

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写 适合各种版本教材



新课标

高中

主编：李永哲

JIETIFANGFA

解题方法

数

学

题题精彩★道道无忧

例题详解◎方法多样

延边大学出版社

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写 适合各种版本教材



新课标

高中

JIE TIFANGFA

解题方法

数 学

主 编：李永哲
编 委：张 伟 孙有迪 王雪晶
高 琨 郑明琴 石成合
张 友 刘金国 刘德广
张克敏 王春花 徐 嵘
李业英 杜雪英 刘晓菲

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题方法/李永哲编著. —延吉:延边大学出版社,2009.2

ISBN 978 - 7 - 5634 - 2523 - 5

I. 高… II. 李… III. 数学课 - 高中 - 解题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 169522 号

解题方法·高中数学

主编:李永哲

责任编辑:秀 豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路 977 号

网址:<http://www.ydcbs.com>

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433 - 2732435

传真:0433 - 2732434

发行部电话:0433 - 2133001

传真:0433 - 2733266

印刷:北京中创彩色印刷有限公司

开本:787 × 1092 1/16

印张:50.25

字数:651 千字

印数:1—10000

版次:2009 年 2 月第 1 版

印次:2009 年 6 月第 2 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5634 - 2523 - 5

定价:49.00 元



前言

美国著名数学家波利亚说过：“掌握数学就意味着要善于解题”。重视对数学思想方法的考查，特别是突出考查能力的试题，在解答过程中都蕴含着重要的数学思维方式及解题技巧。

知识是基础，思想是深化，方法是手段。提高学生对数学思想方法的认识和应用，综合提高学生的数学解题能力是本书的宗旨。

本书的作者都是具有多年教学经验的一线特、高级教师，通过对具有代表性的例题、习题，以及历年来高考中出现的经典试题进行细致而全面的分析和讲解，帮助学生探索解题规律，掌握解题方法，提高解题技巧。

下面介绍本书各栏目及其特点

一、知识梳理

通过对考点的分析、解读，使学生掌握学习重点，明确学习目标，做到有的放矢。

二、典型例题

通过对经典例题的分析，帮助学生理解数学中的常用方法（如：判别式法、待定系数法、反证法、构造法、几何变换法等，以及客观性试题的解题方法：直接推演法、验证法、特殊值法、排除法、图解法、分析法、数形结合法等），认识知识的形成过程，构建知识间的联系；通过对经典例题的点评，帮助学生找准解题的关键，避免思维误区，让学生亲身体验数学解题、发展、深化的全过程，真正达到举一反三、触类旁通的目的。

三、高考真题展示

本书精选了一部分2008年的高考真题，通过这部分的训练进一步对学生的解题能力进行考查，体现了方法与训练的完美结合。

由于编者水平所限，本书如有不足之处，恳请广大读者多多指正，以期修订完善。



目 录

第一章 集合与函数概念	1
1.1 集合的含义及其表示	1
1.2 集合间的基本关系	7
1.3 集合的基本运算	11
第二章 函数概念与基本初等函数	22
2.1 函数及其表示方法	22
2.2 函数的概念和图象	28
2.3 函数的简单性质——单调性	34
2.4 奇偶性	40
2.5 指数函数	47
2.6 对数函数	53
2.7 幂函数	61
第三章 函数的应用	79
3.1 函数与方程	79
3.1.1 方程的根与函数的零点	79
3.1.2 用二分法求方程的近似解	83
3.2 函数模型及其应用	89
第四章 空间几何体	101
4.1 空间几何体的结构	101
4.2 空间几何体的三视图和直观图	108
4.3 空间几何体的表面积与体积	125
第五章 点、直线、平面之间位置关系	144
5.1 点、直线、平面之间位置关系	144
5.1.1 平面	144
5.1.2 空间中直线与直线之间的位置关系	153
5.1.3 空间中直线与平面之间的位置关系	162
5.1.4 平面与平面之间的位置关系	162
5.2 直线与平面的位置关系	166
5.2.1 直线与平面的平行关系	166
5.2.2 直线与平面的垂直关系	170
5.3 两个平面的位置关系	179
5.3.1 两个平面的平行关系	179
5.3.2 两个平面的垂直关系	184
第六章 直线与方程	192
6.1 直线的倾斜角与斜率	192



