21世纪高等院校教材

数学基础教程系列

数学分析（一）

刘名生 冯伟贞 韩彦昌 编

科学出版社

www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

数学基础教程系列

数学分析(一)

刘名生　冯伟贞　韩彦昌　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了数学分析的基本概念、基本理论和方法，包括一元(多元)函数极限理论、一元函数微积分学、级数理论和多元函数微积分学等. 全书共分三册. 本册内容包括实数与数列极限、函数与函数极限、函数的连续性、微分与导数、导数的应用、实数集的稠密性与完备性. 本书在内容的安排上深入浅出，表达清楚，系统性和逻辑性强. 书中列举了大量例题来说明数学分析的定义、定理及方法，并提供了丰富的思考题和习题，便于教师教学与学生自学. 每章末都有小结，并配有复习题，对该章的主要内容作了归纳和总结，方便学生系统复习.

本书可作为高等师范院校数学各专业学生的教学用书，也可供相关专业的教师和科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(一) / 刘名生，冯伟贞，韩彦昌编. —北京：科学出版社，2009

(21 世纪高等院校教材 · 数学基础教程系列)

ISBN 978-7-03-024794-0

I. 数… II. ①刘… ②冯… ③韩… III. 数学分析-高等学校-教材 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 099289 号

责任编辑：姚莉丽　房　阳 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 6 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2009 年 6 月第一次印刷　印张：14 1/4
印数：1—3 500　字数：261 000

定价：23.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

前　言

数学分析是数学各专业的学科基础课, 其重要性不言而喻. 我们根据多年的教学经验, 在吸取一些现有教材优点的基础上, 编写了本教材.

现有的各种数学分析教材都有其优点和缺点. 本教材力求在可读性、系统性和逻辑性上能具有特色, 并将分层教学的理念贯穿全书. 首先, 在可读性方面, 对于重要概念只给一种定义形式，其他的等价定义一般放在思考题或习题中. 例如, 对数列极限, 本书只引入了 ε-N 定义, 目的是希望学生能吃透这个概念; 数列极限的另一个等价定义放在习题中, 方便基础较好的学生学习. 对定理的证明, 尽量用朴素的方法证明. 对书中的例题, 表达尽量详细, 让学生容易自学. 对某些定理采取先用后证的方法讲述. 例如, 在第 7 章, 先给出区间上的连续函数必定存在原函数这个结论, 这样就可以介绍求不定积分的各种方法; 在第 8 章, 先给出闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数必定在 $[a,b]$ 上可积这个结论, 这样可以使定积分的计算提前, 然后在第 8 章后面再证明这两个存在性定理.

其次, 在系统性方面, 将关系较密切的内容放在一起. 例如, 将发散数列和子列的概念放在同一节, 将判别数列收敛的各种方法放在同一节, 将定积分的应用与反常积分放在同一章, 将各种情况下的 Fourier 级数和 Fourier 级数展开放在同一节, 将第一型曲线积分、曲面积分和第二型曲线积分、曲面积分放在同一章, 将各种积分之间的关系放在同一章等. 另外, 有理函数分解为部分分式的理论, 国内的数学分析教材几乎都将其证明归到高等代数课程中, 而高等代数教材也不写这部分内容. 为了弥补这一缺陷, 在《数学分析 (二)》的第 7 章中, 将给出有理函数分解为部分分式理论的详细证明, 方便教师教学与学生自学.

再次, 在逻辑性方面, 考虑到可读性的同时, 尽量在给出定理的同时也完成对定理的证明. 例如, 将致密性定理放在第 1 章, 这样数列的柯西收敛准则在第 1 章就可以证明, 使得第 1 章对数列有较完整的处理; 然后在第 3 章就可以完成闭区间上连续函数性质的证明; 第 6 章就只需讲区间套定理、有限覆盖定理及其应用等, 这样难点也分散了. 在导数与微分部分, 先讲微分, 后讲导数, 强调微分的作用, 这样在后面讲定积分的微元法时, 我们将给出微元法的理论依据.

考虑到不同教学基础的学校和不同层次的学生在教与学方面有不同的需求, 我

们在较充分顾及系统的完整性的基础上, 通过小 5 号字和"*"标记本书中的选学内容. 对选学内容的处理可以很灵活, 如第 1 章中致密性定理内容可以留到第 6 章处理或只作简要介绍.

