华腾教育
HUA TENG EDUCATION

高等学校教材经典同步辅导丛书数理类

配人大社《微积分》(修订本)赵树嫄 主编

经济应用数学基础(一)

微积分

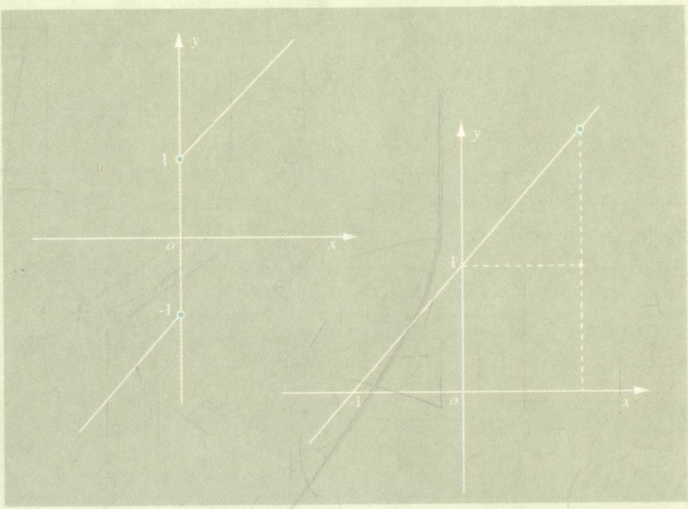
(修订本)

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心

丛书主编 清华大学 高玉斌

本书主编 清华大学 张霄鹏



◆ **紧贴教材**:学习点拨 知识归纳 精讲重点

◆ **课后习题**:分析要点 精准解答 总结方法

◆ **应考必备**:突出考点 经典试题 联系考研

◆ **网络增值**:资料下载 海量试题 互动论坛

中国矿 大学出版社

最新版

高等学校教材经典同步辅导丛书

微积分

(人大修订版)

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 清华大学 高玉斌
本书主编 清华大学 张胃鹏

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分(人大修订本)同步辅导及习题全解/张霄鹏主编. —徐州:中国矿业大学出版社,2007.2

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 978-7-81107-593-9

Ⅰ.微… Ⅱ.张… Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 022448 号

书　　名　微积分(人大修订本)同步辅导及习题全解

主　　编　张霄鹏

责任编辑　罗　浩

出版发行　中国矿业大学出版社

(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008)

网　　址　http://www.cumtp.com **E—mail**:cumtpvip@cumtp.com

印　　刷　北京市昌平百善印刷厂

经　　销　新华书店

开　　本　787×1092 1/32　**本册印张** 16.5　**本册字数** 317 千字

版次印次　2007 年 2 月第 1 版　2007 年 2 月第 1 次印刷

总 定 价　80.20 元(共四册)

前言

PREFACE

经济应用数学基础——微积分是大学财经专业数学课程中一门重要的基础课，也是硕士入学考试的必考科目．人民大学赵树嫄编写的《微积分》(修订版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用．为了帮助读者更好地学好这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《微积分(人大修订版)同步辅导及习题全解》．本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，提高应试能力．

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点．考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1. 学习导引：讲解本章知识的重要学习方法和重点难点，让学生对本章的知识有一个清晰的总体的把握．

2. 知识点归纳：将各章的基本概念和重要定理公式进行归纳和总结，并且注重每章中各节的联系，阐述相关概念和定理之间的联系，使学生融会贯通，对教材中的各个公式定理和概念有一个系统而深刻的理解．

3. 典型例题与解题技巧：按照例题所考查的知识点与解题方法的不同对精选的例题进行归类并且详细分析每类题型的解题方法，在典型题目后面有总结性内容，许多题目还有多种解法，使学生举一反三，真正的掌握本学科的基本知识和解题思维．

4. 习题全解：对于考查知识点单一的基础题型，只给出解题过程，而对于那些综合考查多个知识点或者比较难的题目，在题解的前面给出分析，也就是解本题所用的基本知识和思维方法，在典型题目后面给出总结，让同学对题目有

所回味，更深层次的掌握如何应用基本知识来解题.

5. 考研真题剖析：举出涉及本章知识点的研究生入学考试真题并做了细致的分析和讲解.

6. 同步自测及详解：选取有测试性、代表性的习题来测试学生对本章知识的掌握程度，并给出了详细解答.

7. 经典应用问题：为提高学生学习的积极性，在不超出教材范围的基本上，详细讲解各章知识在问题中的应用，以激发学生学习的热情.