6.1.1 倾斜角与斜率	192
6.1.2 两条直线平行与垂直的判定	197
6.2 直线的方程	200
6.2.1 直线的方程	200
6.2.2 直线的两点式方程、一般式方程	204
6.3 直线的交点坐标与距离公式	210
6.3.1 直线的交点坐标与距离公式	210
6.3.2 点到直线的距离及平行线间距离	216
第七章 圆与方程	227
7.1 圆的方程	227
7.2 直线与圆的位置关系	234
7.2.1 直线与圆的位置关系	234
7.2.2 圆与圆的位置关系	241
7.2.3 直线与圆方程的应用	245
第八章 算法初步	251
8.1 算法的含义	251
8.1.1 算法的概念	251
8.1.2 程序框图与算法的基本逻辑结构	256
8.2 基本算法语句	261
8.2.1 输入语句、输出语句、赋值语句、条件结构	261
8.2.2 循环语句	268
8.3 算法案例	271
第九章 统计	278
9.1 随机抽样	278
9.1.1 简单随机抽样	278
9.1.2 系统抽样	280
9.1.3 分层抽样	284
9.2 用样本估计总体	287
9.2.1 用样本的频率分布估计总体分布	287
9.2.2 用样本的数字特征估计总体的数字特征	295
9.3 变量间的相关关系	301
第十章 概率	309
10.1 随机事件的概率	309
10.1.1 随机事件的概率	309
10.1.2 概率的意义	313
10.1.3 概率的基本性质	317
10.2 古典概型	322
10.2.1 古典概型	322
10.2.2 随机数的产生	325
10.3 几何概型	327
10.3.1 几何概型	327



10.3.2 均匀随机数的产生	329
第十一章 三角函数	334
11.1 任意角和弧度数	334
11.2 任意角的三角函数	339
11.3 三角函数的诱导公式	349
11.4 三角函数的图象与性质	354
11.5 函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	363
11.6 三角函数模型的简单应用	373
第十二章 平面向量	382
12.1 平面向量的实际背景及基本概念	382
12.2 平面向量的线性运算	385
12.3 平面向量的基本定理及坐标表示	389
12.4 平面向量的数量积	392
12.5 平面向量应用举例	395
第十三章 三角恒等变换	405
13.1 两角和与差的正弦、余弦、正切及二倍角公式	405
13.2 简单的三角恒等变换	416
第十四章 解三角形	430
14.1 正弦定理和余弦定理	430
14.2 应用举例	438
第十五章 数列	445
15.1 数列的概念与简单表示法	445
15.2 等差数列	450
15.3 等比数列	463
15.4 数列求和	473
15.5 数列的应用举例	476
第十六章 不等式	491
16.1 不等式	491
16.2 一元二次不等式及其解法	496
16.3 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题	502
16.4 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$	508
第十七章 常用逻辑用语	519
17.1 命题及其关系	519
17.2 充分条件与必要条件	524
17.3 简单的逻辑联结词	529
17.4 全称量词与存在量词	534
第十八章 圆锥曲线与方程	540
18.1 曲线与方程	540
18.2 椭圆及其标准方程	545
18.3 椭圆的简单几何性质	551
18.4 双曲线及其标准方程	563



