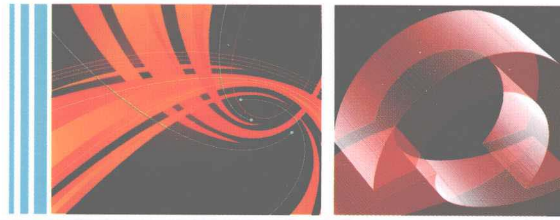
高等教育"十一五"规划教材

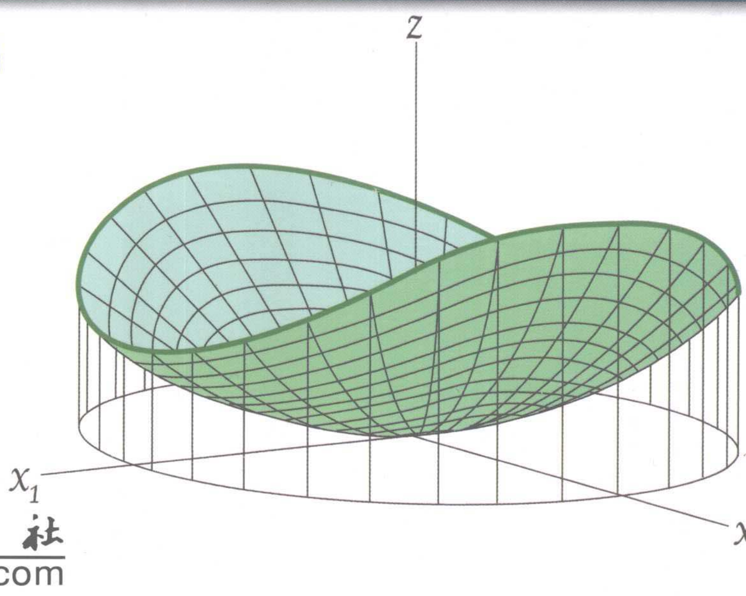


公共基础课教材系列

线性代数

XIANXING DAISHU

程吉树　陈水利　主　编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材
公共基础课教材系列

线性代数

程吉树　陈水利　主　编
裘哲勇　曾羽群　彭勤文　副主编

科学出版社
北　京

内　容　简　介

本书主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等。全书概念叙述清晰，理论分析严谨，突出素质教育理念和应用背景介绍，力求循序渐进、由浅入深、通俗易懂。书中例题丰富，讲解详尽。为了便于学生自学和做数学实验，每章后附有小结、复习题、自测题和数学实验等内容，并附有部分提示与答案。

本书可作为财经类本科专业的教材，也可作为理工科各专业师生和科技工作者参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/程吉树，陈水利主编. —北京：科学出版社，2009

（高等教育“十一五”规划教材·公共基础课教材系列）

ISBN 978-7-03-023768-2

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①程…②陈…　Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 206327 号

责任编辑：沈力匀　周　恢/责任校对：耿　耘

责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 1 月第　一　版　　开本：B5（720×1000）

2009 年 1 月第一次印刷　　印张：13

印数：1—7 000　　字数：262 000

定价：20.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

销售部电话 010-62134988　编辑部电话 010-62135235（HP04）

前　言

线性代数是解决经济管理计算机科学和工程技术等领域中线性问题的有力数学工具，因此线性代数是高等院校本科各专业的公共基础课。

本书是根据教育部工科数学课程教学指导委员会最新修订的《本科数学基础课教学基本要求》（修订稿）的精神和原则，以及根据独立学院和经管类各专业学生学习线性代数知识的需求，并参考部分省市“2＋2”考试大纲和全国硕士研究生入学考试线性代数部分考试大纲，结合多年的教学经验，面向高等院校经管类专业和独立学院各类专业学生编写的。内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等。为了便于自学，使读者能更好地学习本课程的基本内容，编写力求做到科学性与通俗性相结合。本书具有以下特点：