在本书的最后还附有 **2007** 年全国硕士研究生入学统一考试数学三和数学四真题及分析.

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助. 同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正.

华腾教育教学与研究中心

目 录

CONTENTS

第一章　函　数 …… 1
学习导引 …… 1
知识点归纳 …… 2
典型例题与解题技巧 …… 10
习题全解 …… 18
考研真题剖析 …… 41
同步自测题 …… 42
参考答案及详解 …… 44
经典应用问题 …… 47

第二章　极限与连续 …… 49
学习导引 …… 49
知识点归纳 …… 50
典型例题与解题技巧 …… 56
习题全解 …… 65
考研真题剖析 …… 91
同步自测题 …… 93
参考答案及详解 …… 95

经典应用问题 …… 100

第三章 导数与微分 …… 102
学习导引 …… 102
知识点归纳 …… 103
典型例题与解题技巧 …… 108
习题全解 …… 114
考研真题剖析 …… 142
同步自测题 …… 145
参考答案及详解 …… 147
经典应用问题 …… 152

第四章 中值定理,导数的应用 …… 153
学习导引 …… 153
知识点归纳 …… 154
典型例题与解题技巧 …… 160
习题全解 …… 176
考研真题剖析 …… 206
同步自测题 …… 209
参考答案及详解 …… 212
经典应用问题 …… 218

第五章 不定积分 …… 220
学习导引 …… 220
知识点归纳 …… 221
典型例题与解题技巧 …… 225
习题全解 …… 236
考研真题剖析 …… 260
同步自测题 …… 263

参考答案及详解 …… 265
经典应用问题 …… 268

第六章　定积分 …… 270
学习导引 …… 270
知识点归纳 …… 271
典型例题与解题技巧 …… 277
习题全解 …… 289
考研真题剖析 …… 320
同步自测题 …… 324
参考答案及详解 …… 326
经典应用问题 …… 332

第七章　无穷级数 …… 335
学习导引 …… 335
知识点归纳 …… 336
典型例题与解题技巧 …… 341
习题全解 …… 357
考研真题剖析 …… 376
同步自测题 …… 378
参考答案及详解 …… 380
经典应用问题 …… 385

第八章　多元函数 …… 387
学习导引 …… 387
知识点归纳 …… 388
典型例题与解题技巧 …… 395
习题全解 …… 409
考研真题剖析 …… 434

同步自测题 …………………………………………………… 439
参考答案及详解 ………………………………………………… 442
经典应用问题 …………………………………………………… 446

第九章　微分方程与差分方程简介 …………………………… 448
学习导引 ………………………………………………………… 448
知识点归纳 ……………………………………………………… 449
典型例题与解题技巧 …………………………………………… 455
习题全解 ………………………………………………………… 462
考研真题剖析 …………………………………………………… 482
同步自测题 ……………………………………………………… 485
参考答案及详解 ………………………………………………… 486
经典应用问题 …………………………………………………… 492
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 ……… 494
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 ……… 504

第一章

函　数

学习导引

函数是微积分的预备知识，是后续章节学习的基石，因而地位很重要，读者务必要重视.

本章内容包括集合的知识，着重介绍了实数集的概念，紧接着花大量篇幅介绍了函数的相关内容，函数内容的把握是本章的重点和难点.

集合知识部分介绍了集合的概念、表示方法及全集、空集和子集的定义、集合的交并补差及笛卡尔乘积等运算，也给出了集合的交换律、结合律、分配律和摩根律等运算律. 在分析集合间的关系时，用文氏图往往比较明了，而在集合的推理证明中灵活运用集合的运算律往往会使解题更加便捷.

实数集知识部分介绍了实数与数轴、实数绝对值的定义及其运算性质，也介绍了各种类型的实数区间和邻域. 注意在对实数区间运算时，用数轴辅助分析往往更加方便.

函数部分给出了函数关系的定义，函数的定义域、值域、自变量和因变量，对应法则和记法以及多值函数的定义，另外还有函数的表示方法和隐函数、反函数、复合函数的定义，介绍了函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性定义，最后给出了六类常用的基本初等函数，以及由已知函数图形作简单组合与变换得到新函数图形的方法. 大家要熟练掌握函数部分的内容并能灵活应用.

知识点归纳

§1.1 集合

1. 集合的概念

一般来说，集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的汇总，构成集合的事物或对象，称为集合的元素. 集合元素具有确定性，不重复性和互异性.

2. 集合的表示方法

(1) 列举法　按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号{}括起来.

(2) 描述法　设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则，A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合，则记为 $A=\{a \mid P(a)\}$.

