中等农业学校教科书

农牧科各专业适用

数学

SHUXUE

上册

中等农业学校数学教科书編輯委員会編

人民教育出版社

序

自从1959年党的八届八中全会发出了反右傾、鼓干劲、深入开展增产节約的群众运动的号召以来，在工农业战綫上不断地出現了跃进再跃进的高潮，技术革新和技术革命的群众运动亦普遍展开。随着国民經济的这一飞跃发展形势，教育事业也开展了群众性的教学改革。这样中等农业学校的教学課程內容已不能适应客观形势的要求，为此，中华人民共和国农业部組織了部分教师，从事数学教科书的修訂工作。

本书的編写，是以毛澤东思想为指导，具体貫徹了党的教育为无产阶級政治服务、教育与生产劳动相結合的方針。針对原教材的体系陈旧落后、孤立割裂，內容貧乏脫离实际、重复繁瑣，本书作了如下的修訂：

(1)精簡和删去了陈旧落后、脫离实际以及繁难而用处不大的內容，取消了欧几里得的几何体系。

(2)增加了解析几何、排列組合、概率論等現代数学的基础知識；加强了計算工具的使用和計算能力的培养；增补了作空間图形的內容。

(3)教材內容密切联系生产实际，特别是农牧业生产实际。反映了我国工农业生产不断跃进的形势，編写了联系实际的例題和习題，增加了实习作业。

(4)取消了旧的分科，把整个內容以函数为統帅建立一个新的理論体系，尽量做到数与形的結合，概念与計算的結合，更好地貫徹以辯証唯物主义观点来教育学生的原则。

全书共分十六章，学习时間包括复习时間在內計共216教时，

适用于农牧科的各专业，学习对象应具有初中毕业水平。

目前全国都在进行教学改革，部分地区的初中毕业生可能已学完本书中的部分内容，在使用时可按照具体情况增授有关数理統計、綫性規划等現代数学的基础知識。

在本书的編写过程中，南京师范学院、南京农学院和很多兄弟学校曾給于热情的帮助和支持，对此，謹致謝忱。

教学体系的大革命正在开展，有些問題尚在爭辯，加以編者的水平有限，对教材处理不当之处在所难免，希讀者及时指正，以便修訂。

編者

一九六〇年五月

上冊目录

第一章　幂和方根

一、 整指数幂

在初中代数里，我們已經学过关于幂的一些性质和运算法則。那时所研究的幂，指数都是正整数，現在我們要在它的基础上建立更广义的幂的概念，因此，首先把正整指数幂复习一下。

§1　正整指数幂　求相同因子的乘积的运算叫做乘方，乘方所得的結果叫做幂。例如：

$$(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)=(-2)^5=-32,$$

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots\cdots a}_{n\text{个}}=a^n.$$

a^n 就是 a 的 n 次幂，a 叫幂的底数，n 叫幂的指数，它可以是任何正整数。

幂有下列的一些性质：

1. 正数的任何次幂，仍是一个正数。

2. 負数的偶次幂是一个正数，奇次幂是一个負数。例如：

$$(-3)^4=(-3)(-3)(-3)(-3)=81;$$

$$(-3)^6=(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)=72$$

一般的：

$$(-a)^{2n}=\underbrace{(-a)(-a)(-a)\cdots\cdots(-a)}_{\text{共}2n\text{个}}=a^{2n}.$$

又如：

$$(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8,$$

$$(-2)^5=(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)=-32;$$

一般的：

$$(-a)^{2n-1}=(-a)(-a)(-a)\cdots\cdots(-a)=-a^{2n-1}(a>0).$$

3. 零的任何次幂还是零。

幂是根据下面的法则进行运算的:

1. 同底数的幂相乘，是把各个因子的幂指数相加，幂底数不变。用式子表示就是:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

2. 同底数的幂相除，是把被除数的幂指数和除数的幂指数相减,幂底数不变。

(1)如果被除式的幂指数大于除式的幂指数，所得的商是整式，指数等于被除式的幂指数减去除式的幂指数。用式子表示就是:

$$a^m\div a^n=a^{m-n}.\quad(m>n)$$

(2)如果被除式的幂指数等于除式的幂指数，所得的商就是1。

(3)如果被除式的幂指数小于除式的幂指数,所得的商是一个分式，分子是1，分母是同底数的幂，指数等于除式的幂指数减去被除式的幂指数。用式子表示就是:

$(0<a)$

$$a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}.\quad(m<n)$$

3. 幂的乘方,是把幂指数乘上乘方的次数,幂底数不变。用式子表示就是:

$$(a^m)^n=-a^{mn}.$$

4. 积乘方时,是把各因子乘方后再相乘。用式子表示就是:

$$(a\cdot b\cdot c\cdots\cdots)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n\cdots\cdots.$$

