丁保荣 主编

本书另配《初中数学竞赛解题手册（八年级）》

初中数学竞赛教程

CHUZHONG SHUXUE JINGSAI JIAOCHENG

八年级

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

本书配《初中数学竞赛解题手册(八年级)》

初中数学竞赛教程

八年级

主　编　丁保荣

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛教程. 八年级/丁保荣主编. —杭州：浙江大学出版社，2009. 4
ISBN 978-7-308-06653-2

Ⅰ. 初… Ⅱ. 丁… Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 036977 号

初中数学竞赛教程(八年级)
丁保荣　主编

责任编辑　许佳颖
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　临安市曙光印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　22. 75
字　　数　481 千
版 印 次　2009 年 4 月第 1 版　2009 年 6 月第 2 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06653-2
定　　价　34. 00 元

前 言

人们希望更好、更快、更强，所以就出现了各种竞技活动，像奥林匹克运动会。数学作为锻炼思维的体操，是一门可以充分展现头脑灵活度的学科，理所当然地被选择用来比试人们思维的创新能力，于是乎出现了数学奥林匹克，即数学竞赛。

由于在激发青少年学习数学兴趣，培养刻苦学习精神促进和提高数学教学水平及在发现科技人才，培养科技后备力量中所发挥的巨大作用，数学竞赛如春阳之草、生机勃发，并取得了令人欣慰的成绩。我国自从参加国际数学奥林匹克以来，每年都取得佳绩，始终保持在前几名。中国选手的优异表现为祖国赢得了巨大荣誉。在国内历届中、小学数学竞赛中涌现出来大批优秀青少年选手，他们大部分在以后的学习、科研和生产中崭露头角，取得了骄人的业绩。

在目前数学竞赛的良好发展氛围下，考虑到广大教师和学生的迫切需要，我们按新课本初中数学教材的进度分七、八、九年级编写了这套《初中数学竞赛教程》。题目精选自国内外竞赛卷，编者是多年从事数学竞赛工作的中学高级教师，所编选的题目无论从时效性、实践性、指导性来说都是很好的。

本套丛书根据初中数学竞赛大纲及各年级课本内容，同步分30讲（九年级29讲）、每讲设【赛点扫描】、【赛题解密】、【赛场演练】三个栏目。【赛点扫描】描述了本讲内容的相关赛点，点拨了命题思路，有利于掌握解题方法；【赛题解密】巧妙应用技法，让赛题全面解密；【赛场演练】跳出常规思路，演练竞赛精题。

为了方便读者自学，我们分年级编写了《解题手册》。《竞赛教程》中【赛场演练】栏目的题目只提供简单答案，而在相应的《解题手册》中提供了详细解答。如果将《解题手册》与《竞赛教程》配套使用，收效一定更佳。

参加本书编写的有：方利生、何星天、金旭颖、朱晓燕、陈志强、王菊清、沈文革、凌任涛、徐善海、董烈佳、张小梅、张喜凤、金友素。

丁保荣

2009年4月

目　录
CONTENTS

第1讲　乘法公式

赛点扫描

乘法公式是在多项式乘法的基础上，将多项式乘法的一般法则应用于一些特殊形式的多项式相乘，得出既有特殊性、又有实用性的具体结论，在复杂的数值计算、代数式的化简求值、代数式的恒等变形、代数等式的证明等方面有着广泛的应用.在学习乘法公式时，应该做到以下几点：

(1) 熟悉每个公式的结构特征，理解掌握公式；

(2) 根据待求式的特点，模仿套用公式；

(3) 全面理解公式中字母，灵活运用公式；

(4) 既能正用、又可逆用，且能适当变形或重新组合，综合运用公式.

赛题解密

例 1　(1)(太原市竞赛题)已知 a、b 满足等式 $x=a^2+b^2+20$，$y=4(2b-a)$，则 x、y 的大小关系是　　(　　)

A. $x\leqslant y$　　B. $x\geqslant y$　　C. $x<y$　　D. $x>y$

(2)(2005年河北省竞赛题)已知 a、b、c 满足 $a^2+2b=7$，$b^2-2c=-1$，$c^2-6a=-17$，则 $a+b+c$ 的值等于　　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【解密】　对于(1)，作差比较 x、y 的大小，解题的关键是逆用完全平方公式，揭示式子的非负性；对于(2)，由条件等式联想到完全平方式，解题的切入点是整体考虑.

