QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写　适合各种版本教材

新课标

高中解题方法 数学

JIETIFANGFA

主编：李永哲

题题精彩★道道无忧

例题详解◎方法多样

延边大学出版社

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写 适合各种版本教材

新课标

高中

JIETIFANGFA

解题方法

数 学

主　编：李永哲

编　委：张　伟　孙有迪　王雪晶

高　琨　郑明琴　石成合

张　友　刘金国　刘德广

张克敏　王春花　徐　嵘

李业英　杜雪英　刘晓菲

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题方法/李永哲编著.—延吉:延边大学出版社,2009.2

ISBN 978-7-5634-2523-5

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课-高中-解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 169522 号

解题方法·高中数学

主编:李永哲

责任编辑:秀　豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路 977 号

网址:http://www.ydcbs.com

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2732435　　**传真:**0433-2732434

发行部电话:0433-2133001　　**传真:**0433-2733266

印刷:北京中创彩色印刷有限公司

开本:787×1092　1/16

印张:50.25

字数:651 千字

印数:1—10000

版次:2009 年 2 月第 1 版

印次:2009 年 6 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5634-2523-5

定价:49.00 元

前 言

美国著名数学家波利亚说过:“掌握数学就意味着要善于解题”。重视对数学思想方法的考查,特别是突出考查能力的试题,在解答过程中都蕴含着重要的数学思维方式及解题技巧。

知识是基础,思想是深化,方法是手段。提高学生对数学思想方法的认识和应用,综合提高学生的数学解题能力是本书的宗旨。

本书的作者都是具有多年教学经验的一线特、高级教师,通过对具有代表性的例题、习题,以及历年来高考中出现的经典试题进行细致而全面的分析和讲解,帮助学生探索解题规律,掌握解题方法,提高解题技巧。

下面介绍本书各栏目及其特点

一、知识梳理

通过对考点的分析、解读,使学生掌握学习重点,明确学习目标,做到有的放矢。

二、典型例题

通过对经典例题的分析,帮助学生理解数学中的常用方法(如:判别式法、待定系数法、反证法、构造法、几何变换法等,以及客观性试题的解题方法:直接推演法、验证法、特殊值法、排除法、图解法、分析法、数形结合法等),认识知识的形成过程,构建知识间的联系;通过对经典例题的点评,帮助学生找准解题的关键,避免思维误区,让学生亲身体验数学解题、发展、深化的全过程,真正达到举一反三、触类旁通的目的。

三、高考真题展示

本书精选了一部分2008年的高考真题,通过这部分的训练进一步对学生的解题能力进行考查,体现了方法与训练的完美结合.

由于编者水平所限,本书如有不足之处,恳请广大读者多多指正,以期修订完善。

目　录

第一章　集合与函数概念

1.1　集合的含义及其表示

一、知识梳理

1. 集合与元素的概念

(1)集合:某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集.

注意:①集合是数学中不加定义的原始概念,是基本的概念之一,它是用描述性语言叙述的.

②集合常用大写的拉丁字母 A、B、C、…表示.

(2)元素:集合中的每个对象叫做这个集合的元素.集合的元素常用小写的拉丁字母表示.

2. 集合的分类

(1)无限集:含有无限个元素的集合叫无限集.

(2)有限集:含有有限个元素的集合叫有限集.

(3)空集:不含任何元素的集合叫空集,记作$\varnothing$.

3. 构成集合的元素具有以下特征

(1)确定性:对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的,即一个元素或属于该集合,或不属于该集合,二者必居其一.

(2)互异性:集合中的元素是互异的.任何两个相同的对象在同一个集合中,只能算作这个集合的一个元素.

(3)无序性:集合中的元素是没有顺序的.

4. 集合的表示方法

(1)列举法:把集合中的元素一一列举出来写在大括号内表示集合的方法,叫列举法.

注意:①元素间用分隔号“,”隔开.

②元素不重复.

③元素无顺序.

④对于含较多元素的集合,如果构成该集合的元素有明显规律,可用列举法,但是必须把元素间的规律显示清楚后才能用删节号.

(2)描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法.它的一般形式是$\{P|P$ 适合的条件$\}$,其中 P 叫代表元素.