(3) 文氏图　表示集合以及集合间的关系可以用文氏图，文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合，集合内的元素以区域内的点表示.

3. 全集与空集

(1) 由所研究的一切事物构成的集合称为全集，记为 U. 全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集.

(2) 不包含任何元素的集合称为空集，记作 Φ.

4. 子集、集合的相等和分离

(1) 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

(2) 设有集合 A 和 B，如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$. 如果 $A \cap B = \Phi$，则称 A、B 是分离的.

(3) 关于子集有下列结论：

①$A \subset A$

② 对任意集合 A，有 $\Phi \subset A$

③ 如果 $A \subset B$，$B \subset C$，则 $A \subset C$

5. 集合的运算

(1)设有集合 A 和 B,定义:

$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$(集合的并)

$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$(集合的交)

$A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\}$(集合的差)

$A'=\{x|x\in U$ 且 $x\overline{\in} A\}$(集合的补)

(2) 集合的并有下列性质:

①$A\subset A\cup B, B\subset A\cup B$

② 对任何集合 A,有 $A\cup\Phi=A, A\cup U=U, A\cup A=A$

(3) 集合的交有下列性质:

①$A\cap B\subset A, A\cap B\subset B$

② 对任何集合 A,有 $A\cap\Phi=\Phi, A\cap U=A, A\cap A=A$

(4) 集合的补有下列性质:

$A\cup A'=U, A\cap A'=\Phi$

6. 集合运算律

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4) 摩根律:$(A\cup B)'=A'\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

7. 集合的笛卡尔乘积

设有集合 A 和 B,$x\in A, y\in B$,所有二元有序数组 (x,y) 构成的集合,称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积. 记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A, y\in B\}.$$

§1.2 实数集

1. 实数与数轴

(1) 实数是一个数的集合,用 R 表示,全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系. 今后我们研究的数都是实数,为简单起见,常将

实数和数轴上相对应的点等同看待，用相同符号表示.

(2) 实数集(R) $\begin{cases} 有理数集(Q) \begin{cases} 整数集 \begin{cases} 正整数集(N) \\ 零 \\ 负整数集 \end{cases} \\ 分数集 \end{cases} \\ 无理数集 \end{cases}$

2. 绝对值

(1)一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

(2)几何意义：

①$|x|$表示数轴上的点 x(不论 x 在原点左边还是右边)与原点的距离；

②设 x,y 是任意两个实数，则 $|x-y|$ 表示数轴上 x,y 两点的距离.

(3)绝对值及其运算有下列性质：

①$|x|=\sqrt{x^2}$

②$|x|\geqslant 0$

③$|-x|=|x|$

④$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

⑤$\{x \mid |x|<a\}=\{x \mid -a<x<a\}$，其中 $a>0$

⑥$\{x \mid |x|>b\}=\{x \mid x<-b\}\cup\{x \mid x>b\}$，其中 $b>0$

⑦$|x+y|\leqslant |x|+|y|$

⑧$|x-y|\geqslant |x|-|y|$

⑨$|xy|=|x|\cdot|y|$

⑩ $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$，其中 $y\neq 0$.

3. 区间

设 a,b 为实数，且 $a<b$

(1)开区间$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$

(2)闭区间$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$

(3)半开半闭区间

$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$

以上三类区间为有限区间.有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$,称为区间的长.

(4)$(a,+\infty)=\{x|a<x\}$

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$

(5)$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$

(6)$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$

以上三类为无限区间.

4. 邻域

称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 为以点 x_0 为中心,半径为 δ 的邻域;

称 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 为以 x_0 为中心、半径为 δ 的空心邻域.

§1.3 函数关系

1. 函数关系的定义

若 D 是一个非空实数集合,设有一个对应规则 f,使每一个 $x\in D$,都有一个确定的实数 y 与之对应,则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或称变量 y 是变量 x 的函数.记作 $y=f(x),x\in D$.

x 称为自变量,y 称为因变量.集合 D 称为函数的定义域,也可以记作 $D(f)$.对于 $x_0\in D(f)$ 所对应的 y 值,记作 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$,称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值,全体函数值的集合 $\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$,称为函数

$y=f(x)$ 的值域,记作 Z 或 $Z(f)$.

2. 说明

(1)f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则,而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值;

(2)表示函数的记号可以任意选取,这个性质称为函数表示法的无关特性;

(3)由函数定义知 $D\neq\Phi$,且对任意 $x\in D$,$y=f(x)$ 仅有惟一确定值;

(4)构成函数的要素是定义域 $D(f)$ 及对应法则 f，这是判定两个函数是否相等的依据；

(5)当且仅当两个函数的定义域及对应法则都相同时，两个函数相等；

(6) $f(x)$ 表示将规则 f 施用于 x.