5. 分式的乘方,是把分子和分母分别乘方,再用分母的幂去除分子的幂。用式子表示就是:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.\quad(b\neq 0)$$

C. 单项式的乘方要根据上面的法則 3、4 和 5 来进行。例如:

$$\left(\frac{3}{4}a^mb^n\right)^P=\left(\frac{3}{4}\right)^P\cdot(a^m)^P\cdot(b^n)^P=\frac{3^P}{4^P}a^{mP}b^{nP}.$$

下面是幂的运算的例:

例 1: 計算 $\left(\frac{b^3}{a^2}\cdot\frac{b^5}{a^4}\right)^2\div\left(\frac{b^4}{a^5}\right)^3$.

解: $$\left(\frac{b^3}{a^2}\cdot\frac{b^5}{a^4}\right)^2\div\left(\frac{b^4}{a^5}\right)^3=\left(\frac{b^8}{a^6}\right)^2\div\left(\frac{b^4}{a^5}\right)^3$$

$$=\frac{b^{16}}{a^{12}}\div\frac{b^{12}}{a^{15}}=\frac{b^{16}}{a^{12}}\times\frac{a^{15}}{b^{12}}=a^3b^4.$$

例 2: 計算 $\left(\frac{ax^3}{b^2y^2}\right)^2\times(-2ab^2xy^3)^3$.

解: $$\left(\frac{ax^3}{b^2y^2}\right)^2\times(-2ab^2xy^3)^3=\frac{a^2x^6}{b^4y^4}\times(-8a^3b^6x^3y^9)$$

$$=-8a^5b^2x^9y^5.$$

§2 零指数幂和負整指数幂 在正整指数幂的运算法則里，同底数幂的除法法則是:

1. 若 $m>n$, 則 $a^m\div a^n=a^{m-n}$;
2. 若 $m=n$, 則 $a^m\div a^n=1$;
3. 若 $m<n$, 則 $a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}$.

这些法則, 对 a 为不等于零的任何数都能适用。

如果当 $m=n$ 的时候, 我們仍按照法則 1 运算, 那末就得

$$a^m\div a^n=a^{m-n}=a^0.$$

a^0 是一个指数为零的幂, 叫做**零指数幂**。

如果当 $m<n$ 的时候, 我們也照法則 1 运算, 那末就得

$$a^m\div a^n=a^{m-n}=a^{-(n-m)}.\quad[(n-m)>0]$$

这时, $a^{-(n-m)}$的幂指数是一个負整数, 叫做**負整指数幂**。例如:

$$a^2 \div a^5 = a^{2-5} = a^{-3};\quad a^4 \div a^{10} = a^{4-10} = a^{-6}.$$

a 的零指数幂和負整指数幂是不能用正整指数幂的意义来解釋的，因为零个 a 相乘或負 n 个 a 相乘都是沒有意义的。可是如果我們把它們分別看成是按法則 2、法則 3 运算的結果的另一种表現形式，那末就能把三种运算法則融合在一个法則里，因而簡化了运算法則。

为了便于运算，我們作出下面的規定：

1. 不等于零的任何数的零次幂，都等于 1。用式子表示就是

$$a^0 = 1.\quad (a \neq 0)$$

例如：
$$5^0 = 1;\quad (-6)^0 = 1;\quad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1.$$

2. 指数为負整数的幂，等于用負整指数的絕对值为指数的正整指幂的倒数。用式子来表示就是

$$a^{-s} = \frac{1}{a^s}.\quad (a \neq 0,\ s > 0)$$

例如：

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001;\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = 81;$$

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}.$$

从負整指数幂的意义，我們可以知道，負整指数幂可以写成分式，反过来，分式也可以写成負整指数幂。

例如：
$$2^{-1}a^{-3}b^{-2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^2} = \frac{1}{2a^3b^2};$$

$$\frac{a}{xy^2} = a\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y^2} = ax^{-1}y^{-2}.$$

§3 零指数幂和負整指数幂的运算 現在我們来說明零指数幂和負整指数幂应該怎样运算。首先我們通过例子来說明零指

数幂和負整指数幂对于正整指数幂的一切运算法則，仍旧适用。

例如：我們来説明当 $m=-s, n=-P$（s、P 是正整数）的时候，运算法則 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 仍旧适用。

首先把負整指数幂，根据它的意义，改写成正整指数幂的形式进行运算。

$$\because \quad a^{-s}=\frac{1}{a^s},\ a^{-P}=\frac{1}{a^P};$$

$$\therefore \quad a^{-s}\cdot a^{-P}=\frac{1}{a^s}\cdot\frac{1}{a^P}=\frac{1}{a^s\cdot a^P}=\frac{1}{a^{s+P}}.$$