本教材分三册出版.《数学分析 (一)》讲述一元函数极限理论和一元函数微分学, 它的内容包括: 数列极限与确界原理、函数的概念及其性质、函数极限与连续性、函数的导数与微分、微分中值定理及其应用、函数的极值和凸性及作图、实数集的稠密性与完备性.《数学分析 (二)》讲述一元函数积分学和级数理论, 它的内容包括: 不定积分和定积分、定积分的应用与反常积分、数项级数、函数项级数、幂级数和 Fourier 级数.《数学分析 (三)》讲述多元函数极限论和多元函数微积分学, 它的内容包括: 多元函数极限与连续性、多元函数微分学、隐函数理论、多元函数积分学.

《数学分析 (一)》的初稿由刘名生教授、冯伟贞副教授和韩彦昌副教授编写,《数学分析 (二)》的初稿由徐志庭教授、刘名生教授和冯伟贞副教授编写,《数学分析 (三)》的初稿由耿堤教授、易法槐教授和丁时进教授编写. 初稿完成后, 编写组全体成员多次仔细讨论、评阅和修改. 全书由刘名生教授和冯伟贞副教授负责编写组织工作.

林伟教授和朱玉灿教授审阅了本书并提出许多宝贵意见, 陈奇斌老师绘制了本册书的所有插图, 在此对他们表示衷心感谢.

本书在编写过程中得到华南师范大学数学科学学院许多同事的支持, 并得到广东省名牌专业建设专项经费、国家特色专业建设点专项经费及 2008 年度华南师范大学校级教改项目的资助. 我们在华南师范大学数学科学学院 08 级师范班的数学分析课程中试用了本教材, 08 级师范班的学生为本书的完善提供了许多宝贵意见, 在此一并致谢.

作为新教材, 书中的疏漏和不足在所难免, 敬请读者批评指正.

编　者

2008 年 12 月

华南师范大学

使 用 说 明

1. 本教材应用分层教学思想编写, 对较难内容, 使用小 5 号字或用“*”号标注, 教师可根据不同层次的班级选讲部分小 5 号字或标“*”号的内容.

2. 讲授本书的建议最少教学学时是 78 学时; 最多教学学时是 90 学时. 具体地说, 第 1 章: 17~18 学时; 第 2 章: 17~18 学时; 第 3 章: 8~10 学时; 第 4 章: 14~16 学时; 第 5 章: 18~20 学时; 第 6 章: 4~8 学时.

3. 为了解决“数学分析”与“中学数学”之间的衔接问题, 在部分章前编有预备知识, 书后编有附录, 这些内容教师可视情况讲一部分, 其余供学生自己阅读.

4. 习题分三级配置:

第一级为思考题, 每节都有, 目的是为了让学生通过自己做思考题理解所学的概念和定理及方法;

第二级为作业题, 即每节后面的习题, 供老师布置作业用, 要求学生全部完成;

第三级为扩展题, 放在每章后面的复习题中, 中间用一条横线分为两部分, 横线上的题供学生复习使用, 横线下的题较难, 供学有余力的学生复习使用.

5. 每章末配有小结, 总结该章所学的知识点、概念和方法等, 方便学生复习.

目　录

第 1 章　实数与数列极限

1.0 预备知识

1.0.1 一些常用的记号

(1) $\forall$ 表示“对任意给定的”;

(2) $\exists$ 表示“存在”或“存在一个”;

(3) $\exists!$ 表示“存在唯一一个”;

(4) $\Leftrightarrow$ 表示“等价于”;

(5) 符号 $\leqslant$ 表示“小于或等于”, 即 $a \leqslant b$ 表示“$a < b$ 或者 $a = b$”; 也就是, 只要 $a < b$ 与 $a = b$ 两个式子中有一个成立, 就有 $a \leqslant b$ 成立. 例如,

$$\text{若 } x < 3, \text{ 则 } x \leqslant 3; \quad \text{若 } x = 3, \text{ 则也有 } x \leqslant 3 \text{ 等.}$$

但是, 其逆命题一般不成立, 即由 $x \leqslant 3$ 不能推出 $x < 3$, 必须确定 $x \neq 3$, 才能推出 $x < 3$; 当然 $3 \leqslant 3$ 可以写为 $3 = 3$, 因为这是确定的事实.

类似地, $\geqslant$ 表示“大于或等于”.

1.0.2 逻辑命题的否命题

如果命题 A 可以表示为: 若 p 成立, 则 q 成立. 那么命题 A 的否命题就是: 若 p 不成立, 则 q 不成立.

