

有限元素法

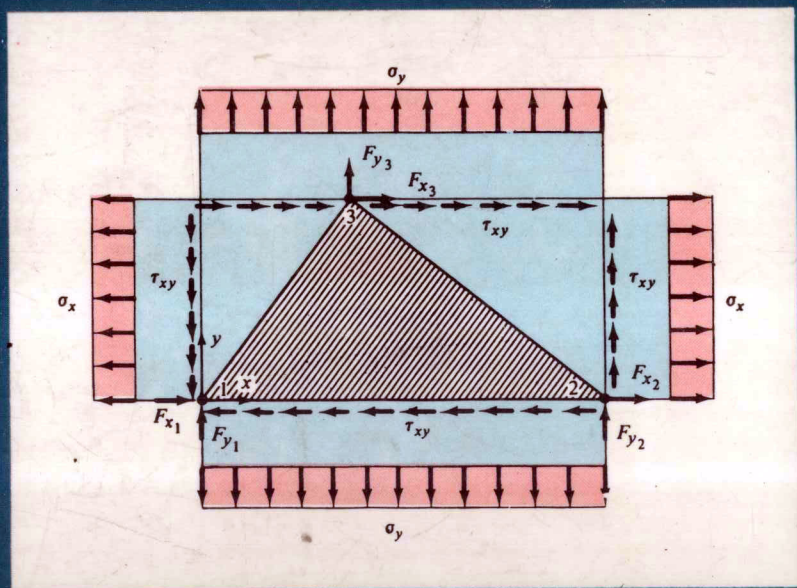
Finite Element Analysis Fundamentals

原著者：R. H. Gallagher

譯述者：李雅榮 茅聲燾 陳文華

姚家圻 陳永祥 陳舜田

楊德良 葉基棟



科技圖書股份有限公司

有限元素法

Finite Element Analysis Fundamentals

原著者：R. H. Gallagher

譯述者：李雅榮 茅聲燾 陳文華
姚家圻 陳永祥 陳舜田
楊德良 葉基棟

科技圖書股份有限公司

0242.21
L34

本公司經新聞局核准登記
登記證局版台業字第1123號

書名：有限元素法
原著者：R. C. Gallagher
譯述者：陳舜田等八人合譯
發行人：趙國華
發行者：科技圖書股份有限公司
台北市重慶南路一段49號四樓之一
電話：3118308・3118794
郵政劃撥帳號 0015697-3

六十九年六月初版
七十六年一月四版

特價新台幣 200 元

原 序

新的學門通常都經過三個時期的技術發展，在第一時期內是經由期刊的論文而茁長，偶而有縱覽式之論文予以綜合，實際之應用則甚少。到了第二時期則有專論式之書本出現，對在這學門中積極從事進一步發展之工作者提供詳盡之論點，而應用則在資源充沛機構之高級技術團隊中得以發展。到了最後一個時期，則應用已幾乎推展到實務中的每一階層，而在大學中，這一學門的題材也已成爲例行的學科了。

有限元素分析的發展在最近*才剛脫離上述的第二個時期，雖已有幾本極好的專論式書，但仍需要有一本書能適合傳統的授課之用，及供以前並不熟悉這一學門的人研讀。本書正是爲此而撰，並針對專研固體力學學生的研究所課程而設計。這些學生可包括就讀於機械與航空工程、造船、工程力學、及土木工程等方面的人，在這些學門中若謂有所偏重，則着眼於土木工程師之有志於從事結構工程實務者。

同時希望本書也能引起已從事實務的工程師的興趣。其中有的人在求學時期還沒有這一學門，因此需要新知的介紹，有的人則或經常與有限元素分析接觸，但需尋求其基本演證及推導程序。事實上本書的很多材料都從作者對實務工程師所授的短期課程中而來。