其次，把負整指数幂直接应用运算法則来运算，就得：

$$a^{-s}\cdot a^{-P}=a^{-(s+P)}=\frac{1}{a^{s+P}}.$$

結果完全相同。

因此，运算法則 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 也适用于負整指数幂。

用同样的方法，可以証明正整指数幂的一切运算法則，都适用于零指数幂和負整指数幂。

下面是零指数幂和負整指数幂的运算的例。

例 1: 計算 $(5a^{-2}b^3c^{-3})(0.8ab^{-3}c^4)$。

解: $(5a^{-2}b^3c^{-3})(0.8ab^{-3}c^4)=4a^{(-2+1)}b^{(3-3)}c^{(-3+4)}$

$$=4a^{-1}b^0c^1=4a^{-1}c.$$

例 2: 計算 $5x^{-1}y^2z^{-3}\div 25x^2y^{-2}z^{-3}$。

解: $5x^{-1}y^2z^{-3}\div 25x^2y^{-2}z^{-3}$

$$=\frac{1}{5}x^{-1-2}y^{2-(-2)}z^{-3-(-3)}$$

$$=\frac{1}{5}x^{-3}y^4.$$

例 3: 計算 $(2a^2x^{-3})^{-2}$。

解: $(2a^2x^{-3})^{-2}=2^{-2}a^{2(-2)}x^{(-3)(-2)}$

$$=2^{-2}a^{-4}x^{6}.$$

例 4: 計算 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\div\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$.

解: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\div\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$

$$=(2\times3^{-1})^{-3}\times(-2^{-1})^{-2}\div1$$

$$=2^{-3}\times3^{3}\times2^{2}=\frac{1}{8}\times29\times4=\frac{27}{2}=13\frac{1}{2}.$$

例 5: 計算 $(a^{-2}+b^{-3})(a^{-2}-b^{-3})$。

解: $(a^{-2}+b^{-3})(a^{-2}-b^{-3})$

$$=(a^{-2})^{2}-(b^{-3})^{2}=a^{-4}-b^{-6}.$$

例 6: 計算 $(x^{-2}-y^{-1})^{2}$。

解: $(x^{-2}-y^{-1})^{2}$

$$=(x^{-2})^{2}-2(x^{-2})(y^{-1})+(y^{-1})^{2}$$

$$=x^{-4}-2x^{-2}y^{-1}+y^{-2}.$$

习 題 一

1. 計算:

(1) $(-3)^{3}$; (2) $(-3)^{4}$; (3) $(-0.2)^{3}$;

(4) $(-0.1)^{4}$; (5) $(-1)^{2m}$; (6) $(-1)^{2n+1}$;

(7) $a^{2n}+(-a)^{2n}$; (8) $x^{2n+1}+(-x)^{2n+1}$.

2. 求下列各式的結果:

(1) $(-a)^{4}\cdot(-a)^{3}\cdot(-a)$; (2) $(-x)^{9}\div x^{7}$;

(3) $[(-b)^{3}]^{2}$; (4) $\left(-\frac{2}{3}a_{2}x^{5}\right)^{3}$;

(5) $\left(\frac{a^{3}b^{4}c}{mp^{3}}\right)\div\left(\frac{a^{5}b^{8}c^{2}}{m^{2}p^{5}}\right)^{3}$; (6) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}$.

3. 計算下列各式:

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+(\sqrt{3})^{0}$; (2) $(-1)^{0}-2^{-3}$;

(3) $2\times4^{-1}\times3^{-2}$;　　(4) $3^{-3}\div\left(-\frac{1}{3}\right)^0$;

(5) $(5^0)^{-3}\div2^{-1}$;　　(6) $(\sqrt{115})^0\times5^{-2}\div\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^0\right]^{-2}$

4. 計算下列各式:

(1) $a^{-2}\cdot a^0b^{-1}\cdot b^{-3}\cdot c^0$;　　(2) $\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{a}\cdot x^{-5}\cdot a^{-3}$;

(3) $m^{-2}n^{-4}b^{-1}\div m^{-3}n^{-2}b^{-1}$;　　(4) $(x^{-3})^{-5}\div x^{-10}$;

(5) $\left(3^{-2}\frac{1}{a}\cdot b^{-3}c^0\right)^{-5}$;　　(6) $[(a+b)^{-1}]^{-3}\cdot(a+b)^{-2}$;

(7) $\frac{m^3+n^{-3}}{m+n^{-1}}-(m-n^{-1})^2$.