18.5	双曲线的简单几何性质	570
18.6	抛物线及其标准方程	585
18.7	抛物线的简单几何性质	593
第十九章	空间向量与立体几何	604
19.1	空间直角坐标系	604
19.2	空间向量	609
19.2.1	空间向量及其加减运算	609
19.2.2	空间向量的数乘运算	612
19.2.3	空间向量的数量积运算	617
19.2.4	空间向量的正交分解及空间向量运算的坐标表示	623
19.3	平行与垂直	633
19.3.1	利用空间向量证明平行、垂直问题	633
19.3.2	空间角的求法	638
19.3.3	空间距离的求法	644
第二十章	导数及其应用	653
20.1	导数	653
20.2	导数的计算	660
20.2.1	常见函数的导数及导数的运算法则	660
20.2.2	基本初等函数的导数公式及导数的运算法则	666
20.3	导数在研究函数中的应用	669
20.3.1	函数的单调性与导数	669
20.3.2	函数极值与导数	674
20.3.3	函数的最大(小)值与导数	681
20.4	生活中的优化问题举例	687
20.5	定积分的概念	690
20.5.1	曲边梯形的面积	690
20.5.2	定积分的概念	693
20.6	微积分基本定理	696
20.7	定积分的简单应用	699
20.7.1	定积分在几何中的应用	699
20.7.2	定积分在物理中的应用	701
第二十一章	推理与证明	710
21.1	合情推理与演绎推理	710
21.1.1	合情推理	710
21.1.2	演绎推理	714
21.1.3	数学归纳法	718
21.2	直接证明与间接证明	720
21.2.1	综合法与分析法	720
21.2.2	间接证明	725
第二十二章	数系的扩充与复数的引入	729
22.1	数系的扩充	729



22.2 复数的四则运算	732
第二十三章 计数原理	739
23.1 分类加法计数原理和分步乘法计数原理	739
23.2 排列与组合	743
23.2.1 排列	743
23.2.2 组合	749
23.3 二项式定理	757
第二十四章 随机变量及其分布	764
24.1 离散型随机变量及其分布列	764
24.2 条件概率与事件的独立性	769
24.3 离散型随机变量的均值与方差	774
24.4 正态分布	777
第二十五章 统计案例	784
25.1 回归分析的基本思想及其初步应用	784
25.2 独立性检验的基本思想及其初步应用	790



第一章 集合与函数概念

1.1 集合的含义及其表示

一、知识梳理

1. 集合与元素的概念

(1) 集合:某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集.

注意:①集合是数学中不加定义的原始概念,是基本的概念之一,它是用描述性语言叙述的.

②集合常用大写的拉丁字母 A, B, C, \dots 表示.

(2) 元素:集合中的每个对象叫做这个集合的元素.集合的元素常用小写的拉丁字母表示.

2. 集合的分类

(1) 无限集:含有无限个元素的集合叫无限集.

(2) 有限集:含有有限个元素的集合叫有限集.

(3) 空集:不含任何元素的集合叫空集,记作 \emptyset .

3. 构成集合的元素具有以下特征

(1) 确定性:对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的,即一个元素或属于该集合,或不属于该集合,二者必居其一.

(2) 互异性:集合中的元素是互异的.任何两个相同的对象在同一个集合中,只能算作这个集合的一个元素.

(3) 无序性:集合中的元素是没有顺序的.

4. 集合的表示方法

(1) 列举法:把集合中的元素一一列举出来写在大括号内表示集合的方法,叫列举法.

注意:①元素间用分隔号“,”隔开.

②元素不重复.

③元素无顺序.

④对于含较多元素的集合,如果构成该集合的元素有明显规律,可用列举法,但是必须把元素间的规律显示清楚后才能用删节号.

(2) 描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法.它的一般形式是 $\{P|P \text{ 适合的条件}\}$,其中 P 叫代表元素.

描述法的语言形式有三种:文字语言,符号语言,图形语言.

使用描述法时,需注意以下几点:

①写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表示的元素符号).

②说明该集合中元素的性质.

③不能出现未被说明的字母.

④多层描述时,应准确使用“且”、“或”.



⑤所有描述的内容都要写在集合符号内.

(3) 图示法(文氏图):为了形象地表示集合,我们常常画一条封闭的曲线,用它的内部来表示一个集合.

5. 常用数集的符号

为了书写的方便,我们规定常见的数集用特定的字母表示.下面是几种常见的数集表示方法:

- (1) 全体非负整数的集合通常简称非负整数集(或自然数集),记作 \mathbf{N} .
- (2) 非负整数集内排除 0 的集合,也称正整数集,表示成 \mathbf{N}^* (或 \mathbf{N}_+).
- (3) 全体整数的集合通常简称为整数集,记作 \mathbf{Z} .
- (4) 全体有理数的集合通常简称为有理数集,记作 \mathbf{Q} .
- (5) 全体实数的集合通常简称为实数集,记作 \mathbf{R} .

6. 元素与集合的关系

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$,读作 a 属于集合 A .