（1）在内容处理上，注重由直观到抽象，由具体到一般，由浅入深，循序渐进，使学生对线性代数的基本内容先从感性认识再到理性认识，进而逐步掌握。

（2）在方法处理上，突出矩阵方法。用矩阵方法处理抽象性和逻辑性较强的线性代数内容时，可使抽象化的结果变成具体的运算结果，从而可分散本课程的难点。由于求解线性方程组是线性代数的核心内容，而矩阵是求解线性方程组最简洁、最有效的方法，且便于使用 Matlab 应用软件，因此本书将矩阵方法贯穿全书，以提高学生求解线性方程组和数学建模能力。

（3）在结构体系上，突出重点，分散难点。对重点问题注重启发引导，力求用通俗语言讲细、讲透，使学生易于理解。对重要的方法与计算步骤注意归纳总结，使学生便于掌握。对于某些较难的或次要的证明则略去，只讲清理论的意义及如何应用。

（4）为了便于学生自学，书中配有适量的典型例题和习题。每章末附有小结、复习题、自测题和数学实验，以帮助学生复习和巩固所学的知识，锻炼数学建模能力和应用 Matlab 软件解决线性代数问题的能力，从而激发学生的学习兴趣，培养学生的创新意识。

本书由程吉树、陈水利负责总体方案设计、内容编排及统稿工作，陈水利和曾羽群编写第 1 章和第 5 章，彭勤文编写第 2 章，程吉树编写第 3 章，裘哲勇编写第 4 章并负责部分修改和校对工作。翁苏骏和张东晓负责部分编辑排版和校对工作。在本书的编写过程中，有幸得到杭州电子科技大学信息工程学院胡建萍院长和马建军副院长的鼓励和大力支持，对她们的热情关心和帮助表示诚挚的感谢！

本书稿虽然经过多次认真修改和校对，但有不少错误和疏漏之处，我们真诚地希望读者给予批评指正，使本书在今后的使用中不断完善。

目 录

第1章　行　列　式

行列式是线性代数的重要组成部分，不仅是研究矩阵理论和解线性方程组的有用工具，而且在工程技术领域中有着极其广泛的应用。本章在定义二阶、三阶行列式的基础上，进一步讨论 n 阶行列式的定义、性质和计算，介绍行列式在解线性方程组中的应用法则——克莱姆法则。

1.1　行列式的定义与性质

1.1.1　二阶、三阶行列式

在线性代数中，将含两个未知量的线性方程组的一般形式写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}。\tag{1.1.1}$$

用 a_{22} 乘第一个方程且用 a_{12} 乘第二个方程，然后两个方程相减，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，就可解出 x_1。同理用 a_{21} 乘第一个方程且用 a_{11} 乘第二个方程，两个方程相减，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，就可解出 x_2。所以当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases},\tag{1.1.2}$$

这就是二元线性方程组解的公式。但这个公式不好记，为了便于记住这个公式，引进记号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，称它为二阶行列式，定义为

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc。$$

二阶行列式中的每个数称为元素，横排称为行，竖排称为列。利用二阶行列式的定义，由方程组(1.1.1)中的未知量 x_1，x_2 的系数可确定二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}。$$

把式(1.1.2)中的分子分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}。$$

D_j 实际上是将 D 的第 j 列元素用方程组右端的常数项替换后所得到的二阶行列式($j=1$, 2)。所以当方程组(1.1.1)的系数行列式 $D\neq 0$ 时，它的解就可以简洁地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}。$$

对于解三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.1.3}$$

同二元线性方程组一样，用加减消元法消去 x_3，就得到只含 x_1，x_2 的两个新的二元线性方程组，再从这两个方程组中消去 x_2 就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3。$$

当 x_1 的系数不为零时，就可解出 x_1。用类似的方法可解出 x_2 与 x_3。

和前面一样，为了便于记忆，我们定义**三阶行列式**

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}。 \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

如果三元线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，其解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}。$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}。$$

例 1.1.1 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=13 \\ x_1+x_2+x_3=10 \\ 2x_1+3x_2-x_3=1 \end{cases}。$$