例 1　已知 $y = f(x)$ 在区间 $(-a, a)\,(a > 0)$ 内恒等于零的定义是: $\forall x \in (-a, a)$, 总有 $f(x) = 0$, 记作 $f(x) \equiv 0, x \in (-a, a)$. 试写出 $y = f(x)$ 在区间 $(-a, a)$ 内不恒等于零 (记作 $f(x) \not\equiv 0, x \in (-a, a)$) 的定义.

解　由于 $y = f(x)$ 在区间 $(-a, a)$ 内恒等于零 $f(x) \equiv 0$ 的定义是命题:

$$\forall x \in (-a, a), \text{总有 } f(x) = 0;$$

其否命题是: $\exists x_0 \in (-a, a)$, 使得 $f(x_0) \neq 0$. 所以 $y = f(x)$ 在区间 $(-a, a)$ 内不恒等于零 $f(x) \not\equiv 0$ 的定义是: $\exists x_0 \in (-a, a)$, 使得 $f(x_0) \neq 0$. □

例 2　已知 $y = f(x)$ 为区间 I 上增函数的定义是: $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2$, 总有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, 试写出 $y = f(x)$ 在区间 I 上不是增函数的定义.

解　由于 $y = f(x)$ 是区间 I 上的增函数的定义是命题:

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2, \text{总有 } f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

其否命题是：$\exists x_1', x_2' \in I: x_1' < x_2'$, 使得 $f(x_1') > f(x_2')$. 所以 $y = f(x)$ 不是区间 I 上的增函数的定义是：$\exists x_1', x_2' \in I: x_1' < x_2'$, 使得 $f(x_1') > f(x_2')$. □

1.0.3　特殊的数集

本书所讨论的数都是实数, 全体实数所成集合称为实数系或实数集, 记作 $\mathbb{R}$. 自然数全体所成集合用 $\mathbb{N}$ 表示, 即 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$; 正整数全体所成集合用 $\mathbb{N}_+$ 表示, 即 $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \cdots\} = \mathbb{N}\backslash\{0\}$; 整数全体所成集合用 $\mathbb{Z}$ 表示; 有理数全体所成集合用 $\mathbb{Q}$ 表示; 无理数全体所成集合可用 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 表示.

1. 区间

设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$. 开区间 (a, b), 闭区间 $[a, b]$, 半开半闭区间 $(a, b]$ 与 $[a, b)$ 是指如下数集:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\}, \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\}.$$

它们统称为**有限区间**, 它们的端点都是 a, b, 也可以用 $\langle a, b\rangle$ 来泛指上述四种区间. 端点中含有 $-\infty$ 或 $+\infty$ 的区间, 称为**无限区间**. 无限区间有如下五种:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\},$$
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant a\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant b\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\},$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

2. 邻域

设 a 是一个实数, $\delta > 0$. 点 a 的 **δ 邻域** $U(a;\delta)$ 是指数集:

$$U(a;\delta) = \{x || x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta),$$

它表示与点 a 的距离小于 δ 的实数 x 的全体所成的数集, 简记为 $U(a)$. 数集

$$\{x | 0 < |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的 **δ 去心邻域**, 记作 $U^\circ(a;\delta)$, 或简记为 $U^\circ(a)$, 即

$$U^\circ(a;\delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\} = U(a;\delta)\backslash\{a\}.$$

数集 $U_+(a;\delta) = [a, a+\delta)$ 称为点 a 的 **δ 右半邻域**, 简记为 $U_+(a)$; 数集 $U_-(a;\ \delta) = (a-\delta, a]$ 称为点 a 的 **δ 左半邻域**, 简记为 $U_-(a)$; 数集 $U_+^\circ(a;\delta) = (a,\ a+\delta)$ 称为点

a 的 **δ 右半去心邻域**, 简记为 $U_+^\circ(a)$; 数集 $U_-^\circ(a;\delta)=(a-\delta,\ a)$ 称为点 a 的 **δ 左半去心邻域**, 简记为 $U_-^\circ(a)$.