研讀本書的題材需先對彈性力學及矩陣結構分析有所了解，這也意味着應已研習過偏微分方程式、多元代數方程、及結構分析理論等。雖然作者相信本書前幾章對上述各學科都已有適當的介紹，但根據作者之經驗，如對這些學科一無所知，則在一般有限元素法課程中欲能充分吸收這些科目實不太可能。不過我們要指出，通常在二、三年級的連體力學課程中對彈性力學應已打下足夠的基礎了。

所謂矩陣結構分析這一名詞頗需予以澄清。因爲通常它泛指在結構工程中與數位計算機應用相關的程序的各方面。不過晚近的趨勢，是把建立及解方程式、包括連接簡單的結構元素的步驟，與演導元素的步驟分開，前者往往僅用到如桁架及剛架等的結構構件，其構件基本理論之建立僅爲

有限元素法

後者之一小部份，而後者才是矩陣結構分析之所指。

有限元素分析之理論推導需賴變分法之應用。我們不把變分法列為先修科目，因為作者覺得要求原有能力學習有限元素分析的學生，在事先已正式修過變分法是不切實際的。

本書內容幾乎全用以推導基本理論，除第一章外，也很少提及有限元素分析之實際應用。在應用方面可在其他文獻中找到豐富的資料。有的參考文獻已列在本書每章末之文獻中。在第一章裏，除了描述一些具代表性的應用外，我們也概述有限元素分析的發展史、簡單描述本書以後各章中探討的各種元素、並敘述作為有限元素法原動力之一的多用途程式。

第二章用以敘述基本定義、專有名詞、座標系統、以及各種有限元素演導模式的通性。第三章細述從各個元素方程式組成整體結構方程式之一法——直接勁度法。其他方法則在其後各章中略述。不過如前所述，本書之目的仍是專注於元素之演導。

雖然我們在推導過程中並不排除一維構件（軸向構件及梁構件），而且事實上還經常用之以作基本理論之例證。但有限元素分析之主要動機還是為了二維及三維連體。因此對彈性力學基本關係之了解是研讀有限元素分析之必須。而我們會在第四章中就基本的考慮來推導這些關係。

本書涵蓋兩大類的元素方程式演導程序。第五章中敘述的直接法之簡單及其基本理論甚為引人。直接演導的過程可使人對元素演導所滿足或不滿足的條件有深入的了解。變分法（第六章）在目前是應用更廣的元素演導法，這種方法在某些特定情況下極有價值，因其可保證數值解之收斂，並在給定的分析精度下可證某種演導會導致上限或下限解。在第六章中我們應用變分法於元素之演導。在第七章中我們演示如何將同樣的觀念引伸至整個結構之演導。由此我們得以建立一不同於第三章所述而又更廣泛的結構系統分析法。

此處應一提作者所認為的本書一大特色。在寫作此書時，所有的應用與大多數現有的有限元素理論皆屬基於變位的有限元素演導（即勁度或勢能）法。但是其他如基於假設應力場、甚或同時假設變位及應力場的演導法也甚具前途。且作者可預見這種演導在應用上有達到同等重要性地位的可能。因此在第五至第七章中給予密切的關照。

本書中有關基本理論的探討在第八章告一段落。在其中我們研討元素行為之函數模擬程序，並引伸同一觀念至元素之幾何形狀。這一章中所建立之觀念與演導法較以前各章者可能更廣泛有用，因其應用於非結構之有限元素分析也同樣有效。

從第九章到第十二章，每一節都詳細探討各種不同的元素，包括平面應力元素（第九章）、一般型態及特殊之體元素（分別為第十、第十一章）、及平板抗撓元素（第十二章）。如前所述，此處也較前幾章更強調其他文獻中的資料。

第十三章處理 - 特殊結構行為 - 即彈性不穩定問題。由於此章所發展的理論可適用於任何元素，故為方便起見，可再度應用元素中之最簡單者——軸向構件及剛架構件。

本書有三種可供指配的習題。第一種習題旨在演練理論之觀念，包含一般傳統結構力學課程中的一類習題。第二種則為專屬有限元素法之習題，但仍可用手算，如新元素關係之演導，或解不超過三個代數方程式之結構問題。第三種則為原已有古典解或比較解之問題，我們提供數據並以較多數方程式之有限元素法模擬之。這一類問題可用多種方式分配給學生。不過作者發現很有效的一法是讓班上每一學生用一不同之格網，則由結果之比較更可得有限元素解之精度及收斂率。