描述法的语言形式有三种:文字语言,符号语言,图形语言.

使用描述法时,需注意以下几点:

①写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表示的元素符号).

②说明该集合中元素的性质.

③不能出现未被说明的字母.

④多层描述时,应准确使用“且”、“或”.

⑤所有描述的内容都要写在集合符号内.

(3)图示法(文氏图):为了形象地表示集合,我们常常画一条封闭的曲线,用它的内部来表示一个集合.

5. 常用数集的符号

为了书写的方便,我们规定常见的数集用特定的字母表示. 下面是几种常见的数集表示方法:

(1)全体非负整数的集合通常简称非负整数集(或自然数集),记作 **N**.

(2)非负整数集内排除 0 的集合,也称正整数集,表示成 $\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$).

(3)全体整数的集合通常简称为整数集,记作 **Z**.

(4)全体有理数的集合通常简称为有理数集,记作 **Q**.

(5)全体实数的集合通常简称为实数集,记作 **R**.

6. 元素与集合的关系

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$,读作 a 属于集合 A.

如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$,读作 a 不属于集合 A.

注意:①$a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素. 根据集合中元素的确定性,可知对任意 a 与 A,$a\in A$ 或 $a\notin A$ 这两种情况有且只有一种成立.

②符号“$\in$”、“$\notin$”是表示元素与集合之间关系的,不能用来表示集合与集合之间的关系,这一点千万要牢记.

易错分析 (1)无论何时何地,“$x\in\varnothing$”的写法都是错误的,“$x\notin\varnothing$”是永恒的真理.

(2)a 与 $\{a\}$ 是不同的,a 表示一个元素,$\{a\}$ 表示由一个元素 a 构成的集合. 一般称 $\{a\}$ 为单元素集;特别地,0 与 $\{0\}$ 是不同的.

(3)$\{0\}$ 与 $\varnothing$ 是不同的,$\{0\}$ 表示由一个元素 0 构成的集合,$\varnothing$ 是不含任何元素的集合.

(4)表示无限集必须用描述法,语言形式可以是文字语言,可以是符号语言,也可以是图形语言,列举法实施不了对无限集的所有元素的一一列举.

二、典型例题

题型一:是否构成集合的判断题

例 1 考查下列每组对象能否构成一个集合:

(1)著名的数学家;

(2)高一(3)班所有高个子同学;

(3)不超过 20 的非负数;

(4)方程 $x^2-9=0$ 在实数范围内的解;

(5)直角坐标平面内第一象限的一些点;

(6)$\sqrt{3}$的近似值的全体.

解:(1)“著名的数学家”无明确的标准,对于某个人是否“著名”无法客观地判断,因此“著名的数学家”不能构成一个集合. 类似地,(2)也不能构成集合;(3)任给一个实数 x,可以明确地判断是不是“不超过 20 的非负数”,即“$0\leqslant x\leqslant 20$”与“$x>20$ 或 $x<0$”,两者必居其一,且仅居其一,故“不超过 20 的非负数”能构成集合. 类似地,(4)也能构成集合;(5)“一些点”无明确的标准,对于某个点是否在“一些点”中无法确定,因此“直角坐标平面内第一象限的一些点”不能构成集合;(6)“$\sqrt{3}$的近似值”不明确精确到什么程度,因此不能判定一个数如“2”是不是它的近似值,所以(6)不能构成集合.

点评

一些元素构成的集合必须具有以下两个特点：一是整体性，二是确定性，其中“整体”一语，说明集合是指某些对象的整体而不是指其中的个别对象，这就是集合的整体性. 一个对象要么是集合的元素，要么不是集合的元素，二者必居其一，这是集合的确定性. 如(2)中的某同学是不是“高个子”不能确定.

题型二：集合三要素的有关问题

例2 (2007·黄冈)含有三个实数的集合可表示为$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$，也可表示为$\{a^2,a+b,0\}$. 求$a^{2007}+b^{2007}$.

解：由集合元素的互异性可知$a\neq1$且$a\neq0$，所以$a\neq a^2$.