如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 $a \notin A$,读作 a 不属于集合 A .

注意:① $a \in A$ 与 $a \notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素.根据集合中元素的确定性,可知对任意 a 与 A , $a \in A$ 或 $a \notin A$ 这两种情况有且只有一种成立.

② 符号“ \in ”、“ \notin ”是表示元素与集合之间关系的,不能用来表示集合与集合之间的关系,这一点千万要牢记.

易错分析 (1) 无论何时何地,“ $x \in \emptyset$ ”的写法都是错误的,“ $x \notin \emptyset$ ”是永恒的真理.

(2) a 与 $\{a\}$ 是不同的, a 表示一个元素, $\{a\}$ 表示由一个元素 a 构成的集合.一般称 $\{a\}$ 为单元素集;特别地, 0 与 $\{0\}$ 是不同的.

(3) $\{0\}$ 与 \emptyset 是不同的, $\{0\}$ 表示由一个元素 0 构成的集合, \emptyset 是不含任何元素的集合.

(4) 表示无限集必须用描述法,语言形式可以是文字语言,可以是符号语言,也可以是图形语言,列举法实施不了对无限集的所有元素的一一列举.



二、典型例题

题型一:是否构成集合的判断题

例 1 考查下列每组对象能否构成一个集合:

- (1) 著名的数学家;
- (2) 高一(3)班所有高个子同学;
- (3) 不超过 20 的非负数;
- (4) 方程 $x^2 - 9 = 0$ 在实数范围内的解;
- (5) 直角坐标平面内第一象限的一些点;
- (6) $\sqrt{3}$ 的近似值的全休.

解:(1)“著名的数学家”无明确的标准,对于某个人是否“著名”无法客观地判断,因此“著名的数学家”不能构成一个集合.类似地,(2)也不能构成集合;(3)任给一个实数 x ,可以明确地判断是不是“不超过 20 的非负数”,即“ $0 \leq x \leq 20$ ”与“ $x > 20$ 或 $x < 0$ ”,两者必居其一,且仅居其一,故“不超过 20 的非负数”能构成集合.类似地,(4)也能构成集合;(5)“一些点”无明确的标准,对于某个点是否在“一些点”中无法确定,因此“直角坐标平面内第一象限的一些点”不能构成集合;(6)“ $\sqrt{3}$ 的近似值”不明确精确到什么程度,因此不能判定一个数如“2”是不是它的近似值,所以(6)不能构成集合.



点评

一些元素构成的集合必须具有以下两个特点:一是整体性,二是确定性,其中“整体”一语,说明集合是指某些对象的整体而不是指其中的个别对象,这就是集合的整体性.一个对象要么是集合的元素,要么不是集合的元素,二者必居其一,这是集合的确定性.如(2)中的某同学是不是“高个子”不能确定.

题型二:集合三要素的有关问题

例2 (2007·黄冈)含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$,也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$.求 $a^{2007} + b^{2007}$.

解:由集合元素的互异性可知 $a \neq 1$ 且 $a \neq 0$,所以 $a \neq a^2$.

又因为 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$ 和 $\{a^2, a+b, 0\}$ 表示同一个集合,

$$\text{所以 } \begin{cases} a = a + b, \\ \frac{b}{a} = 0, \\ 1 = a^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 0. \end{cases} \text{ (舍) 或 } \begin{cases} a = -1, \\ b = 0. \end{cases}$$

所以 $a^{2007} + b^{2007} = (-1)^{2007} = -1$.

点评

集合中元素三特征在解题中不可忽视,特别是元素的互异性.

例3 由对象 $x, x^2 - x, x^3 - 3x$ 能组成一个集合吗?如果能组成一个集合,则说明理由;如果不能,则需要添加什么条件,使它组成一个集合?

解:它不一定能表示成一个集合,因为 $x, x^2 - x, x^3 - 3x$ 之间有可能相等,因而不一定满足元素的互异性.

由 $x = x^2 - x$,得 $x = 0$ 或 $x = 2$;

由 $x = x^3 - 3x$,得 $x = 0$ 或 $x = \pm 2$;

由 $x^2 - x = x^3 - 3x$,得 $x = 0$,或 $x = 2$ 或 $x = -1$.