【解】(1) B.　$x-y=(a^2+4a+4)+(b^2-8b+16)=(a+2)^2+(b-4)^2\geqslant 0$，$x\geqslant y$.

(2) B.　3个等式相加得：$(a-3)^2+(b+1)^2+(c-1)^2=0$，$a=3$，$b=-1$，$c=1$.

例 2　(全国初中数学竞赛题)已知 $a=1999x+2000$，$b=1999x+2001$，$c=1999x+2002$，则多项式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值为　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解密】　多项式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 具有完全平方式的基本特征，经过变形

可转化为$(a-b)^2$、$(b-c)^2$、$(c-a)^2$的代数和的形式，再结合题设，即可求其值.

【解】 D. $\because a-b=1999x+2000-(1999x+2001)=-1$,

$$b-c=1999x+2001-(1999x+2002)=-1,$$

$$c-a=1999x+2002-(1999x+2000)=2,$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[(-1)^2+(-1)^2+2^2]=3.$$

【探密】 恒等式$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$在解题中经常用到，请注意熟练掌握并灵活运用.

例 3 （江苏省竞赛题）已知正整数a、b、c满足不等式$a^2+b^2+c^2+42<ab+9b+8c$，则a、b、c分别等于________.

【解密】 须将不等式变形为特殊的形式——配成完全平方，方可求出a、b、c的值.

【解】 $a=3,b=6,c=4$. 因为不等式两边都是正整数，故原不等式等价于

$$a^2+b^2+c^2+43\leqslant ab+9b+8c.$$

配方得 $$\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}(b-6)^2+(c-4)^2\leqslant 0.$$

从而只能有 $$a-\frac{1}{2}b=0,\ b-6=0,\ c-4=0,$$

$\therefore a=3,\ b=6,\ c=4.$

【探密】 配方法是解决这类问题的常用方法，也是重要方法.

完全平方公式逆用可得到两个应用广泛的结论：

(1) $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2\geqslant 0$;

(2) $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

结论(1)揭示式子的非负性，可挖掘隐含条件；结论(2)应用于解代数式的最值问题.

例 4 (1)（第19届江苏省竞赛题）在2004、2005、2006、2007这4个数中，不能表示为两个整数平方差的是________.

(2)（重庆市竞赛题）已知$(2000-a)\cdot(1998-a)=1999$，那么，$(2000-a)^2+(1998-a)^2=$________.

【解密】 (1) $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$，$m+n$、$m-n$的奇偶性相同，这是解本例的基础；

(2) 视 $(2000-a)(1998-a)$ 为整体，由平方和想到完全平方公式及其变形.

【解】 (1) 2005.　由奇数或被 4 整除的偶数都能表示成两个整数的平方差可得.

(2) 4002.　由 $(2000-a)^2+(1998-a)^2=[(2000-a)-(1998-a)]^2+2(2000-a)(1998-a)$ 可得.

【探密】 乘法公式的变形和灵活运用可以使一些特殊形式的乘法运算变得较为简便. 你熟悉下面完全平方公式的变形吗？

(1) $$a^2+b^2=(a\pm b)^2\mp 2ab;$$

(2) $$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{(a^2+b^2)-(a-b)^2}{2};$$

(3) $$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a\pm\frac{1}{a}\right)^2\mp 2.$$

例 5 (全国初中数学联赛题)(1) 如果正整数 x、y 满足方程 $x^2-y^2=64$，则这样的正整数对 (x,y) 的个数是________.

(2) 1, 2, 3, …, 98 共 98 个自然数中，能够表示成两个整数的平方差的个数是________.

【解密】 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，$a+b$ 与 $a-b$ 的奇偶性相同，这个十分简单的结论是解本例的基础.