当 $M>0$ 充分大时, $+\infty$ **的邻域** $U(+\infty)$, $-\infty$ **的邻域** $U(-\infty)$ 和 ∞ **的邻域** $U(\infty)$ 分别定义为

$$U(+\infty)=\{x|x>M\}=(M,+\infty),\quad U(-\infty)=\{x|x<-M\}=(-\infty,-M),$$
$$U(\infty)=\{x||x|>M\}=(-\infty,-M)\cup(M,+\infty).$$

1.1 实数的基本性质与常用不等式

1.1.1 实数的基本性质

我们知道, 任何两个自然数之和与积一定还是自然数, 即自然数集合 $\mathbb{N}$ 对于加法与乘法运算是封闭的. 但是 $\mathbb{N}$ 对于减法运算不封闭, 即任何两个自然数之差不一定是自然数. 当数系由自然数集合扩充到整数集合 $\mathbb{Z}$ 后, 关于加法、减法与乘法运算都封闭了. 但是 $\mathbb{Z}$ 对于除法运算不封闭, 因此, 数系又由整数集合 $\mathbb{Z}$ 扩充到有理数集合 $\mathbb{Q}$, 有理数集合 $\mathbb{Q}$ 关于加、减、乘、除 (除数不能为零) 运算都是封闭的.

有理数集 $\mathbb{Q}$ 中的每个数都可以用既约分数 $\dfrac{p}{q}$ 表示 (其中 $p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}_+$, 且 p, q 互质), 显然它们都能在数轴上找到对应点, 这些点称为有理点. 任何两个不同的有理点之间必有另一个有理点, 如它们的中点就是一个介于它们之间的有理点, 实际上其中存在无穷多个有理点. 粗想一下, 有理点在数轴上“密密麻麻”, 我们称有理数集合 $\mathbb{Q}$ 具有稠密性.

虽然有理点在数轴上“密密麻麻”, 但是它们并没有布满整个数轴, 其中还留有许多“空隙”. 比如, 边长为 1 的正方形的对角线的长度 $\sqrt{2}$ 就无法用有理点来表示. 下面用反证法来证明: 假定 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}(p,q\in\mathbb{N}_+$, 且 p 与 q 互质), 于是有 $p^2=2q^2$. 由于奇数的平方仍然是奇数, 所以 p 是偶数. 设 $p=2r, r\in\mathbb{N}_+$, 则得 $q^2=2r^2$, 于是 q 也是偶数, 所以 p 与 q 有一个公约数 2, 这与 p, q 互质的事实相矛盾, 故 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

这正说明与 $\sqrt{2}$ 对应的点位于有理数集合 $\mathbb{Q}$ 的“空隙”中. 换句话说, 有理数集合 $\mathbb{Q}$ 对于开方运算是不封闭的. 因为有理数必能表示为有限小数或无限循环小数, 所以扩充有理数集合 $\mathbb{Q}$ 的最直接方式之一, 就是将所有无限不循环小数 (称之为无理数) 添加进来, 让无理数填补有理数在数轴上所有的“空隙”. 显然, $\sqrt{2}$ 就是一个无理数. 实数系 $\mathbb{R}$ 是由全体有理数与全体无理数所构成的集合, 它填满了整个数轴.

实数系有如下基本性质.

(1) 实数系对加、减、乘、除 (除数不能为零) 运算是封闭的.

(2) 有序性：对于任意实数 a 与 b, 下列三个关系中,

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

有且只有一个成立; 并且实数的大小关系具有传递性, 即若 $a < b$, $b < c$, 则 $a < c$.

(3) 阿基米德 (Archimedes) 性：即对于任意正实数 a, b, 总存在正整数 n, 使得 $na > b$. 事实上, 可取 $n = \left[\dfrac{b}{a}\right] + 1$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

(4) 稠密性：有理数集 $\mathbb{Q}$ 具有稠密性, 即对任意 $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$, 存在 $t \in \mathbb{Q}$ 使得 $r < t < s$. 实数集 $\mathbb{R}$ 也具有稠密性, 即任何两个不同的实数 a, b 之间必有另一个实数 c, 且 c 可以是有理数, 也可以是无理数. 也就是, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 和无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中都是稠密的.

(5) 连续性：显然, 整数集合 $\mathbb{Z}$ 在数轴上的分布是很稀疏的. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 在数轴上是处处稠密的, 但是正如前面所说, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不能填满整个数轴, 即仍然有空隙. 而全体实数与数轴上的点是一一对应的, 实数系的这种无间隙性是实数系连续性的一种直观的几何表现.

实数系的性质 (1) 与 (2) 的证明, 参考菲赫金歌尔茨著的《微积分学教程》. 关于有理数集 $\mathbb{Q}$ 与无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中的稠密性和实数集的连续性的详细论证, 将在第 6 章给出.