故只需要添加条件 $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$,且 $x \neq 2$,且 $x \neq -2$,

则 $\{x, x^2 - x, x^3 - 3x\}$ 能表示成一个集合.

点评

集合的元素所必须具备的“三性”有着广泛的应用.在解题时,特别是在题目快解答完毕之时,我们必须问问自己,这里的集合的元素是否满足三性.

题型三:列举法表示集合的问题

例4 用列举法表示下列集合:

$$(1) A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{6}{2-x} \in \mathbf{Z}\right\};$$

$$(2) B = \{y \mid y = -x^2 + 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\};$$

$$(3) C = \{(x, y) \mid y = -x^2 + 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}.$$

分析:(1)(2)是数集,(3)为点集,根据元素所具有的性质即可写出集合的所有元素.

解:(1)要使 $x, \frac{6}{2-x}$ 都是整数,故 $|2-x|$ 必是6的约数,当 $x = -4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8$ 时, $|2-x|$



1是6的约数.

$$\therefore A = \{-4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8\}.$$

(2)由 $y = -x^2 + 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$, 知 $y \leq 6$.

\therefore 当 $x = 0, 1, 2$ 时, $y = 6, 5, 2$ 符合题意.

$$\therefore B = \{2, 5, 6\}.$$

(3)点 (x, y) 满足条件 $y = -x^2 + 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$, 则有

$$\begin{cases} x=0, \\ y=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=5; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$$

$$\therefore C = \{(0, 6), (1, 5), (2, 2)\}.$$

点评

(2)(3)的不同在于(2)为数集,元素是3个数,(3)为点集,元素为3个点.用描述法表示的集合,要特别注意其代表元素的属性.

题型四:用描述法表示集合的问题

例 5 用描述法表示下列集合:

(1)正奇数集;

(2)被3除余1的正整数集合;

(3)使 $y = \frac{2006}{x^2 + x - 6}$ 有意义的实数 x 的集合;

(4)坐标平面内坐标轴上点的集合;

(5)坐标平面内在第二象限内的点所组成的集合;

(6)坐标平面内不在第一、三象限的点的集合.

分析:把自然语言转化为集合语言用描述法表示出来,本题主要考查集合的表示方法.

解:(1) $\{x|x=2n+1, n \in \mathbf{N}\}$ (也可表示为 $\{x|x=2n-1, n \in \mathbf{N}^*\}$).

(2) $\{x|x=3n+1, n \in \mathbf{N}\}$.

(3) $\{x|x \neq 2 \text{ 且 } x \neq -3, x \in \mathbf{R}\}$.

(4) $\{(x, y) | xy=0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$.

(5) $\{(x, y) | x < 0 \text{ 且 } y > 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$.

(6) $\{(x, y) | xy \leq 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$.

点评

使用描述法时,应注意六点:(1)写清楚集合中元素的代号;(2)说明该集合中元素的性质;(3)不能出现未被说明的字母;(4)多层描述时,应当准确使用“且”“或”;(5)所有描述的内容都要写在大括号内;(6)用于描述的语句力求简明、确切.

题型五:元素与集合的关系问题

例 6 下面各组的集合中,每个集合的意义是否相同,它们是否相同?

(1) $\{1, 5\}, \{(1, 5)\}, \{5, 1\}, \{(5, 1)\}$;

(2) $\{x|x=0\}, \{(x, y)|x=0\}$;

(3) $\{x|y=x^2+1\}, \{y|y=x^2+1\}$.

分析:根据集合的概念及集合元素的特性求解.

解:(1) $\{1, 5\}$ 是由两个元素组成的,由集合元素的无序性知与 $\{5, 1\}$ 表示同一集合, $\{(1, 5)\}$ 是由一个点 $(1, 5)$ 构成的单元集合,由于 $(1, 5)$ 与 $(5, 1)$ 表示的是不同的点,故 $\{(1, 5)\}$ 与 $\{(5, 1)\}$



是两个不同的集合;

(2) 集合 $\{x|x=0\}$ 是数轴上的一个点, 集合 $\{(x,y)|x=0\}$ 是平面直角坐标系中 y 轴上的所有点构成的, 这两个集合的元素根本不同, 因此它们表示的是两个不同的集合;

(3) 集合 $\{x|y=x^2+1\}$ 是由函数 $y=x^2+1$ 的自变量构成的集合, 可取到一切实数, 即 $\{x|y=x^2+1\}=\mathbf{R}$, 而 $\{y|y=x^2+1\}$ 是由所有函数值构成的集合, 由大于或等于 1 的所有实数构成, 这两个集合虽然都是实数构成的集合, 但它们不相同.