【解】 (1) 2 对.　$(x+y)(x-y)=64$，$x+y>x-y>0$ 且 $x+y$ 与 $x-y$ 的奇偶性相同，得 $\begin{cases}x+y=32,\\x-y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=16,\\x-y=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=17,\\y=15,\end{cases}$ $\begin{cases}x=10,\\y=6.\end{cases}$

(2) 73.　$x=n^2-m^2=(n+m)(n-m)$ ($1\leqslant m\leqslant n\leqslant 98$，$m$，$n$ 为整数)，x 为奇数或是 4 的倍数.

例 6 (第 3 届祖冲之杯竞赛题)计算 $1990^2-1989^2+1988^2-1987^2+\cdots+2^2-1^2$.

【解密】 每项都有平方，相邻两项都可以写成平方差的形式，于是可考虑能否逆用平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

【解】 原式 $=(1990^2-1989^2)+(1988^2-1987^2)+\cdots+(2^2-1^2)$

$$=(1990+1989)(1990-1989)+(1988+1987)(1988-1987)+\cdots+(2+1)(2-1)$$

$=1990+1989+1988+1987+\cdots+2+1$

$=\frac{1}{2}(1990+1)\times1990=\frac{1}{2}\times1991\times1990=1981045.$

例 7 （重庆市竞赛题）计算：

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{1999^2}\right)\left(1-\frac{1}{2000^2}\right).$$

【解密】 本题若直接计算很复杂，因每个括号内都是两个数的平方差，故利用平方差公式可使计算简化.

【解】 原式$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{1999}\right)\times$

$$\left(1+\frac{1}{1999}\right)\left(1-\frac{1}{2000}\right)\left(1+\frac{1}{2000}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{1998}{1999}\times\frac{2000}{1999}\times\frac{1999}{2000}\times\frac{2001}{2000}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2001}{2000}=\frac{2001}{4000}.$$

例 8 (1)（希望杯竞赛题）已知 x、y 满足 $x^2+y^2+\frac{5}{4}=2x+y$，求代数式 $\frac{xy}{x+y}$ 的值；

(2)（希望杯竞赛题）整数 x、y 满足不等式 $x^2+y^2+1\leqslant 2x+2y$，求 $x+y$ 的值.

【解密】 对于两个未知数一个等式或不等式的条件，须运用特殊方法与手段方能求出 x、y 的值，由平方和想到完全平方公式及其逆用，解题的关键是拆项与重组.

【解】 (1) 由已知得 $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0$，得 $x=1$，$y=\frac{1}{2}$，原式 $=\frac{1}{3}$.

(2) 原不等式可化为 $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1$，且 x、y 为整数，$(x-1)^2\geqslant 0$，$(y-1)^2\geqslant 0$，所以可能有的结果是

$$\begin{cases}x-1=0,\\y-1=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-1=\pm1,\\y-1=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-1=0,\\y-1=\pm1,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=0.\end{cases}$

则 $x+y=1$ 或 2 或 3.

【探密】 代数等式的证明有以下两种基本方法：

(1) 由繁到简，从一边推向另一边；

(2) 相向而行，寻找代换的等量.

例　9　(第1届中学生数学智能通讯赛)三位男子 A、B、C 带着他们的妻子 a、b、c 到超市购物，谁是谁的妻子未知，只能从下列条件来推测：他们6人，每人花在买商品的钱数(单位：元)正好等于商品数量的平方；而且每位丈夫都比自己的妻子多花48元钱，又知 A 比 b 多买了9件商品，B 比 a 多买了7件商品. 试问：究竟谁是谁的妻子？

【解密】　设一对夫妻，丈夫买了 x 件商品，妻子买了 y 件商品，于是有 $x^2-y^2=48$，解不定方程，求出 x、y 的值，再由其他条件确定三对夫妻的组合.

【解】　由 $(x+y)(x-y)=48$，及 $x+y>x-y$ 且 $x+y$ 与 $x-y$ 的奇偶性相同，得

$$\begin{cases}x+y=24,\\x-y=2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+y=12,\\x-y=4\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+y=8,\\x-y=6\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=13,\\y=11\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=8,\\y=4\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=7,\\y=1.\end{cases}$$

符合 $x-y=9$ 的只有一种，可知 A 买了13件，b 买了4件；同时符合 $x-y=7$ 的也只有一种，可知 B 买了8件，a 买了1件；所以，C 买了7件，c 买了11件. 由此可知三对夫妻的组合是：A、c；B、b；C、a.