3. 多值函数

对于非空集合 D 中的 x 值有多个 y 值与之对应的关系称为多值函数.

§1.4 函数表示法

1. 三种表示法

(1)表格法；

(2)图形法；

(3)公式法(解析法)：将一个函数关系用一个解析式表示的方法.

2. 分段函数

在自变量的不同变化范围中，自变量与因变量的对应规则用不同的式子来表示的函数称为分段函数. 一般来说，分段函数不是初等函数.

3. 隐函数

因变量不能用自变量表达式显性表示，而只能由二元方程 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ 确定的函数关系叫做隐函数.

§1.5 函数的几种简单性质

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的实数集 D 内有定义. 若对任意一个 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 内的奇函数；若对任意 $x\in D$ 恒有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形对称于原点，偶函数的图形对称于 y 轴.

2. 函数的周期性

给定函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 a，使得 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立，则称此函数为周期函数. 满足这个等式的最小正数 a，称为函数的周期.

3. 函数的单调性

给定函数 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$，对于 $x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的；若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少的.

4. 函数的有界性

给定函数 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$，若对任意 $x\in(a,b)$，存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

§1.6 反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 Z，如果对于每个 $y\in Z$，存在惟一的 $x\in D$ 满足 $f(x)=y$，把 y 看作自变量，把 x 看作因变量，则 x 是一个定义在 $y\in Z$ 上的函数，记此函数为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Z$，并称之为 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数.

习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，故常将函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数表示成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z$，它与 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Z$ 表示同一个函数，因为两者具有相同的定义域和对应规则. 因而，在同一直角坐标系中，函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$，$Z(\varphi)\cap D(f)\neq\Phi$，则称 $y=f[\varphi(x)]$，$x\in\{x|\varphi(x)\in D(f)\}$ 为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中称 x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量. 依此法则可以推广到多个函数的复合.

注意　不是任何两个函数都能复合成复合函数，其关键在于 $D(f)\cap Z(\varphi)\neq\Phi$.

§1.7 初等函数

1. 基本初等函数

下面六类函数称为基本初等函数：

(1)常数函数 $f(x)=c$（其中 c 为常数）

定义域是 $(-\infty,+\infty)$，图形为平行于 x 轴截距为 c 的直线.

(2)幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$（其中 α 为任意实数）

定义域随 α 而异，但不论 α 为何值，$f(x)=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，并且图形都经过 $(1,1)$ 点.

(3)指数函数 $f(x)=a^{x}$（其中 $a>0$ 且 $a\neq1$）

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，不论a为何值，$f(x)=a^x$的图形总在x轴上方且过$(0,1)$点. 当$a>1$时，函数单调递增；当$0<a<1$时，函数单调递减.

(4)对数函数$f(x)=\log_a x$(其中$a>0$且$a\neq 1$)

定义域是$(0,+\infty)$，值域是$(-\infty,+\infty)$，不论a为何值，$f(x)=\log_a x$的图形总在y轴右侧且过$(1,0)$点. 当$a>1$时，函数单调递增；当$0<a<1$时，函数单调递减.

指数函数和对数函数互为反函数. 当a取10时，$y=\lg x$称为常用对数；当a取e时，$y=\ln x$称为自然对数.

(5)三角函数

①正弦函数$f(x)=\sin x$

定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[-1,1]$，它是奇函数，周期$T=2\pi$的周期函数，有界函数$|\sin x|\leqslant 1$.

②余弦函数$f(x)=\cos x$

定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[-1,1]$，它是偶函数，周期$T=2\pi$的周期函数，有界函数$|\cos x|\leqslant 1$.

③正切函数$f(x)=\tan x$

定义域是$\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm 1,\cdots\}$，它是奇函数，周期$T=\pi$的周期函数，单调增函数.

④余切函数$f(x)=\cot x$

定义域是$\{x|x\neq k\pi,k=0,\pm 1,\cdots\}$，它是周期$T=\pi$的周期函数，单调减函数.

⑤正割函数$f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

它是周期$T=2\pi$的周期函数，在$[0,\frac{\pi}{2})$上无界.

⑥余割函数$f(x)=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

它是周期$T=2\pi$的周期函数，在$(0,\frac{\pi}{2}]$上无界.

(6)反三角函数

①反正弦函数$f(x)=\arcsin x$