又因为$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$和$\{a^2,a+b,0\}$表示同一个集合，

所以$\begin{cases}a=a+b,\\ \frac{b}{a}=0,\\ 1=a^2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\ b=0.\end{cases}$(舍)或$\begin{cases}a=-1,\\ b=0.\end{cases}$

所以$a^{2007}+b^{2007}=(-1)^{2007}=-1$.

点评

集合中元素三特征在解题中不可忽视，特别是元素的互异性.

例3 由对象x,x^2-x,x^3-3x能组成一个集合吗？如果能组成一个集合，则说明理由；如果不能，则需要添加什么条件，使它组成一个集合？

解：它不一定能表示成一个集合，因为x,x^2-x,x^3-3x之间有可能相等，因而不一定满足元素的互异性.

由$x=x^2-x$，得$x=0$或$x=2$；

由$x=x^3-3x$，得$x=0$或$x=\pm2$；

由$x^2-x=x^3-3x$，得$x=0$，或$x=2$或$x=-1$.

故只需要添加条件$x\neq0$且$x\neq-1$，且$x\neq2$，且$x\neq-2$，

则$\{x,x^2-x,x^3-3x\}$能表示成一个集合.

点评

集合的元素所必须具备的“三性”有着广泛的应用. 在解题时，特别是在题目快解答完毕之时，我们必须问问自己，这里的集合的元素是否满足三性.

题型三：列举法表示集合的问题

例4 用列举法表示下列集合：

(1)$A=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|\frac{6}{2-x}\in\mathbf{Z}\right\}$；

(2)$B=\{y|y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$；

(3)$C=\{(x,y)|y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

分析：(1)(2)是数集，(3)为点集，根据元素所具有的性质即可写出集合的所有元素.

解：(1)要使$x,\frac{6}{2-x}$都是整数，故$|2-x|$必是6的约数，当$x=-4,-1,0,1,3,4,5,8$时，$|2-x$

|是6的约数.

$\therefore A=\{-4,-1,0,1,3,4,5,8\}$.

(2)由 $y=-x^2+6, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}$,知 $y\leqslant 6$.

$\therefore$ 当 $x=0,1,2$ 时,$y=6,5,2$ 符合题意.

$\therefore B=\{2,5,6\}$.

(3)点 (x,y) 满足条件 $y=-x^2+6, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}$,则有

$\begin{cases}x=0,\\y=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$

$\therefore C=\{(0,6),(1,5),(2,2)\}$.

点评

(2)(3)的不同在于(2)为数集,元素是3个数,(3)为点集,元素为3个点.用描述法表示的集合,要特别注意其代表元素的属性.

题型四:用描述法表示集合的问题

例5 用描述法表示下列集合:

(1)正奇数集;

(2)被3除余1的正整数集合;

(3)使 $y=\dfrac{2006}{x^2+x-6}$ 有意义的实数 x 的集合;

(4)坐标平面内坐标轴上点的集合;

(5)坐标平面内在第二象限内的点所组成的集合;

(6)坐标平面内不在第一、三象限的点的集合.

分析:把自然语言转化为集合语言用描述法表示出来,本题主要考查集合的表示方法.

解:(1) $\{x|x=2n+1, n\in\mathbf{N}\}$(也可表示为 $\{x|x=2n-1, n\in\mathbf{N}^*\}$).

(2) $\{x|x=3n+1, n\in\mathbf{N}\}$.

(3) $\{x|x\neq 2$ 且 $x\neq -3, x\in\mathbf{R}\}$.

(4) $\{(x,y)|xy=0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$.

(5) $\{(x,y)|x<0$ 且 $y>0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$.

(6) $\{(x,y)|xy\leqslant 0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$.

点评

使用描述法时,应注意六点:(1)写清楚集合中元素的代号;(2)说明该集合中元素的性质;(3)不能出现未被说明的字母;(4)多层描述时,应当准确使用"且""或";(5)所有描述的内容都要写在大括号内;(6)用于描述的语句力求简明、确切.

题型五:元素与集合的关系问题

例6 下面各组的集合中,每个集合的意义是否相同,它们是否相同?

(1) $\{1,5\}$, $\{(1,5)\}$, $\{5,1\}$, $\{(5,1)\}$;

(2) $\{x|x=0\}$, $\{(x,y)|x=0\}$;

(3) $\{x|y=x^2+1\}$, $\{y|y=x^2+1\}$.