有限元素法是與數位計算機分析不可分的一種技術。因此本書之不含任何寫定的程式或令人感到意外。作者相信教師或本書的使用人對於獲得適於上述習題用的多用途程式（如STRUDL-II）應無困難。如不然，則其他各種報告或書本中也有較簡單的有限元素程式。

本書題材在一般的每週三小時、共十五週之課程中授完是可能的。不過據作者之經驗，這要大多數的學生都對各先修課目（彈性力學、矩陣結構分析）及變分法相當熟悉。所以教師可酌情略去最後四章中的一兩章。但如屬一年三學期的學制，則似可先有一個十週的矩陣結構分析課，接以兩個十週的有限元素課程，在第二個有限元素課程中或有餘暇可講授其他較高等之課題，如有限元素理論及分析之用於土壤力學、熱傳遞、流體力學、及其他非結構問題；非線性問題；及瞬時分析等。

作者對讀過本書原稿並予批評及建議的很多學生及熱心的同事致謝。

有限元素法

並感謝德州大學俄登教授及滑鐵盧大學麥可尼斯教授對第九章的貢獻、及東京大學鷺津教授對第六章及第七章的研讀及批評。更特別感謝諾特丹大學雪梨凱爾賽教授幾遍及本書各章的詳細覆閱及廣泛而觀察入微的批評、普蘭蒂斯書局之發行編輯詹姆士貝齊先生及包括芭芭拉凱賽兒之其他書局同仁對這一銷及全球之計劃之無限耐心、以及海倫惠勒女士對書稿的優異打字並指正斷句與文法上的失誤。

李察 蓋里格

RICHARD H. GALLAGHER

※譯者註：指 1975 年以前

譯 序

有限元素法此一技術，在台大土木工程學研究所開授已將十年。晚近三年更在各大學廣為開授。然因修習者限於在學研究生，多數工程師仍對其基本理論頗感陌生。但由於近來工程設計之需及多用途程式之普遍應用，少數工程師亦已頗有實用經驗。目前工程技術日趨複雜，使有限元素法之廣泛應用更不可免。在甚多場合常有工程界朋友表示希望有短期課程之開授，以增進對基本理論之認識，從而提高應用此一方法之信心。

開授有限元素法短期課程之先決條件有二，一為有合宜之中文教材；一為有可供實習之計算機程式及設備。一九七九年春，在一學術討論會後，數位在校教書同仁談及此一問題，深感以目前教學及研究工作之繁重，欲撰寫一好書實非短期所能實現。但如選擇一英文名著分工合譯以作為講義則尚勉可達成。於是劍及履及，當即決定就近由北部各校八位教授合作翻譯一書，並公推陳教授舜田博士為召集人，統籌各項事宜，並以在本年夏季開授有限元素法結構分析講習班為標的。其後不久即展開本書之翻譯工作，此外並另邀請林教授聰悟及中鼎工程股份有限公司林組長聰哲、朱工程師建存會同原有八人共十一人為講員。是時中鼎工程股份有限公司經林教授聰悟之洽商已慨允贊助計算機實習時間，於是一切困難皆迎刃而解。後並經台大校方核定由土木所主辦，聘陳教授舜田為講習班主任。講習班之籌備遂與本書之翻譯同時展開。