点评

一要注意集合元素的特性要相同, 二要注意同一类型的集合中的元素是否相同.

例 7 已知集合 $A = \{a-2, 2a^2+5a, 12\}$, 且 $-3 \in A$, 求 a .

分析: 本题考查元素与集合的关系, 体会分类讨论思想的应用.

解: $\because -3 \in A$, 则 $-3 = a-2$ 或 $-3 = 2a^2+5a$,

$$\therefore a = -1 \text{ 或 } a = -\frac{3}{2},$$

当 $a = -1$ 时, $a-2 = -3, 2a^2+5a = -3$,

$$\therefore a = -1 \text{ 舍去, 故 } a = -\frac{3}{2}.$$

点评

① 已知 $a \in A$, 若集合 A 是用列举法表示的, 则 a 一定等于其中的一个元素, 若集合 A 是用描述法表示的, 则 a 一定满足描述集合中元素的共同特性, 如满足方程(组)、不等式等. ② 这类题目一方面考查表示集合的方法(列举法, 描述法), 一方面又考查集合元素的三个特性. ③ 分类讨论思想在分析集合元素的特性时, 经常用到.

题型六: 特殊集合空集问题

例 8 下列命题中真命题的个数是

()

① $0 \in \emptyset$; ② $\emptyset \in \{\emptyset\}$; ③ $0 \in \{0\}$; ④ $\emptyset \notin \{a\}$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

分析: 要判断一个元素是否在某个集合中, 关键在于弄清这个集合是由哪些元素所组成的. 由于 \emptyset 是不含任何元素的集合, 故①错; 而 $\{\emptyset\}$ 是由空集作为元素组成的一个集合, 故②正确; 同理③也正确; 因为 \notin 是表示元素与集合之间的关系, 所以④不正确, 故选 B.

答案: B

点评

由本例你能领悟到如何区别符号“0”、“ \emptyset ”、“ $\{0\}$ ”、“ $\{\emptyset\}$ ”吗?

事实上“0”是一个数, 它可以作为集合的元素; 而“ \emptyset ”则是一个集合, 由于集合也可以作为另一个集合的元素, 因此“ \emptyset ”也可以作为某些集合的“元素”; “ $\{0\}$ ”则是由数 0 组成的一个单元素集合, “ $\{\emptyset\}$ ”是由“ \emptyset ”为元素组成的一个集合.

题型七: 集合有关的综合问题

例 9 下列命题:

(1) 方程 $\sqrt{x-2} + |y+2| = 0$ 的解集为 $\{2, -2\}$;

(2) 集合 $\{y|y=x^2-1, x \in \mathbf{R}\}$ 与 $\{y|y=x-1, x \in \mathbf{R}\}$ 的公共元素所组成的集合是 $\{0, 1\}$;

(3) 集合 $\{x|x-1 < 0\}$ 与集合 $\{x|x > a, a \in \mathbf{R}\}$ 没有公共元素.



其中真命题的个数有

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

()

分析:要判断这些命题的真假,这就需要对用来描述的这些命题的集合语言进行转化,以弄清集合的构成.在(1)中方程 $\sqrt{x-2}$

$+|y+2|=0$ 等价于 $\begin{cases} x-2=0, \\ y+2=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=2, \\ y=-2. \end{cases}$ 其解应为有序实数对,