分析:根据集合的概念及集合元素的特性求解.

解:(1) $\{1,5\}$ 是由两个元素组成的,由集合元素的无序性知与 $\{5,1\}$ 表示同一集合,$\{(1,5)\}$ 是由一个点 $(1,5)$ 构成的单元集合,由于 $(1,5)$ 与 $(5,1)$ 表示的是不同的点,故 $\{(1,5)\}$ 与 $\{(5,1)\}$

是两个不同的集合；

(2)集合$\{x|x=0\}$是数轴上的一个点,集合$\{(x,y)|x=0\}$是平面直角坐标系中y轴上的所有点构成的,这两个集合的元素根本不同,因此它们表示的是两个不同的集合；

(3)集合$\{x|y=x^2+1\}$是由函数$y=x^2+1$的自变量构成的集合,可取到一切实数,即$\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$,而$\{y|y=x^2+1\}$是由所有函数值构成的集合,由大于或等于1的所有实数构成,这两个集合虽然都是实数构成的集合,但它们不相同.

点评

一要注意集合元素的特性要相同,二要注意同一类型的集合中的元素是否相同.

例7　已知集合$A=\{a-2,2a^2+5a,12\}$,且$-3\in A$,求a.

分析:本题考查元素与集合的关系,体会分类讨论思想的应用.

解:$\because -3\in A$,则$-3=a-2$或$-3=2a^2+5a$,

$\therefore a=-1$或$a=-\dfrac{3}{2}$,

当$a=-1$时,$a-2=-3,2a^2+5a=-3$,

$\therefore a=-1$舍去,故$a=-\dfrac{3}{2}$.

点评

①已知$a\in A$,若集合A是用列举法表示的,则a一定等于其中的一个元素,若集合A是用描述法表示的,则a一定满足描述集合中元素的共同特性,如满足方程(组)、不等式等.②这类题目一方面考查表示集合的方法(列举法,描述法),一方面又考查集合元素的三个特性.③分类讨论思想在分析集合元素的特性时,经常用到.

题型六:特殊集合空集问题

例8　下列命题中真命题的个数是　　(　　)

①$0\in\varnothing$;②$\varnothing\in\{\varnothing\}$;③$0\in\{0\}$;④$\varnothing\notin\{a\}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

分析:要判断一个元素是否在某个集合中,关键在于弄清这个集合是由哪些元素所组成的.由于$\varnothing$是不含任何元素的集合,故①错;而$\{\varnothing\}$是由空集作为元素组成的一个集合,故②正确;同理③也正确;因为$\notin$是表示元素与集合之间的关系,所以④不正确,故选B.

答案:B

点评

由本例你能领悟到如何区别符号“0”、“$\varnothing$”、“$\{0\}$”、“$\varnothing$”吗?

事实上“0”是一个数,它可以作为集合的元素;而“$\varnothing$”则是一个集合,由于集合也可以作为另一个集合的元素,因此“$\varnothing$”也可以作为某些集合的“元素”;“$\{0\}$”则是由数0组成的一个单元素集合,“$\{\varnothing\}$”是由“$\varnothing$”为元素组成的一个集合.

题型七:集合有关的综合问题

例9　下列命题:

(1)方程$\sqrt{x-2}+|y+2|=0$的解集为$\{2,-2\}$;

(2)集合$\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$与$\{y|y=x-1,x\in\mathbf{R}\}$的公共元素所组成的集合是$\{0,1\}$;

(3)集合$\{x|x-1<0\}$与集合$\{x|x>a,a\in\mathbf{R}\}$没有公共元素.