本書之選為教材，在於原作者李察蓋里格教授與有限元素法之傳播及發展有極密切之關係。蓋里格教授在其服務美國工程界期間即對有限元素法有重要之貢獻。後轉任教於康乃爾大學土木工程學院結構工程學系並主持系務，以其多年在課室講授及多次開授專供工程界修習之短期課程經驗寫成本書。其說理清晰，系統分明，對基本理論之闡釋極為詳盡。故於一九七五年初版後，三四年間即已三度重印。除在英語系各國廣為流傳外，並已有日文譯本，可見本書受歡迎之一斑。故選之為講習班教材實極為合宜也。蓋氏現任美國阿略松那大學工學院長，聞知本書選譯為講習班之中文講義亦頗表贊勵。

本書之翻譯，事前曾由譯者會商統一專有名詞之中文譯名，並期能儘

有限元素法

量維持文氣之一致。但以譯者皆非文學專家，寫作原非所長，詞意滯澀，文白夾雜之處所在多有。且僅以三數月之期趕譯，恐謬誤之處亦難全免。體制方面，原書作者索引於譯本中刪除，名詞索引則按中文筆劃重行編排，並附原書頁次索引以利翻查，另增中英人名對照，目錄按原本翻譯，各章譯者名附於目錄中章名之後，雖皆小節，亦足見求備之意也。譯成之日，時在盛暑，同仁皆如釋重負焉。

茅 聲 兼 於台大土木所研究室

寫在中譯本印行之前

民國六十八年夏，國立台灣大學土木工程學研究所舉辦有限元素法結構分析講習班。對於該班的籌備經過，茅聲燾教授在其譯序中已做了詳細的敘述，在此不再贅言。

講習班於七月十六日開始，八月三日結束，參加學員達 145 人。講習班結束之後，舜田轉來技術學院服務，有不少工程界及學術界的朋友來電要求贈送或購買講習班之中譯講義。本來在講義付印之初原已料到可能有此情形，當時也曾考慮到多印一些以備需要，但經諸譯者商量結果認為這裏面牽涉到著作權與版權問題。雖然翻譯此書之前曾獲原作者蓋里格君之同意，然他也聲明此書版權屬於普蘭蒂斯書局，故應再徵得該書局之同意。後來一則因為時間緊綬，二則因認為如果只把中譯本當做講習班講義而不出售則其間並無營利行爲，所以也就沒有進一步與普蘭蒂斯書局打交道。也因為不打算出售，所以那時所印的份數也足夠供應講習班之用而已。後來讓許多朋友向隅，實在抱歉。

暑假過後，有個機會幾位譯者又聚在一起，談起這個問題，一方面感於外界的需要；另一方面在講習班所發問卷裏，許多學員建議以後這講習班最好每年舉辦一次，因而想到如果以後再辦，希望學員可買到現成的教材，如此可節省主辦人員一些精力，所以大家決定正式印行。

前台大土木工程系教授趙國華先生參贊科技圖書公司多年，致力於中文科技圖書之出版，對於科技之文化之貢獻良多。因而我們商請趙先生代為出版，由我們免費提供譯稿，但要求科技圖書公司正式向普蘭蒂斯書局繳費取得中譯本在台出版之同意。又由於原講義之版面不夠美觀，再商請趙先生同意予以重新打字，然後由原譯者親自校稿，並把符號、公式等依原文書最新第四印本訂正。

幾經努力，這本中譯本終於順利正式印行。希望它能帶給有興趣於有限元素法的朋友一些方便。誠如茅聲燾教授說的譯者皆非文學專家，寫作翻譯原非所長，雖然我們已盡了力，但疏漏之處在所難免，望我前輩先進多賜指正。

陳舜田 於台灣工業技術學院營建系，民國六十八年十二月

符號說明

下列本書所用主要符號之說明，其他各類符號則在書中使用處說明之。如用以表示矩陣者（在第六章中為多）、或僅用於表或圖中者即是。同樣符號用以表示兩種截然不同之意義時，則以附加下標分別之（如 L 表長度而 L_i 則表示面積或體積座標）。附加上標及下標而仍代表相似意義之符號不列於下，但在書中使用時說明之。