因此其解集应为 $\{(2, -2)\}$,故命题(1)是假命题.而在(2)中,由于集合 $\{y|y=x^2-1, x \in \mathbf{R}\}$ 的代表元素是 y ,而 y 满足属性:“ $y=x^2-1, x \in \mathbf{R}$ ”.由于 $x \in \mathbf{R}$ 时, $y=x^2-1 \geq -1$,所以集合 $\{y|y=x^2-1, x \in \mathbf{R}\}$ 是由大于或等于 -1 的实数所组成的集合.同理 $\{y|y=x-1, x \in \mathbf{R}\}$ 是 \mathbf{R} ,因此(2)也是错误的.在(3)中,集合 $\{x|x-1 < 0\}$ 即为不等式 $x-1 < 0$ 的解集,即 $x < 1$,而 $\{x|x > a, a \in \mathbf{R}\}$ 即为不等式 $x > a$ 的解集.由图 1.1-1 可知,这两个集合可能有公共的元素,也可能没有公共的元素,因此(3)也是错误的.

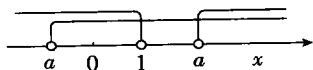


图 1.1-1

答案:A

点评

在(2)中很容易被符号描述法的表象所蒙蔽,认为这两个集合中的“ x ”和“ y ”必须取相同的值.事实上,这是用相同字母来描述不同的集合的元素所具有的属性.

例 10 设集合 $A = \{a|a = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}\}$,集合 $B = \{b|b = k^2 - 4k + 5, k \in \mathbf{N}\}$,若 $a \in A$,试判断 a 与 B 的关系.

解:判断一个对象 a 与集合 B 的关系,即判断“属于”或“不属于”的关系,若“ $a \in A$ ”,则 a 可以写成“ $n^2 + 1, n \in \mathbf{N}$ ”的形式;判断 a 是否属于 B ,则看 a 是否可表示成“ $k^2 - 4k + 5, k \in \mathbf{N}$ ”的形式,
 $\because a \in A, \therefore a = n^2 + 1 = n^2 - 4n + 4n - 4 + 5 = (n^2 + 4n + 4) - 4(n + 2) + 5 = (n + 2)^2 - 4(n + 2) + 5,$
 $\therefore a \in B.$

点评

在由 $a \in A$ 判断 a 是否属于 B 的过程中,关键是先要变(或凑)形式,即由“ $n^2 + 1$ ”向“ $k^2 - 4k + 5$ ”的形式变化,然后判断.

例 11 已知集合 $A = \{x|ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

- (1)若 A 中只有一个元素,求 a 的值;
- (2)若 A 中最多有一个元素,求 a 的取值范围;
- (3)若 A 中至少有一个元素,求 a 的取值范围;
- (4)若 $A = \emptyset$,求 a 的取值范围.

分析:本题主要考查集合中元素的个数问题,解决本题的关键是讨论方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 的实数根的个数,从而确定参数 a 的取值范围.

解:(1)当 $a = 0$ 时,原方程变为 $2x + 1 = 0$,此时 $x = -\frac{1}{2}$,符合题意;

当 $a \neq 0$ 时,方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 为一元二次方程, $\Delta = 4 - 4a = 0$,即 $a = 1$ 时,原方程的解为 $x = -1$,符合题意.

故当 $a = 0$,或 $a = 1$ 时,原方程只有一个解,此时 A 中只有一个元素.

(2) A 中最多含有一个元素,即 A 中有一个元素或 A 中没有元素.

当 $\Delta = 4 - 4a < 0$,即 $a > 1$ 时,原方程无实数解.

结合(1)知,当 $a = 0$ 或 $a \geq 1$ 时, A 中最多有一个元素.



(3) A 中至少有一个元素,即 A 中有一个或两个元素.

由 $\Delta > 0$, 得 $a < 1$, 结合(1)可知, $a \leq 1$.

(4) $A = \emptyset$ 时, 由(2)知, $a > 1$.

点评

“ $a = 0$ ”这种情况容易被忽视,对于“方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ ”有两种情况:一是“ $a = 0$ ”,即它是一元一次方程;二是“ $a \neq 0$ ”,即它是一元二次方程,也只有在这种情况下才能用判别式 Δ 来解决问题.