解 因为 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=1\times1\times(-1)+(-1)\times1\times2+1\times3\times2-2\times1\times2-3\times1\times1-1\times(-1)\times(-1)$

$=-5\neq0$,

且

$$D_1=\begin{vmatrix} 13 & -1 & 2 \\ 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-35,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=7。$$

利用行列式对二元方程组、三元方程组的讨论，其结果简洁、美观，那么，能否将这一结果推广到有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组呢？即能否利用行列式给出 n 元线性方程组解的公式呢？第 1.3 节将给出肯定的回答，下面先了解 n 阶行列式的定义。

1.1.2 *n* 阶行列式

为了定义 n 阶行列式，下面来分析二、三阶行列式的定义，然后找出规律。

利用二阶行列式的定义，三阶行列式(1.1.3)可以变为

$$
\begin{aligned}
D &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}。
\end{aligned}
$$

记 $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{31} \end{vmatrix}$，分别称为元素 a_{11}，a_{12}，a_{13} 的**余子式**，它们是划掉元素 a_{1j} 所在第一行的元素和所在的 j 列元素后的二阶行列式。为了使表示式更简洁，记 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，$j=1,2,3$，称 A_{1j} 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**，于是三阶行列式可写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}。$$

规定一阶行列式就是这个元素，即 $|a_{11}|=a_{11}$，则二阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12},$$

这里 $A_{11}=a_{22}$，$A_{12}=-a_{21}$。

现在可以将二阶、三阶行列式推广到 n 阶行列式。

定义 1.1.1　由 n^2 个数排成 n 行 n 列的一个算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \qquad (1.1.5)$$

称为 n **阶行列式**。这里 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，其中

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

是行列式 D 中划掉第一行元素和第 j 列元素后所构成的 $n-1$ 阶行列式，称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的**余子式**，称 A_{1j} 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**。对于行列式(1.1.5)中的一般元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式可类似定义。

元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 所在的对角线称为**主对角线**。

例如，在四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1&-1&13&7\\4&1&10&6\\2&3&1&0\\5&6&7&8\end{vmatrix}$ 中，元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为 $M_{32}=\begin{vmatrix}1&13&7\\4&10&6\\5&7&8\end{vmatrix}$ 与 $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}$。

利用式(1.1.5)可进行较高阶行列式的计算。

例 1.1.2　计算四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix}3&0&-1&0\\1&1&10&6\\2&3&1&0\\5&6&7&8\end{vmatrix}$。

解　由式(1.1.5)得

$$D_4=(-1)^{1+1}\times3\times\begin{vmatrix}1&10&6\\3&1&0\\6&7&8\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times(-1)\times\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&0\\5&6&8\end{vmatrix}$$

$$=3\times(-142)+(-1)\times(-10)=-416。$$

从这个例子已初步看出:用定义计算行列式，如果达到四阶以上是不现实的，因为计算量太大，既耗时又容易出错，所以需要探讨计算行列式更有效的方法。为了简化行列式的计算，下面给出行列式的性质。

1.1.3　行列式的性质

性质 1.1.1　行列式 D 与其转置行列式 D^T 相等，即 $D=D^T$，这里将行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

中的行与列按对应的顺序互换得到新的行列式

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D^{T} 称为 D 的转置行列式。显然 D 也是 D^{T} 的转置行列式。

例如二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = D^{\mathrm{T}}。$$

对于一般的 n 阶行列式，可以用数学归纳法证明这一性质。

性质 1.1.1 说明在行列式中行与列的地位是相同的，凡是行列式对行成立的性质，对列也成立。譬如 n 阶行列式的定义是按第一行展开，由于行与列的地位一样，所以行列式也可以按第一列展开。