例　10　计算：

(1) (天津市竞赛题) $6(7+1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)+1$；

(2) (江苏省竞赛题) $1.345\times0.345\times2.69-1.345^3-1.345\times0.345^2$.

【解密】　若按常规计算，显然较繁，可用乘法公式简化计算，关键是对待求式恰当变形，使之符合乘法公式的结构特征；对于(2)，由于数字之间有联系，可用字母表示数(称为换元)，将数值计算转化为式的计算，更能反映问题的本质特征.

【解】　原式 $=(7-1)(7+1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)+1=7^{16}$.

(2) 设 $1.345=x$，则原式 $=x(x-1)\cdot2x-x^3-x(x-1)^2=-x=-1.345$.

【探密】　有些问题常常不能直接使用公式，而需要创造条件，使之符合乘法公式的特点. 常见的方法是：分组、结合、拆添项、字母化等.

例　11　(2005年全国初中数学竞赛题)某校举行春季运动会时，由若干名同学组成一个8列的长方形队列，如果原队列中增加120人，就能组成一个正方形队列；如果原队列中减少120人，也能组成一个正方形队列. 问原长方形队列有多少名同学？

【解密】　设原长方形队列有同学 $8x$ 人，由条件知 $8x+120$、$8x-120$ 均为完全平方数，进一步引元代数化，将问题转化为解不定方程组.

【解】　设
$$\begin{cases}8x+120=m^2, & ①\\8x-120=n^2. & ②\end{cases}$$

m、n 均为正整数，且 $m>n$，①－②得

$$(m+n)(m-n)=240=2^4\times3\times5.$$

m^2、n^2 都是 8 的倍数，则 m、n 能被 4 整除，$m+n$、$m-n$ 均能被 4 整除，得

$$\begin{cases}m+n=60,\\ m-n=4,\end{cases}\text{或}\begin{cases}m+n=20,\\ m-n=12.\end{cases}$$

所以 $\begin{cases}m=32,\\ n=28\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=16,\\ n=4.\end{cases}$

$\therefore 8x=m^2-120=904$，或 $8x=m^2-120=136$.

赛场演练

1. （2005 年河南省竞赛题）已知 $(a+b)^2=8$，$(a-b)^2=12$. 则 a^2+b^2 的值为（　　）
   A. 10　　B. 8　　C. 20　　D. 4
2. （2004 年荆州市竞赛题）若 n 满足 $(n-2004)^2+(2005-n)^2=1$，则 $(2005-n)(n-2004)$ 等于（　　）
   A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1
3. （第 15 届希望杯竞赛题）若 a、b 为有理数，且 $2a^2-2ab+b^2+4a+4=0$，则 a^2b+ab^2 等于（　　）
   A. -8　　B. -16　　C. 8　　D. 16
4. （第 1 届中学生数学智能通讯赛）如果一个正整数能表示为两个正整数的平方差，那么这个正整数称为“智慧数”. 根据你的理解，下列 4 个数中不是“智慧数”的是（　　）
   A. 2002　　B. 2003　　C. 2004　　D. 2005
5. （2006 年武汉市竞赛题）若 $x^2-13x+1=0$，则 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 的个位数字是（　　）
   A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7
6. （2004 年河南省竞赛题）已知 $x+y=1$，$x^2+y^2=2$，那么 x^4+y^4 的值是（　　）
   A. 4　　B. 3　　C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{5}{2}$
7. （2005 年武汉市竞赛题）如果 $x+y=1$，$x^2+y^2=3$，那么 x^3+y^3 的值为（　　）
   A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5
8. （重庆市竞赛题）$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\cdots\cdot(2^{2n}+1)$ 的值是（　　）
   A. $4^{2n}-1$　　B. $2^{4n}+1$　　C. $2^{2n}-1$　　D. 2^n-1

