{1}{2}\times 4x[n-4]$$
$$=2x[n-2]+5x[n-3]+2x[n-4]$$

(b) 当 S_1 和 S_2 的级联次序颠倒时，系统 S 可用框图表示；如图 1-4 所示。

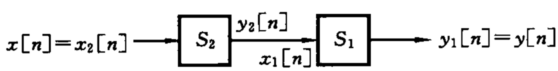

图 1-4

由图 1-4 可知，$y_2[n]=x[n-2]+\dfrac{1}{2}x[n-3]$

$$y[n]=y_1[n]=2x_1[n]+4x_1[n-1]=2y_2[n]+4y_2[n-1]$$
$$=2x[n-2]+2\times\frac{1}{2}x[n-3]+4x[n-3]+4\times\frac{1}{2}x[n-4]$$