其中真命题的个数有 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

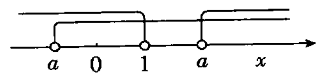


图 1.1－1

分析：要判断这些命题的真假，这就需要对用来描述的这些命题的集合语言进行转化，以弄清集合的构成. 在(1)中方程 $\sqrt{x-2}+|y+2|=0$ 等价于 $\begin{cases}x-2=0,\\y+2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=2,\\y=-2.\end{cases}$ 其解应为有序实数对，因此其解集应为 $\{(2,-2)\}$，故命题(1)是假命题. 而在(2)中，由于集合 $\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$ 的代表元素是 y，而 y 满足属性："$y=x^2-1,x\in\mathbf{R}$". 由于 $x\in\mathbf{R}$ 时，$y=x^2-1\geqslant-1$，所以集合 $\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$ 是由大于或等于 -1 的实数所组成的集合. 同理 $\{y|y=x-1,x\in\mathbf{R}\}$ 是 $\mathbf{R}$，因此(2)也是错误的. 在(3)中，集合 $\{x|x-1<0\}$ 即为不等式 $x-1<0$ 的解集，即 $x<1$，而 $\{x|x>a,a\in\mathbf{R}\}$ 即为不等式 $x>a$ 的解集. 由图 1.1－1 可知，这两个集合可能有公共的元素，也可能没有公共的元素，因此(3)也是错误的.

答案：A

点评

在(2)中很容易被符号描述法的表象所蒙蔽，认为这两个集合中的"x"和"y"必须取相同的值. 事实上，这是用相同字母来描述不同的集合的元素所具有的属性.

例 10　设集合 $A=\{a|a=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$，集合 $B=\{b|b=k^2-4k+5,k\in\mathbf{N}\}$，若 $a\in A$，试判断 a 与 B 的关系.

解：判断一个对象 a 与集合 B 的关系，即判断"属于"或"不属于"的关系，若"$a\in A$"，则 a 可以写成"$n^2+1,n\in\mathbf{N}$"的形式；判断 a 是否属于 B，则看 a 是否可表示成"$k^2-4k+5,k\in\mathbf{N}$"的形式，$\because a\in A$，$\therefore a=n^2+1=n^2-4n+4n-4+5=(n^2+4n+4)-4(n+2)+5=(n+2)^2-4(n+2)+5$，$\therefore a\in B$.

点评

在由 $a\in A$ 判断 a 是否属于 B 的过程中，关键是先要变(或凑)形式，即由"n^2+1"向"k^2-4k+5"的形式变化，然后判断.

例 11　已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素，求 a 的值；

(2)若 A 中最多有一个元素，求 a 的取值范围；

(3)若 A 中至少有一个元素，求 a 的取值范围；

(4)若 $A=\varnothing$，求 a 的取值范围.

分析：本题主要考查集合中元素的个数问题，解决本题的关键是讨论方程 $ax^2+2x+1=0$ 的实数根的个数，从而确定参数 a 的取值范围.

解：(1)当 $a=0$ 时，原方程变为 $2x+1=0$，此时 $x=-\dfrac{1}{2}$，符合题意；

当 $a\neq0$ 时，方程 $ax^2+2x+1=0$ 为一元二次方程，$\Delta=4-4a=0$，即 $a=1$ 时，原方程的解为 $x=-1$，符合题意.

故当 $a=0$，或 $a=1$ 时，原方程只有一个解，此时 A 中只有一个元素.

(2)A 中最多含有一个元素，即 A 中有一个元素或 A 中没有元素.

当 $\Delta=4-4a<0$，即 $a>1$ 时，原方程无实数解.

结合(1)知，当 $a=0$ 或 $a\geqslant1$ 时，A 中最多有一个元素.

(3)A 中至少有一个元素，即 A 中有一个或两个元素.

由 $\Delta>0$，得 $a<1$，结合(1)可知，$a\leq 1$.

(4)$A=\varnothing$时，由(2)知，$a>1$.

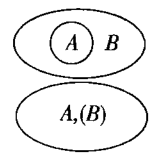
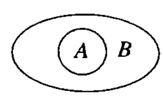
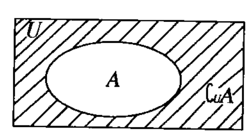
点评

"$a=0$"这种情况容易被忽视，对于"方程 $ax^2+2x+1=0$"有两种情况：一是"$a=0$"，即它是一元一次方程；二是"$a\neq 0$"，即它是一元二次方程，也只有在这种情况下才能用判别式 Δ 来解决问题.