9. （祖冲之杯竞赛题）若 x 是不为 0 的有理数，已知 $M=(x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$，$N=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$，则 M 与 N 的大小关系是　　（　　）

A. $M>N$　　B. $M<N$　　C. $M=N$　　D. 无法确定

10. （2004 年北京市竞赛题）如果 $a+2b+3c=12$，且 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，则 $a+b^2+c^3$ 等于　　（　　）

A. 12　　B. 14　　C. 16　　D. 18

11. （第 17 届五羊杯竞赛题）已知 $(x+2)^5=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$，则 $16b+4d+f$ 等于　　（　　）

A. 512　　B. 1024　　C. 2048　　D. 4096

12. （河南省竞赛题）若 $x-y=2$，$x^2+y^2=4$，则 $x^{2002}+y^{2002}$ 的值是　　（　　）

A. 4　　B. 2002^2　　C. 2^{2002}　　D. 4^{2002}

13. （河北省竞赛题）已知四边形四条边的长分别是 m、n、p、q，且满足 $m^2+n^2+p^2+q^2=2mn+2pq$，则这个四边形是　　（　　）

A. 平行四边形　　B. 对角线互相垂直的四边形

C. 平行四边形或对角线互相垂直的四边形　　D. 对角线相等的四边形

14. （第 16 届希望杯竞赛题）已知 $x=\dfrac{a+b}{a-b}$，$y=\dfrac{a-b}{a+b}(a\neq\pm b)$，且 $19x^2+143xy+19y^2=2005$，则 $x+y=$________.

15. （广西竞赛题）已知 $(x+y)^2-2x-2y+1=0$，则 $(x+y)^{999}=$________.

16. （2004 年河北省竞赛题）已知 $ax+by=3$，$ay-bx=5$，则 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ 的值为________.

17. （希望杯竞赛题）已知 $a=1999$，$b=1$，则 $a^2+2b^2+3ab=$________.

18. （上海市竞赛题）已知 a、b、c 满足 $a+b+c=0$，$a^2+b^2+c^2=0.1$，则 $a^4+b^4+c^4$ 的值是________.

19. （河北省竞赛题）已知实数 a 满足 $a^2-a-1=0$，则 a^8+7a^{-4} 的值为________.

20. （2002 年上海市竞赛题）已知 $A=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)\times(2^{64}+1)$，那么，$A$ 的个位数是________.

21. （第 18 届五羊杯竞赛题）设 $(2x^2-x-1)^5=a_{10}x^{10}+a_9x^9+a_8x^8+\cdots+a_1x+a_0$，则 $a_9+a_7+a_5+a_3+a_1=$________.

22. （北京市竞赛题）计算：$\dfrac{20042003^2+1}{20042002^2+20042004^2}$.

23.（上海市初中数学竞赛题）设 $a+b+2c=1$，$a^2+b^2-8c^2+6c=5$，求 $ab-bc-ca$ 的值.

24.（上海市竞赛题）设 $a-b=-2$，求 $\frac{a^2+b^2}{2}-ab$ 的值.

25.（河北省竞赛题）已知 a 满足等式 $a^2-a-1=0$，求代数式 a^8+7a^{-4} 的值.

26.（湖南省理科实验班招生试题）设正有理数 a、b、c 满足条件：$a+b+c\leqslant 4$ 且 $ab+bc+ca\geqslant 4$. 试证明：下面的三个不等式中至少有两个成立：$|a-b|\leqslant 2$；$|c-a|\leqslant 2$；$|b-c|\leqslant 2$.

27.（2005 年天津市竞赛题）如图 1－1 所示，正方体的每一个面上都有一个正整数，已知相对的两个面上两数之和都相等，13、9、3 的对面的数分别为 a、b、c，求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ 的值.

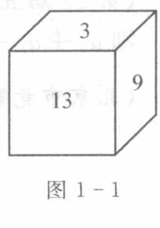

图 1－1

28. (北京市竞赛题)计算 $1949^2-1950^2+1951^2-1952^2+\cdots+1997^2-1998^2+1999^2$ 的值.