1.1.2　一些常用的不等式

1. 三角不等式

对于任何 $a, b \in \mathbb{R}$, 有

$$||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|.$$

证明　先证明不等式 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. 根据绝对值的性质, 它等价于

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

而这可以由如下两式通过相加得到:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

所以得证: $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. 在此式中将 b 换为 $-b$, 便得 $|a-b| \leqslant |a| + |b|$.

再证明不等式 $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b|$.

由于 $|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|$ 及 $|b|=|a+b-a|\leqslant|a|+|b-a|=|a|+|a-b|$, 所以

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|,\quad |b|-|a|\leqslant|a-b|,$$

故 $||a|-|b||\leqslant|a-b|$. 在此式中将 b 换为 $-b$, 便得 $||a|-|b||\leqslant|a+b|$. □

2. 伯努利 (Bernoulli) 不等式

对于任何正整数 $n\geqslant 2$ 和实数 $h>-1$ 有

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh,$$

且等号成立当且仅当 $h=0$.

这可以用数学归纳法证明.

例 1 证明：对于任何实数 x, 有 $|x-1|+|x-3|\geqslant 2$.

证明 根据三角不等式得, 对于任何实数 x, 有

$$|x-1|+|x-3|\geqslant|(x-1)-(x-3)|=2.$$ □

例 2 设 n 是正整数, $a>1$, 试证明：$0<a^{\frac{1}{n}}-1\leqslant\dfrac{a-1}{n}$.

证明 令 $h=a^{\frac{1}{n}}-1$, 则 $h>0$, 于是根据 Bernoulli 不等式得

$$a=(1+h)^n\geqslant 1+nh=1+n(a^{\frac{1}{n}}-1),$$

所以

$$0<a^{\frac{1}{n}}-1\leqslant\frac{a-1}{n}.$$ □

例 3 设 a,b 为两个实常数, 试证明：$a\leqslant b$ 的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$, 总有 $a<b+\varepsilon$.

证明 **必要性** 若 $a\leqslant b$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 显然有 $a\leqslant b<b+\varepsilon$.

充分性 若 $\forall\varepsilon>0$, 总有 $a<b+\varepsilon$. 往证：$a\leqslant b$. 用反证法, 假定 $a>b$, 则存在 $\varepsilon_0=a-b>0$, 满足 $a=b+\varepsilon_0$, 但由条件得, $a<b+\varepsilon_0$, 这就产生矛盾. 故

$$a\leqslant b.$$ □

思考题

1. 写出平均值不等式.
2. 无理数集合 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 关于加、减、乘、除 (除数不能为零) 运算是否封闭? 为什么?
3. 有理数集合 $\mathbb{Q}$ 和无理数集合 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 是否具有 Archimedes 性? 为什么?
4. 数集的稠密性与连续性有什么关系?

习　题　1.1

1. 设 $r \in \mathbb{Q}$, $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 且 $r \neq 0$, 试证明: $t \pm r, t \cdot r, \dfrac{t}{r}$ 都是无理数.

2. 证明: 对于任意实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 有

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

和

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \geqslant |a_1| - |a_2| - \cdots - |a_n|.$$

3. 证明: 对于任何实数 x 和 a, 有

(1) $|x-1| + |x-a| + |x-3| \geqslant 2$;　　(2) $\dfrac{|a+x|}{1+|a+x|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|x|} + \dfrac{|x|}{1+|x|}$.

4. 证明: 对于任何正整数 n 和实数 $h \geqslant 0$, 有

$$(1+h)^n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

5. 设 n 是正整数, $a > 0, b > 0$, 试证明:

$$|\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}| \leqslant \sqrt[n]{|a-b|}.$$

6. 设 a, b 为实常数, 试证明: $a = b$ 的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, 总有 $|a-b| < \varepsilon$.

---

7. 设 n 是正整数, $0 < a < 1$, 试证明: $0 < a^n < \dfrac{a}{n(1-a)}$.

8. 设 $x > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, 试证明: $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 $\dfrac{a}{b}$ 与 1 之间.

1.2　数列与数列极限的概念

1.2.1　数列的定义

定义 1.2.1　按自然数 $1, 2, 3, \cdots$ 编号依次排列的一列数

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{1.2.1}$$

称为**无穷数列**, 简称**数列**, 记作 $\{a_n\}$. 其中的每个数称为数列 (1.2.1) 的**项**, a_n 称为数列 (1.2.1) 的**通项**(或一般项). 例如,

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots;$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots;$$

$$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$$

都是数列, 它们的通项分别为 n, $\dfrac{1}{n}$ 和 $(-1)^{n-1}$.