粗體字框於符號 [] 中表示矩形矩陣，在 { } 中表示行矩陣，在 [] 中表示列矩陣。粗體字矩陣符號之定義亦適用於輕體（即非粗體）而加下標之矩陣各項，如 $n \times 1$ 之向量 {**a**} 之定義亦適用於向量中各元素 $a_1 \dots a_i \dots a_n$ 即是。用以表示矩陣之粗體字母亦常以輕體而加上下標之型態出現，並代表意義完全不同之純量，但有時則仍代表相同之意義。

上加橫線之符號代表給定之量，分號代表微分。

A 面積

[**A**] 將節點力以應力表示之關連矩陣

[**G**] 動性矩陣。元素節點及大域節點變位間關係之係數

a 尺寸

- {a} 假設變位場之參數向量
 [B] 將節點變位以假設變位場參數表示之關連矩陣
 [B] 靜性矩陣，元素節點及大域節點力間關係之係數
 b_{0i}, b_{1i}, b_{2i} ($i = 1, 2, 3$). 面積座標方程式中之係數
 C 包松方程式中之常數
 [C] 將應變場以假設變位場參數表示之關連矩陣
 c_{0i}, \dots, c_{3i} ($i = 1, 2, 3, 4$). 體積座標方程式中之係數
 D 板之抗撓剛度
 [D] 將應變場以節點變位表示之關連矩陣
 {d} 特徵向量
 d.o.f. 自由度
 E 彈性模數
 [E] 彈性常數矩陣
 e 變分乘子
 {F} 元素節點力向量
 {F} 大域柔度矩陣
 {f} 元素柔度矩陣
 G 剪力模數
 [G] 束制矩陣
 I 慣性矩
 [I] 單位矩陣
 g 積分值
 i, j, k 虛下標或上標
 J 聖維農扭曲常數
 [J] 亞可比矩陣
 [K] 大域勁度矩陣
 [k] 元素勁度矩陣
 L 長度
 L_i 面積 ($i = 1, 2, 3$) 或體積 ($i = 1, 2, 3, 4$) 座標
 l_x, l_y, l_z 方向餘弦
 {M} 節點彎矩向量
 π_x, M_x, M_y, M_{xy} 板之撓曲 (線彎矩) 時之廣義內彎矩向量及分量
 m 多項式級數之階級
 [m] 元素質量矩陣
 π 多邊形之邊數
 [N], [N] 形狀函數矩陣
 n 自由度數
 [O], {O} 零矩陣及向量

有限元素法

- $\{P\}$ 大域節點力之向量
 P 元素數
 $[p]$ 多項式級數之係數矩陣
 Q_x, Q_y 板之撓曲時之剪力線荷重
 q 分佈荷重強度
 R 餘數
 $[R]$ 靜力平衡矩陣，元素力之相連矩陣
- $[R]$ 將一維內插函數引伸為二維時之中心矩陣
- r 徑向座標；束制方程式數
 S, S_n, S_s 廣義之面、變位給定之面、及應力給定之面
- $[S]$ 應力矩陣，將應力場分量以節點變位表示之矩陣
- $[S]$ 應力矩陣，將特定点應力以節點變位表示之矩陣
- s 座標
 $\{s\}$ 束制方程式中之常數向量
 T, T_x, T_y, T_z 面（邊界）作用力向量及分量
 t 厚度
 U, U^* 應變能及補應變能
 u 面（邊界）變位向量
 u, v, w 變位分量（內部及面上各點）
- V, V^* 作用力之勢能及補勢能
 vol 體積
 W 功
 w 變位場變分記子
 X, X, Y, Z 微體力向量及分量
 x, y, z 卡迪遜座標

希臘符號

- α 熱膨脹係數
 β 貝他函數（節 8.3.1）
 $\{\beta\}$ 假設應力場參數之向量
 Γ 伽瑪函數（節 8.3.1）；皺曲常數（節 13.3.2）
- Γ_i 交叉微分之自由度（式 (12.31)）
 $[\Gamma]$ 轉換矩陣
 $\{\Delta\}$ 節點變位向量
 δ 變分子；微變