29. (北京市竞赛题)若 $x+y=a+b$,且 $x^2+y^2=a^2+b^2$,求证:$x^{1997}+y^{1997}=a^{1997}+b^{1997}$.

30. (西安市竞赛题)设 $a+b=1$,$a^2+b^2=2$,求 a^7+b^7 的值.

31. (全国初中数学联赛题)已知 $\frac{1}{4}(b-c)^2=(a-b)(c-a)$,且 $a\neq 0$,求$\frac{b+c}{a}$的值.

第 2 讲　因式分解

赛点扫描

把一个多项式化为几个整式的乘积形式，叫做因式分解，也叫分解因式.

因式分解的基本方法有：

(1) 提公因式法. 利用 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$ 把多项式中每一项的公因式提出来.

(2) 运用公式法. 如运用公式

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2;$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);$$

$$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3.$$

(3) 分组分解法. 先对多项式适当分组，再分别变形，然后利用提公因式法或运用公式法分解因式.

(4) 十字相乘法. 对二次三项式的系数进行分解，借助十字交叉图分解，即：

$$ax^2+bx+c=(mx+r)(nx+s),$$

其中 $mn=a$，$rs=c$，$ms+nr=b$，交叉图如右.

$$\begin{array}{ccc} m & & r \\ & \times & \\ n & & s \\ \hline & ms+nr & \end{array}$$

把一个多项式因式分解，如果多项式的各项有公因式，就先提取公因式，公因式可以是数、单项式，也可以是多项式；如果各项没有公因式，再看能否直接运用公式或用十字相乘法分解，如果还不能分解，就试用分组分解法或其他方法. 分解因式时，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止，结果一定是乘积的形式，每个因式都是整式，相同因式的积要写成幂的形式.

赛题解密

例 1　(上海市竞赛题)多项式 $x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$ 因式分解后的结果是　　(　　)

A. $(y-z)(x+y)(x-z)$　　B. $(y-z)(x-y)(x+z)$

C. $(y+z)(x-y)(x+z)$　　D. $(y+z)(x+y)(x-z)$

【解密】 原式是一个复杂的三元二次多项式，直接分解有一定困难，把原式整理成关于某个字母按降幂排列的多项式，改变其结构，寻找分解的突破口.

【解】 A. 将原式重新整理成关于 x 的二次三项式，则

$$\begin{aligned}原式 &= (y-z)x^2+(y^2-2yz+z^2)x-(zy^2-z^2y)\\ &=(y-z)[x^2+(y-z)x-yz]\\ &=(y-z)(x+y)(x-z).\end{aligned}$$

例 2 （重庆市竞赛题）分解因式：$4x^2-4x-y^2+4y-3$.

【解密】 这是一个二次五项式，显然没有公因式可以提取，这就要用其他因式分解法. 经观察可用分组分解法.

【解】

$$\begin{aligned}&4x^2-4x-y^2+4y-3\\ =&(4x^2-4x+1)-(y^2-4y+4)\\ =&(2x-1)^2-(y-2)^2\\ =&(2x+y-3)(2x-y+1).\end{aligned}$$

【探密】 运用分组分解法时要明确分组的目的，即分组后能分解因式.

分组分解法是解较复杂因式分解问题的基本手段，体现了化整体为局部又统揽全局的思想. 恰当分组是解题的关键，基本策略是：① 按系数分组；② 按次数分组；③ 按字母分组.

例 3 （第 12 届五羊杯竞赛题）分解因式：$(x^4+x^2-4)(x^4+x^2+3)+10$.

【解密】 视 x^4+x^2 为一个整体，用一个新字母代替，从而能简化式子的结构.

【解】 设 $x^4+x^2=y$，则

$$\begin{aligned}原式 &= (y-4)(y+3)+10\\ &=y^2-y-2\\ &=(y-2)(y+1)\\ &=(x^4+x^2-2)(x^4+x^2+1)\\ &=(x^2+2)(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1).\end{aligned}$$

例 4 （第 14 届五羊杯竞赛题）分解因式：$(2x-3y)^3+(3x-2y)^3-125(x-y)^3$.

【解密】 从公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 入手，若能发现前两项与后一项的