二、方根和分指数幂

§4 方根的意义 我們巳經知道,如果一个数的平方等于 a,这个数就叫做 a 的平方根。同样我們可以从正整指数幂的意义来建立方根的一般概念。

如果一个数 x 的 n 次幂等于 a, 即 $x^n=a$, 那末数 x 就叫做 a 的 n 次方根。a 的 n 次方根是用 $\sqrt[n]{a}$ 来表示的, a 叫根底数, n 叫根指数, $\sqrt{}$ 叫根号。

例如:

因为 $(+5)^2=25$, 所以 $+5$ 是 25 的 2 次方根, 也就是 25 的平方根, 記作 $\sqrt{25}=5$。

因为 $(-5)^2=25$, 所以 -5 也是 25 的平方根, 記作 $\sqrt{25}=-5$;

因为 $3^3=27$, 所以 3 是 27 的 3 次方根, 記作 $\sqrt[3]{27}=3$;

因为 $(-3)^3=-27$, 所以 -3 是 -27 的 3 次方根, 即 $\sqrt[3]{-27}=-3$;

因为 $2^4=16$, 所以 2 是 16 的 4 次方根, 即 $\sqrt[4]{16}=4$。

a 的三次方根也叫 a 的立方根。

求 a 的 n 次方根的运算叫开 n 次方。开三次方也叫开立方。

从方根的意义可以得出:

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

这就說明,开方与乘方是互逆的运算。因此,我們可以利用乘方来檢驗开方的結果是否正确。例如,要檢驗 -64 的立方根是不是 -4,只要看 -4 的立方是不是 -64 就可以了。

§5　方根的性質　現在我們根据根指数是奇数还是偶数来研究方根的性質。

1. 奇次方根　因为正数的奇次幂永远是正数、負数的奇次幂永远是負数，而且不同的正数或負数，它們的同一奇次幂都不相同；所以正数的奇次方根必須是正数，負数的奇次方根必須是負数,而且它們的任一奇次方根都只能有一个。

例如:

$$\because\quad 8=2\times2\times2,\quad\therefore\quad \sqrt[3]{8}=2;$$

$$\because\quad -8=(-2)\times(-2)\times(-2),\quad\therefore\quad \sqrt[3]{-8}=-2;$$

$$\because\quad 243=3\times3\times3\times3\times3,\quad\therefore\quad \sqrt[5]{243}=3;$$

$$\because\quad -243=(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3),$$

$$\therefore\quad \sqrt[5]{-243}=-3.$$

2. 偶次方根　因为絕对值相同的正数和負数，它們的同一偶次幂都是正数,而且相等; 所以正数的任一偶次方根都有两个，它們是两个相反的数。

例如:

$$\because\quad 16=2\times2\times2\times2=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2),$$

$$\therefore\quad \sqrt[4]{16}=\pm2.$$

因为任何正数或負数的偶次幂都不能得到一个負数，所以負数的偶次方根不能是任何正数或負数。

3. 零的任何次幂总是零,所以零的任何次方根还是零。

§6 算术根 由于正数的任一偶次方根总有两个，因而在計算上就不能得到唯一确定的結果。例如，$\sqrt{9}+\sqrt{4}$ 的值可以有四种結果，即：

$$\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5,\ \sqrt{9}+\sqrt{4}=3+(-2)=1,$$
$$\sqrt{9}+\sqrt{4}=-3+2=-1,\ \sqrt{9}+\sqrt{4}=-3+(-2)=$$
$$=-5。$$

为求运算上的統一，我們有必要引入算术根的概念。

正数的正方根，叫做算术根。

例如：$+3$ 和 -3 都是 9 的平方根，而 $+3$ 是 9 开平方所得的算术根。同样 16 开四次方时，它的算术根是 2；125 开立方所得的算术根是 5。

虽然算术根的函义不包括負数的开方，但由于負数的奇次方根的絕对值和与它相反的正数的同一奇次方根相等，所以它的奇次方根总可以用与它相反的正数的算术根来表示的，所以負数的奇次方根可以用与它对应的算术根表示。例如：

$$\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2,\ \sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5.$$

一般地，如 $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}\ (a>0)$

本书以后所講的方根，都是指算术根而言的。

§7 正有理数的算术根 我們已經知道，一切正負数（整数或者分数）和零統称为有理数。一切有理数在进行四则运算或者乘方的时候，所得的結果还是一个有理数，但是一个正有理数的算术根，就不一定是有理数。例如，可以証明，$\sqrt{2}$ 的算术根就不是一个有理数。

要証明 $\sqrt{2}$ 不能是有理数，只要証明沒有一个正有理数的平方等于 2 就可以了。

因为任何正有理数都可写成 $\frac{m}{n}$ 的形式，这里 m 和 n 是互質的