性质 1.1.2　行列式中任意两行(列)互换后，行列式的值改变符号。

证明　用数学归纳法，对二阶行列式结论显然正确。

假设对任意 $n-1$ 阶行列式结论正确。由 n 阶行列式定义的式(1.1.5)可知结论对 n 阶行列式也正确。

推论 1.1.1　若行列式中有两行(列)元素完全相同，则行列式的值等于零。

性质 1.1.3　行列式某一行(列)的所有元素都乘以数 k，等于用数 k 乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或者说，若行列式的某一行(列)中所有元素有公因子，则可将公因子提取到行列式记号外面。由性质 1.1.3 可得以下三个推论：

推论 1.1.2　若行列式中有一行(列)的元素全为零，则行列式的值等于零。

推论 1.1.3　若行列式中有两行(列)的元素成比例，则行列式的值等于零。

性质 1.1.4　若行列式的某一行(列)的元素均可以写成两项之和，则这个行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

性质 1.1.4 的证明只需将 n 阶行列式中的第 i 行与第一行交换，然后按定义展开，比较等式两边是相同的即可。

由性质 1.1.3 及推论 1.1.3、性质 1.1.4 可证得：

性质 1.1.5 若在行列式的某一行(列)元素上加上另一行(列)对应元素的 c 倍，则行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1}+a_{k1} & ca_{i2}+a_{k2} & \cdots & ca_{in}+a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

性质 1.1.6 行列式可以按任意一行(列)展开，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}。$$

性质 1.1.6 也可称为行列式按行(列)展开定理。

性质 1.1.7 行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中任意一行的元素与另一行元素的代数余子式乘积之和为零,即当 $i\neq k$ 时，有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0。$$

这里略去性质 1.1.6、性质 1.1.7 的证明。性质 1.1.6 主要用于行列式的计算，而性质 1.1.7 主要用于一些理论的证明，比如用其证明克莱姆法则等。

习题 1.1

1. 写出下列行列式中 a_{12}，a_{32} 的余子式和代数余子式。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$。 (2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$。

2. 利用行列式按行(列)展开的性质，计算如下行列式。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$。 (2) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 12 & 32 \\ 0 & 0 & 3 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$。

进一步，试猜想如下 n 阶行列式的结果，可能的话对你的猜想给出证明,其中，未写出的元素都是 0，* 位置代表任意数。

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1} & \\ & & & & a_n \end{vmatrix}$。 (4) $\begin{vmatrix} a_1 & * & \cdots & * & * \\ & a_2 & \cdots & * & * \\ & & \ddots & * & * \\ & & & a_{n-1} & * \\ & & & & a_n \end{vmatrix}$。

1.2 行列式的计算

直接应用性质 1.1.6 计算行列式，对高阶行列式而言运算量较大。所以计算行列式时，一般可先用行列式的性质 1.1.5 将行列式中的某一行(列)化为仅含有一个非零元素，再按此行(列)展开，化为低一阶的行列式，如此继续下去直到化为容易计算的三阶或二阶行列式为止。

通常以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列。以 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$)表示交换 i，j 两行(列)。以 kr_i(kc_i)表示第 i 行(列)乘以 k。以 r_i+kr_j(c_i+kc_j)表示在第 i 行(列)加上第 j 行(列)的 k 倍。

注：r、c 分别取自英文 row(行)、column(列)的第一个字母。

例 1.2.1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{vmatrix}$。

解 $$D \xlongequal{r_3-r_1,\ r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & -3 & -3 \\ -4 & -4 & -1 \\ 2 & -6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-4c_3,\ c_2-4c_3} \begin{vmatrix} 5 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -10 & -18 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -10 & -18 \end{vmatrix}=0。$$

例 1.2.2 计算 n 阶上三角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$。

解 $$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

这表明上三角行列式等于主对角线上元素的乘积。同理可证明 n 阶下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即下三角行列式也等于主对角线上元素的乘积。

例 1.2.3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 14 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}。$$

解 利用行列式的性质，把行列式化成上三角行列式

$$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 14 & 4 \\ -2 & 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-2r_1,\ r_3-3r_1,\ r_4+2r_1}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -9 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -9 & -1 \end{vmatrix}$$