1.2 集合间的基本关系

一、知识梳理

1. 集合间的包含关系

	定义	性质与说明	文氏图表示法
子集	如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$).	① $A \subseteq A$; ② $\emptyset \subseteq A$; ③ 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$; ④ 含有 n 个元素的集合的子集的个数是 2^n .	
真子集	如果 A 是 B 的子集,且 B 中至少有一个元素不属于 A ,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$).	① 空集是任何非空集合的真子集; ② 若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$; ③ 含有 n 个元素的集合的真子集的个数是 $2^n - 1$.	
补集	已知全集 U , 集合 $A \subseteq U$, 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做集合 A 在 U 中的补集,记作 $\complement_U A$, 即 $\complement_U A = \{x x \in U, \text{且 } x \notin A\}$.	① $A \cup (\complement_U A) = U$; ② $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$; ③ $\complement_U (\complement_U A) = A$; ④ $\complement_U \emptyset = U$; ⑤ $\complement_U U = \emptyset$.	

注意: ①“ A 是 B 的子集”的含义是:集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素,即由任意 $x \in A$ 都有 $x \in B$.

②当 A 不是 B 的子集时,我们记作“ $A \not\subseteq B$ ” (或 $B \not\supseteq A$), 读作 A 不包含于 B (或 B 不包含 A).

③在子集的定义中,不能理解为子集 A 是 B 中的“部分元素”所组成的集合,因为若 $A = \emptyset$, 则 A 中不含任何元素;若 $A = B$, 则 A 中含有 B 中的所有元素,但此时集合 A 也是集合 B 的子集.

④强调补集时,一定要强调谁是全集.



全集:如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集,通常用 U 表示.

注意:全集是相对于所研究问题而言的一个相对概念,它含有与所研究问题有关的各个集合的全部元素,因此,全集因研究问题而异.例如:在研究数集时,常把实数集 \mathbf{R} 看作全集.在立体几何中,三维空间是全集,这时平面是全集的一个子集.而在平面几何中,整个平面可以看作是一个全集.

2. 集合相等

对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B ,记作 $A = B$,读作 A 等于 B .如图 1.2-1.

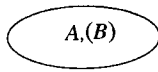


图 1.2-1

注意:①证明:若 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,则 $A = B$,因为 $A \subseteq B$,所以 A 的元素都是 B 的元素;又因为 $B \subseteq A$,所以 B 的元素都是 A 的元素,这就是说,集合 A 与集合 B 的元素是完全相同的,因而我们说 A 与 B 是相等的集合.

②上面定义的证明给出我们证明两个集合相等的办法,即欲证 $A = B$,只需证 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$ 即可.

易错分析 $A \subseteq B$ 或 $A \not\subseteq B$ 时易漏掉 $A = \emptyset$ 的情况.

典型例题

题型一:子集、真子集的概念问题

例 1 下列命题

- ①空集没有子集;
- ②任何集合至少有两个子集;
- ③空集是任何集合的真子集;
- ④若 $\emptyset \not\subseteq A$,则 $A \neq \emptyset$.

其中正确的有

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

分析:正确理解空集、子集、真子集的概念及它们之间的关系.①错误,空集是任何集合的子集,所以 $\emptyset \subseteq \emptyset$;②错误,如 \emptyset ;③错误,空集 \emptyset 不是空集 \emptyset 的真子集;④正确,因为空集 \emptyset 是任何非空集合的真子集.

答案:B

点评

(1)空集是任何集合的子集,也就是说对于任何一个集合 A ,有 $\emptyset \subseteq A$,因此 $\emptyset \subseteq \emptyset$ 也成立.

(2)空集是任何非空集合的真子集,也就是说,对于任何一个非空集合 A ,有 $\emptyset \subsetneq A$,反之,若 $\emptyset \not\subseteq A$,则 $A \neq \emptyset$.

(3)任何一个集合是它本身的子集,也就是说,对于任何一个集合 A ,有 $A \subseteq A$.

例 2 若集合 $M = \{x|x^2 + x - 6 = 0\}$, $N = \{x|ax + 1 = 0\}$,且 $N \subseteq M$,求由 a 的可能取值组成的集合.

解:由 $M = \{-3, 2\}$,当 $a = 0$ 时, $N = \emptyset$,有 $N \subseteq M$;

当 $a \neq 0$ 时, $N = \{-\frac{1}{a}\}$,

又 $N \subseteq M$ 时, $-\frac{1}{a} = -3$ 或 $-\frac{1}{a} = 2$,