1.2　集合间的基本关系

一、知识梳理

1. 集合间的包含关系

	定义	性质与说明	文氏图表示法
子集	如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).	①$A\subseteq A$； ②$\varnothing\subseteq A$； ③若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$； ④含有 n 个元素的集合的子集的个数是 2^n.	
真子集	如果 A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$)	①空集是任何非空集合的真子集； ②若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$； ③含有 n 个元素的集合的真子集的个数是 2^n-1.	
补集	已知全集 U，集合 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在 U 中的补集，记作$\complement_U A$，即$\complement_U A=\{x\mid x\in U$，且 $x\notin A\}$.	①$A\cup(\complement_U A)=U$； ②$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$； ③$\complement_U(\complement_U A)=A$； ④$\complement_U\varnothing=U$； ⑤$\complement_U U=\varnothing$.	

注意：①"A 是 B 的子集"的含义是：集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，即由任意 $x\in A$ 都有 $x\in B$.

②当 A 不是 B 的子集时，我们记作"$A\not\subseteq B$"(或 $B\not\supseteq A$)，读作 A 不包含于 B(或 B 不包含 A).

③在子集的定义中，不能理解为子集 A 是 B 中的"部分元素"所组成的集合，因为若 $A=\varnothing$，则 A 中不含任何元素；若 $A=B$，则 A 中含有 B 中的所有元素，但此时集合 A 也是集合 B 的子集.

④强调补集时，一定要强调谁是全集.

全集：如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个全集，通常用 U 表示.

注意：全集是相对于所研究问题而言的一个相对概念，它含有与所研究问题有关的各个集合的全部元素，因此，全集因研究问题而异. 例如：在研究数集时，常把实数集 **R** 看作全集. 在立体几何中，三维空间是全集，这时平面是全集的一个子集. 而在平面几何中，整个平面可以看作是一个全集.

2. 集合相等

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$，读作 A 等于 B. 如图 1.2－1.

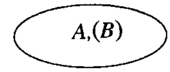


图 1.2－1

注意：①证明：若 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则 $A=B$，因为 $A\subseteq B$，所以 A 的元素都是 B 的元素；又因为 $B\subseteq A$，所以 B 的元素都是 A 的元素，这就是说，集合 A 与集合 B 的元素是完全相同的，因而我们说 A 与 B 是相等的集合.

②上面定义的证明给出我们证明两个集合相等的办法，即欲证 $A=B$，只需证 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$ 即可.

易错分析　$A\subseteq B$ 或 $A\subsetneqq B$ 时易漏掉 $A=\varnothing$ 的情况.

二、典型例题

题型一：子集、真子集的概念问题

例 1　下列命题

①空集没有子集；

②任何集合至少有两个子集；

③空集是任何集合的真子集；

④若 $\varnothing\subsetneqq A$，则 $A\neq\varnothing$.

其中正确的有　　　　(　　)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

分析：正确理解空集、子集、真子集的概念及它们之间的关系. ①错误，空集是任何集合的子集，所以 $\varnothing\subseteq\varnothing$；②错误，如 $\varnothing$；③错误，空集 $\varnothing$ 不是空集 $\varnothing$ 的真子集；④正确，因为空集 $\varnothing$ 是任何非空集合的真子集.

答案：B

点评

(1) 空集是任何集合的子集，也就是说对于任何一个集合 A，有 $\varnothing\subseteq A$，因此 $\varnothing\subseteq\varnothing$ 也成立.

(2) 空集是任何非空集合的真子集，也就是说，对于任何一个非空集合 A，有 $\varnothing\subsetneqq A$，反之，若 $\varnothing\subsetneqq A$，则 $A\neq\varnothing$.

(3) 任何一个集合是它本身的子集，也就是说，对于任何一个集合 A，有 $A\subseteq A$.

例 2　若集合 $M=\{x|x^2+x-6=0\}$，$N=\{x|ax+1=0\}$，且 $N\subseteq M$，求由 a 的可能取值组成的集合.

解：由 $M=\{-3,2\}$，当 $a=0$ 时，$N=\varnothing$，有 $N\subsetneqq M$；

当 $a\neq0$ 时，$N=\{-\dfrac{1}{a}\}$，

又 $N\subseteq M$ 时，$-\dfrac{1}{a}=-3$ 或 $-\dfrac{1}{a}=2$，