ϵ	廣義應變向量 (包括正應變及剪應變)
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	正應變
ξ, η, ζ	無因次空間座標
θ	角變位 (第十一章中之角度)
$\kappa, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	板之撓曲時之曲率向量及分量
$[\mathbf{k}]$	赫士矩陣
$\{\lambda\}$	拉格朗奇乘子
μ	包松比
$[X_i]$	應力場形狀函數之向量
Π	廣義泛函
Π_p, Π_p^m, Π_c	能量泛函 (上下標表將定類別)
π	3.1416...
$[\rho]$	材料之質量密度矩陣
σ	廣義應力場向量 (包括正應力及剪應力)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	正應力
$\{\sigma\}$	節點應力之向量
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	剪應力
Υ	在無應力狀態或原態以外之溫度變化
ν	熱傳導係數
Φ	應力函數
$\{\Phi\}$	節點應力函數之向量
ϕ	角度或圓周角座標; 加權餘數積分中之權數
Ω	板之撓曲時之荷重函數
$[\Omega]$	混合式力—變位矩陣
$\{\omega\}$	特徵值向量

目 錄

目 錄

原 序

茅聲燾譯

譯 序

茅 聲 燾

寫在中譯本印行之前

陳 舜 田

符號說明

茅聲燾譯

第一章 緒 論 陳永祥譯 1

- 1.1 有限元素法之簡史
- 1.2 元素之種類
- 1.3 有限元素之應用
- 1.4 多用途電子計算機程式

第二章 定義及基本元素運用 陳永祥譯 20

- 2.1 座標系統
- 2.2 基本元素理想化
- 2.3 元素之力 - 變位性質
- 2.4 功與能
- 2.5 對換性
- 2.6 柔度 - 勁度之轉換
- 2.7 自由度之轉換
- 2.8 縮減
- 2.9 剛體模態之偵斷

有限元素法

第三章 大域分析程序 陳舜田譯 53

- 3.1 直接勁度法—基本觀念
- 3.2 直接勁度法—一般程序
- 3.3 勁度分析之同餘轉換法
- 3.4 有限元素法優點之概述
- 3.5 特殊運算

第四章 彈性力學基本關係 陳舜田譯 90

- 4.1 平衡微分方程式
- 4.2 應力邊界條件
- 4.3 應變 - 變位方程式及諧合方程式
- 4.4 材料之組成關係
- 4.5 平衡及諧合微分方程式
- 4.6 結論

第五章 元素演導之直接法 楊德良譯 108

- 5.1 直接法
- 5.2 三角形平面應力元素
- 5.3 直接法之限制
- 5.4 非結構問題之直接法
- 5.5 加權餘數法

第六章 元素演導之變分法 陳文華譯 135

- 6.1 虛功原理
- 6.2 變分法
- 6.3 離散化之變分問題
- 6.4 最小勢能
- 6.5 變位複合型與廣義勢能演導
- 6.6 最小補能
- 6.7 應力複合之作法

6.8 瑞聖納能量與替代泛函

6.9 回顧與總結

第七章 大域分析之變分法 楊德良譯 189

7.1 最小勢能原理

7.2 最小勢能解之下限特性

7.3 用拉格朗奇乘子法之束制方程式

7.4 廣義勢能原理

7.5 最小補能原理

7.6 最小補能解之上限特性

第八章 元素行為函數及幾何之表示法 ..葉基棟譯.. 211

8.1 元素行為函數表示法之要求

8.2 多項式級數

8.3 形狀函數直接經由內插法建立

8.4 矩形元素

8.5 三角形元素

8.6 四面體元素

8.7 內模態與簡化

8.8 同參數表示法

第九章 平面應力 茅聲燕譯 249

9.1 基本關係

9.2 三角形平面應力元素

9.3 矩形平面應力元素

第十章 體元素：一般情況 葉基棟譯 287

10.1 基本關係

10.2 四面體元素之演導

10.3 矩形六面體元素

10.4 數值上的比較